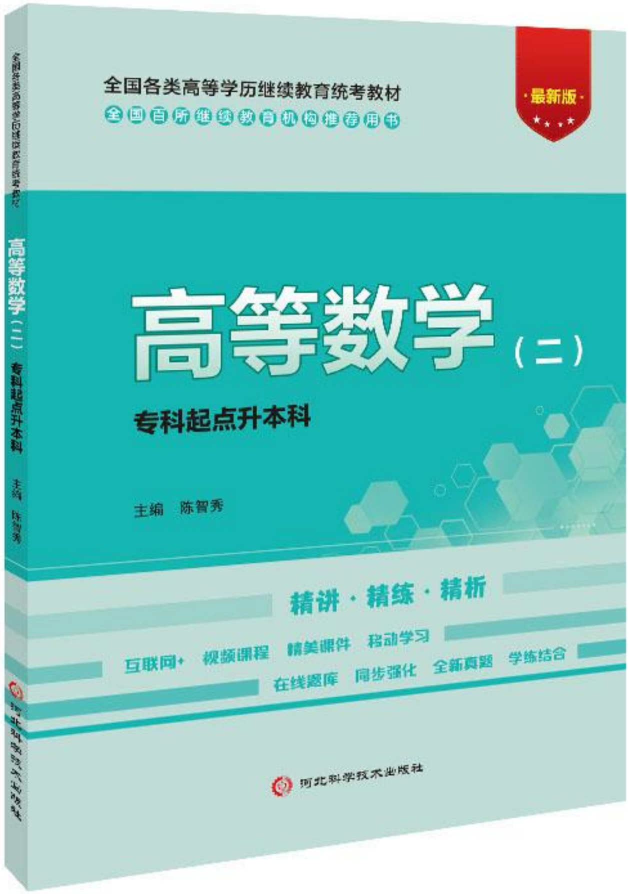
高等学历-高等数学二



类目：高等学历继续教育统考教材
书名：高等学历-高等数学二
主编：陈智秀
出版社： 河北科学技术出版社
开本：大 16 开
书号：978-7-5717-1207-5
使用层次：成人教育
出版时间：2022 年 11 月
定价：42
印刷方式：双色
是否有资源：是

责任编辑：王 宇
责任校对：张京生
美术编辑：张 帆

图书同步精讲课程

–课时多、讲得细、学得快，通过考试更容易–

提升学历就选高等学历继续教育

理论精讲
明确考情
夯实基础

真题讲练
掌握规律
巩固提升

专题突破
把握重点
突破难点

模考训练
模考强化
标准预测

课程说明
本课程视频由一线教师录制。
本课程与最新考试大纲配套。
本课程的学习平台为小书虫学习公众号，扫描右侧二维码观看。

立即扫码
小书虫学习公众号

全国各类高等学历继续教育招生考试备考用书（专科起点升本科）

教材系列

○ 政治	○ 英语	○ 高等数学（一）	● 高等数学（二）
○ 民法	○ 教育理论	○ 医学综合	○ 大学语文
○ 艺术概论	○ 生态学基础		

试卷系列

○ 政治	○ 英语	○ 高等数学（一）	○ 高等数学（二）
○ 民法	○ 教育理论	○ 医学综合	○ 大学语文
○ 艺术概论	○ 生态学基础		

ISBN 978-7-5717-1207-5
定价：42.00元

全国各类高等学历继续教育统考教材
高等数学（二）
专科起点升本科
主编 陈智秀
河北科学技术出版社

全国各类高等学历继续教育统考教材

全国百所继续教育机构推荐用书

·最新版·

高等数学（二）

专科起点升本科

主编 陈智秀

精讲 · 精练 · 精析

互联网+ 视频课程 精美课件 移动学习

在线题库 同步强化 全新真题 学练结合

河北科学技术出版社

全国各类高等学历继续教育统考教材

全国百所继续教育机构推荐用书

高等数学（二）

专科起点升本科

主编　陈智秀

河北科学技术出版社

· 石家庄 ·

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(二):专科起点升本科 / 陈智秀主编
. -- 石家庄 :河北科学技术出版社,2022.9
全国各类高等学历继续教育统考教材 / 张东红主编
ISBN 978-7-5717-1207-5

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①陈… Ⅲ. ①高等数学—成人高等教育—升学参考资料 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2022)第 156580 号

高等数学(二) 专科起点升本科
GAODENG SHUXUE (ER) ZHUANKE QIDIAN SHENG BENKE
主编 陈智秀

出版发行	河北科学技术出版社
地 址	石家庄市友谊北大街 330 号(邮编:050061)
印 刷	唐山唐文印刷有限公司
开 本	880 毫米×1230 毫米 1/16
印 张	10
字 数	240 千字
版 次	2022 年 9 月第 1 版
印 次	2022 年 9 月第 1 次印刷
定 价	42.00 元

出版说明

2022年，教育部印发《关于推进新时代普通高等学校学历继续教育改革的实施意见》(以下简称《意见》)，要求推进新时代普通高等学校举办的学历继续教育改革发展。《意见》指出普通高等学校举办的学历继续教育统一通过成人高考入学，统一专业教学基本要求，统一最低修业年限，统一毕业证书。为了满足广大考生备考的需要，使其能够顺利通过成人高校统一入学考试，我们组织了有丰富成教经验的一线教师和专家，认真研究了教育部高校学生司和教育部考试中心2020年修订的《全国各类成人高等学校招生复习考试大纲》，并依据2020年版大纲的要求，在把握成人高考命题变化的基础上，精心编写了全国各类高等学历继续教育统考教材。

本系列教材包括：

高中起点升本、专科：《语文》《英语》《数学(文史财经类)》《数学(理工农医类)》《历史地理综合》《物理化学综合》。

专科起点升本科：《政治》《英语》《大学语文》《高等数学(一)》《高等数学(二)》《艺术概论》《民法》《教育理论》《生态学基础》《医学综合》。

在本系列教材的编写过程中，侧重体现如下几个特点：

1.紧扣大纲，时代性强

本系列教材紧扣最新修订的《全国各类成人高等学校招生复习考试大纲》，内容的编排和选择与新大纲的知识系统完全一致，充分体现了新大纲的知识能力要求。在编写过程中，借鉴和吸收基础教育改革的成果，融入新的命题思想和观点，及时适应成人高考的新变化，具有较强的时代性。

2.结构合理，重点突出

本系列教材根据知识的内在联系和考生的认知规律，既坚持了“少而精”的原则，又注重了教材内容的完整性，遵循从简单到复杂、由浅入深、循序渐进的原则进行编排。学习起点低，重点突出，更加有利于考生对学科知识内容的理解，提高复习效率。

3.针对性强，科学实用

本系列教材针对成人高考的实际需要，注重基础知识复习和能力训练，具有较强的针对性和实用性。

本系列教材不仅可供参加全国各类高等学历继续教育统考的考生使用，也适用于高中及以上学历的学生、教师和教研人员学习、参考。

为进一步提高本系列教材的质量，欢迎广大师生提出宝贵意见和建议，以便及时修订，使之日趋完善。

编　者

超高命中，源自精选

命题专家深度解读历年考试真题，对出题内容、题型比例、考查重点、出题形式有独特地把握，在紧密结合考试大纲的基础上，精心提炼核心考点，辅以精选全真试题，准确洞悉命题方向，连续命中原题，一直保持超高命中率！

《高等数学(二)》命中实例

1.设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 可导，$f'(x)>0$，$f(a)f(b)<0$，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内零点的个数为(C)(2019 年统考题)

A.3　　B.2　　C.1　　D. 0

2.设 $2x$ 为 $f(x)$ 的一个原函数，则 $f(x)=$(B)(2019 年统考题)

A.0　　B.2　　C. x^2　　D. x^2+C

3.设函数 $y=e^{2x}$，则 $dy=$__________．(2019 年统考题)

答：$2e^{2x}dx$

4.函数 $f(x)=x^3-12x$ 的极小值点 $x=$__________．(2019 年统考题)

答：2

5.方程 $y^3+\ln y-x^2=0$ 在点(1,1)的某邻域确定隐函数 $y=y(x)$，则 $\frac{dy}{dx}\big|_{x=1}=$__________．(2020 年统考题)

答：$\frac{1}{2}$

6. 求曲线 $y=x^3-3x^2+2x+1$ 的凹凸区间与拐点.(2020 年统考题)

答：

$y'=3x^2-6x+2$，$y''=6x-6$，

令 $y''=0$，得 $x=1$.

当 $x>1$ 时，$y''>0$，故 $(1,+\infty)$ 为曲线的凹区间；

当 $x<1$ 时，$y''<0$，故 $(-\infty,1)$ 为曲线的凸区间，

函数的拐点为(1,1).

说明：由于篇幅所限，命中题目不一一列举，但都在书中以考题的形式出现。

目　录

CONTENTS

第一篇　高等数学

第二篇　概率论初步

第　一　篇

高等数学

第一章 极限和连续

本章要求

极限

(1)了解极限的概念(对极限定义中“ε-N”“ε-δ”“ε-M”的描述不作要求),掌握函数在一点处的左极限与右极限以及函数在一点处极限存在的充分必要条件.

(2)了解极限的有关性质,掌握极限的四则运算法则.

(3)理解无穷小量、无穷大量的概念,掌握无穷小量的性质、无穷小量与无穷大量的关系,会进行无穷小量阶的比较(高阶、低阶、同阶和等价),会运用等价无穷小量代换求极限.

(4)熟练掌握用两个重要极限求极限的方法.

连续

(1)理解函数在一点处连续与间断的概念,理解函数在一点处连续与极限存在之间的关系,掌握函数(含分段函数)在一点处连续性的判断方法.

(2)会求函数的间断点.

(3)掌握在闭区间上连续函数的性质,会用它们证明一些简单命题.

(4)理解初等函数在其定义区间上的连续性,会利用函数连续性求极限.

说明:据教育部最新颁布的《全国各类成人高等学校招生复习考试大纲》中专科起点升本科高等数学(二)考试大纲规定,去掉函数的概念与性质的相关内容,但极限、连续、导函数等部分还要研究函数的性质.为方便初学者或基础薄弱者更好地学习本教材,我们仍予保留,以供自学之用.

第一节 函 数

基础知识

一、常量与变量

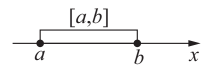
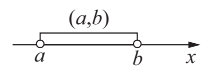
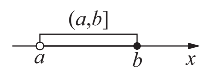
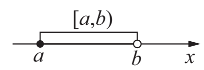
(1)常量与变量的定义:我们在观察某一现象的过程时,常常会遇到各种不同的量,其中有的量在过程中不起变化,我们将其称为常量;有的量在过程中是变化的,也就是可以取不同的数值,我们则将其称为变量.

注意 在过程中还有一种量,它虽然是变化的,但是它的变化相对于所研究的对象是极其微小的,

我们也把它看作常量.

(2)变量的表示:如果变量的变化是连续的,则常用区间来表示其变化范围.在数轴上,区间是指介于某两点之间的线段上点的全体,见表 1-1.

表 1-1

区间的名称	满足区间的不等式	区间的记号	区间在数轴上的表示
闭区间	$a \leqslant x \leqslant b$	$[a,b]$	
开区间	$a < x < b$	(a,b)	
半开区间		$[a,b]$或$[a,b]$	

以上这些区间都是有限区间,除此之外,还有无限区间.

$[a,+\infty)$:表示不小于 a 的全体实数,也可记为 $x \geqslant a$.

$(-\infty,b)$:表示小于 b 的全体实数,也可记为 $x<b$.

$(-\infty,+\infty)$:表示全体实数,也可记为 $\mathbf{R}$.

注意　$-\infty$和$+\infty$,分别读作“负无穷大”和“正无穷大”,它们不是数,仅仅是记号.

(3)邻域:设 α 与 δ 是两个实数,且 $\delta>0$,满足不等式 $|x-\alpha|<\delta$ 的实数 x 的全体称为点 α 的 δ 邻域,点 α 称为此邻域的中心,δ 称为此邻域的半径.

二、函数

(1)函数的定义:当变量 x 在其变化范围内任意取定一个数值时,变量 y 按照一定的法则 f 总有确定的数值与它对应,则称 y 是 x 的函数.变量 x 的变化范围叫作这个函数的定义域.通常 x 叫作自变量.y 叫作函数值(或因变量),变量 y 的变化范围叫作这个函数的值域.(注意:为了表明 y 是 x 的函数,我们用记号 $y=f(x)$,$y=F(x)$等来表示.这里的字母“f”“F”表示 y 与 x 之间的对应法则即函数关系,它们可以采用任意不同的字母来表示)如果自变量在定义域内任取一个确定的值时,函数只有一个确定的值和它对应,这种函数叫作单值函数,否则叫作多值函数.这里我们只讨论单值函数.

(2)函数相等:由函数的定义可知,一个函数的构成要素有定义域、对应法则和值域.因为值域是由定义域和对应法则决定的,所以,如果两个函数的定义域和对应法则完全一致,我们就称两个函数相等.

(3)函数的表示方法:

①解析法:用数学式子表示自变量和因变量之间的对应关系的方法即是解析法.例如直角坐标系中,半径为 r,圆心在原点的圆的方程是 $x^2+y^2=r^2$.

②表格法:将一系列的自变量值与对应的函数值列成表来表示函数关系的方法即是表格法.例如在实际应用中,我们经常会用到的平方表、三角函数表等都是用表格法表示的函数.

③图示法:用坐标平面上的曲线来表示函数的方法即是图示法.一般用横坐标表示自变量,纵坐标表示因变量.例如直角坐标系中,半径为 r,圆心在原点的圆的图示法如图 1-1 所示.

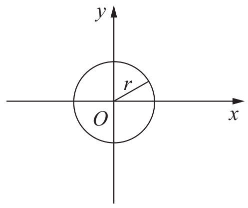


图 1-1

三、函数的简单性质

(1)函数的有界性:如果对属于某一区间 I 上的所有 x 值总有 $|f(x)|\leqslant M$ 成立,其中 M 是一个与 x 无关的常数,那么我们就称 $f(x)$在区间 I 上有界,否则便称无界.

注意 一个函数,如果在其整个定义域内有界,则称为有界函数.

例如:函数 $f(x)=\cos x$ 在$(-\infty,+\infty)$内是有界的.

(2)函数的单调性:如果函数 $f(x)$在区间(a,b)内随着 x 增大而增大,即对于(a,b)内任意两点 x_1 及 x_2,当 $x_1<x_2$ 时,有 $f(x_1)<f(x_2)$,则称函数 $f(x)$在区间(a,b)内是单调增加的.如果函数 $f(x)$在区间(a,b)内随着 x 增大而减小,即对于(a,b)内任意两点 x_1 及 x_2,当时 $x_1<x_2$,有 $f(x_1)>f(x_2)$,则称函数 $f(x)$在区间(a,b)内是单调减少的.

例如:函数 $f(x)=x^2$ 在区间$(-\infty,0)$内是单调减少的,在区间$(0,+\infty)$内是单调增加的.

(3)函数的奇偶性:如果函数 $f(x)$对于定义域内的任意 x 都满足 $f(-x)=f(x)$,则$f(x)$叫作偶函数;如果函数 $f(x)$对于定义域内的任意 x 都满足 $f(-x)=-f(x)$,则 $f(x)$叫作奇函数.

注意 偶函数的图形关于 y 轴对称,奇函数的图形关于原点对称.

(4)函数的周期性:对于函数 $f(x)$,若存在常数 $T>0$,使得关系式 $f(x+T)=f(x)$对于定义域内任何 x 值都成立,则 $f(x)$叫作周期函数,T 是 $f(x)$的周期.

注意 我们说的周期函数的周期是指最小正周期.

例如:函数 $\sin x$,$\cos x$ 是以 2π 为周期的周期函数;函数 $\tan x$ 是以 π 为周期的周期函数.

四、反函数

(1)反函数的定义:设有函数 $y=f(x)$,若变量 y 在函数的值域内任取一值 y_0 时,变量 x 在函数的定义域内必有唯一值 x_0 与之对应,即 $f(x_0)=y_0$,那么变量 x 是变量 y 的函数.这个函数用 $x=\varphi(y)$来表示,称为函数 $y=f(x)$的反函数.

注意 由此定义可知,函数 $y=f(x)$也是函数 $x=\varphi(y)$的反函数.

(2)反函数的存在定理:若 $y=f(x)$在(a,b)内严格增(减),其值域为 $\mathbf{R}$,则它的反函数必然在 $\mathbf{R}$ 内确定,且严格增(减).

注意 严格增(减)即是单调增(减).

例如:$y=x^2$,其定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$[0,+\infty)$.对于 y 取定的非负值,可求得 $x=\pm\sqrt{y}$.

若我们不加条件，由 y 的值就不能唯一确定 x 的值，也就是在区间$(-\infty,+\infty)$内，函数不是严格增(减)，故其没有反函数.如果我们加上条件，要求 $x\geqslant0$，则对 $y\geqslant0$，$x=\sqrt{y}$ 就是 $y=x^2$ 在 $x\geqslant0$ 条件下的反函数.即函数在此条件下严格增(减).

(3)反函数的性质：在同一坐标平面内，与 $y=f(x)$与 $x=\varphi(y)$的图形是关于直线 $y=x$ 对称的.

例如：函数 $y=2^x$ 与函数 $y=\log_2 x$ 互为反函数，则它们的图形在同一直角坐标系中是关于直线对称的，如图 1-2 所示.

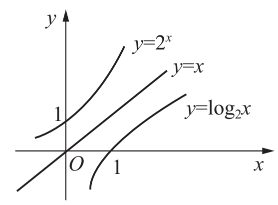


图 1-2

五、复合函数

若 y 是 u 的函数，$y=f(u)$，而 u 又是 x 的函数，$u=\varphi(x)$，且 $\varphi(x)$的函数值的全部或部分在 $f(u)$的定义域内，那么，y 通过 u 的联系也是 x 的函数，我们称后一个函数是由函数 $y=f(u)$及 $u=\varphi(x)$复合而成的函数，简称复合函数，记作 $y=f[\varphi(x)]$，其中 u 叫作中间变量.

注意　并不是任意两个函数都能复合；复合函数还可以由更多函数构成.

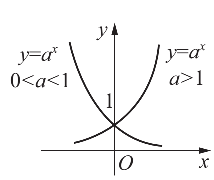
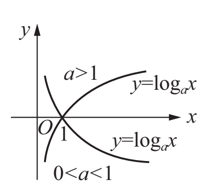
例如：函数 $y=\arcsin u$ 与函数 $u=2+x^2$ 是不能复合成一个函数的.

因为对于 $u=2+x^2$ 的定义域$(-\infty,+\infty)$中的任何 x 值所对应的 u 值(都大于或等于 2)，$y=\arcsin u$ 都没有定义.

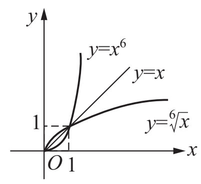
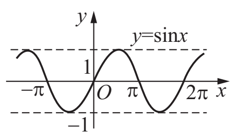
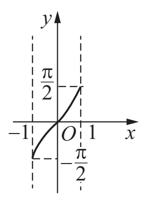
六、初等函数

(1)基本初等函数：我们最常用的基本初等函数有五种，分别是：指数函数、对数函数、幂函数、三角函数及反三角函数.下面我们用表 1-2 来把它们总结一下.

表 1-2

函数名称	函数的形式	函数的图形	函数的性质
指数函数	$y=a^x(a>0,a\neq1)$		(a)不论 x 为何值，y 总为正数； (b)当 $x=0$ 时，$y=1$
对数函数	$y=\log_a x(a>0,a\neq1)$		(a)其图形总位于 y 轴右侧，并过(1,0)点； (b)当 $a>1$ 时，在区间(0,1)的值为负；在区间$(1,+\infty)$的值为正；在定义域内单调增

续表

函数名称	函数的形式	函数的图形	函数的性质
幂函数	$y=x^a$（a 为任意实数）	 这里只画出部分函数图形	令 $a=\frac{m}{n}$， (a)当 m 为偶数 n 为奇数时，y 是偶函数； (b)当 m,n 都是奇数时，y 是奇函数； (c)当 m 为奇数 n 为偶数时，y 在 $(-\infty,0)$ 无意义
三角函数	$y=\sin x$（正弦函数） （这里只写出了正弦函数）		(a)正弦函数是以 2π 为周期的周期函数； (b)正弦函数是奇函数，且 $\lvert\sin x\rvert\leqslant 1$
反三角函数	$y=\arcsin x$（反正弦函数） （这里只写出了反正弦函数）		由于此函数为多值函数，因此我们将此函数值限制在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上，并称其为反正弦函数的主值

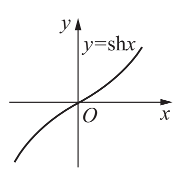
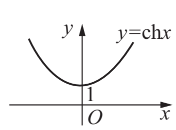
(2)初等函数：由基本初等函数与常数经过有限次的有理运算及有限次的函数复合所产生并且能用一个解析式表示出的函数称为初等函数.

例如：$y=2\cos x+\ln(\sqrt[3]{4^{3x}+3}+\sin 8x)$ 是初等函数.

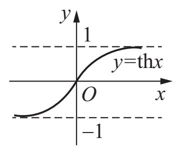
七、双曲函数及反双曲函数

(1)双曲函数(表 1-3)：

表 1-3

函数的名称	函数的表达式	函数的图形	函数的性质
双曲正弦	$\operatorname{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$		(a)其定义域为 $(-\infty,+\infty)$； (b)奇函数； (c)在定义域内单调增
双曲余弦	$\operatorname{ch}x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$		(a)其定义域为 $(-\infty,+\infty)$； (b)偶函数； (c)其图像过点 $(0,1)$

续表

函数的名称	函数的表达式	函数的图形	函数的性质
双曲正切	$\mathrm{th}x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$		(a)其定义域为$(-\infty,+\infty)$； (b)奇函数； (c)其图形夹在水平直线 $y=1$ 及 $y=-1$ 之间；在定义域内单调增

我们再来对比一下双曲函数与三角函数的性质(表 1-4)：

表 1-4

双曲函数的性质	三角函数的性质
$\mathrm{sh}0=0,\mathrm{ch}0=1,\mathrm{th}0=0$	$\sin 0=0,\cos 0=1,\tan 0=0$
$\mathrm{sh}x$ 与 $\mathrm{th}x$ 是奇函数，$\mathrm{ch}x$ 是偶函数	$\sin x$ 与 $\tan x$ 是奇函数，$\cos x$ 是偶函数
$\mathrm{ch}^2x-\mathrm{sh}^2x=1$	$\sin^2x+\cos^2x=1$
都不是周期函数	都是周期函数

双曲函数也有和差公式：

$\mathrm{sh}(x\pm y)=\mathrm{sh}x\,\mathrm{ch}y\pm\mathrm{ch}x\,\mathrm{sh}y.$

$\mathrm{ch}(x\pm y)=\mathrm{ch}x\,\mathrm{ch}y\pm\mathrm{sh}x\,\mathrm{sh}y.$

$\mathrm{th}(x\pm y)=\dfrac{\mathrm{th}x\pm\mathrm{th}y}{1\pm\mathrm{th}x\,\mathrm{th}y}.$

(2)反双曲函数：双曲函数的反函数称为反双曲函数.

①反双曲正弦函数：

$\mathrm{arsh}x=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$，其定义域为$(-\infty,+\infty)$；

②反双曲余弦函数：

$\mathrm{arch}x=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$，其定义域为$[1,+\infty)$；

③反双曲正切函数：

$\mathrm{arth}x=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$，其定义域为$(-1,1)$.

八、集合

一般地，我们把研究对象统称为元素，把一些元素组成的总体称为集合(简称集).集合具有确定性(给定集合的元素必须是确定的)和互异性(给定集合中的元素是互不相同的).比如“身材较高的人”不能构成集合，因为它的元素不是确定的.

我们通常用大写英文字母 $A,B,C,\cdots$ 表示集合，用小写英文字母 $a,b,c,\cdots$ 表示集合中的元素.如

果 a 是集合 A 中的元素，就说 a 属于 A，记作 $a\in A$，否则就说 a 不属于 A，记作 $a\notin A$.

(1)全体非负整数组成的集合叫作非负整数集(或自然数集)，记作 $\mathbf{N}$.

(2)所有正整数组成的集合叫作正整数集，记作 $\mathbf{N}^*$ 或 $\mathbf{N}_+$.

(3)全体整数组成的集合叫作整数集，记作 $\mathbf{Z}$.

(4)全体有理数组成的集合叫作有理数集，记作 $\mathbf{Q}$.

(5)全体实数组成的集合叫作实数集，记作 $\mathbf{R}$.

1.集合的表示方法

(1)列举法：把集合的元素一一列举出来，并用“{　}”括起来表示集合.

(2)描述法：用集合所有元素的共同特征来表示集合.

2.集合间的基本关系

(1)子集：一般地，对于两个集合 A，B，如果集合 A 中的任意一个元素都是集合 B 的元素，我们就说 A，B 有包含关系，称集合 A 为集合 B 的子集，记作 $A\subseteq B$(或 $B\supseteq A$).

(2)相等：如果集合 A 是集合 B 的子集，且集合 B 也是集合 A 的子集，此时集合 A 中的元素与集合 B 中的元素完全一致，因此集合 A 与集合 B 相等，记作 $A=B$.

(3)真子集：如果集合 A 是集合 B 的子集，且至少存在一个元素属于 B 但不属于 A，我们称集合 A 是集合 B 的真子集.

(4)空集：我们把不含任何元素的集合叫作空集，记作 $\varnothing$，并规定空集是任何集合的子集.

(5)由上述集合之间的基本关系，可以得到下面的结论：

①任何一个集合是它本身的子集，即 $A\subseteq A$.

②对于集合 A，B，C，如果 A 是 B 的子集，B 是 C 的子集，则 A 是 C 的子集.

③我们可以把相等的集合叫作“等集”.这样，子集包括“真子集”和“等集”.

3.集合的基本运算

(1)并集：一般地，由所有属于集合 A 和属于集合 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的并集，记作 $A\cup B$.

即 $A\cup B=\{x\,|\,x\in A$ 或 $x\in B\}$.

(2)交集：一般地，由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的交集，记作 $A\cap B$.

即 $A\cap B=\{x\,|\,x\in A$ 且 $x\in B\}$.

(3)补集：

①全集：一般地，如果一个集合含有我们所研究问题中涉及的所有元素，那么就称这个集合为全集，通常记作 U.

②补集：对于一个集合 A，由全集 U 中不属于集合 A 的所有元素组成的集合称为集合 A 相对于全集 U 的补集，简称为集合 A 的补集，记作 $\complement_U A$.

即 $\complement_U A=\{x\,|\,x\in U$ 且 $x\notin A\}$.

4.集合中元素的个数

(1)有限集及无限集:我们把含有有限个元素的集合叫作有限集,含有无限个元素的集合叫作无限集.

(2)用 card 来表示有限集中元素的个数.例如 $A=\{a,b,c\}$,则 $\text{card}(A)=3$.

(3)一般地,对任意两个集合 A,B,有 $\text{card}(A)+\text{card}(B)=\text{card}(A\cup B)+\text{card}(A\cap B)$.

试一试

1.学校里开运动会,设 $A=\{x|x$ 是参加 100 米跑的同学$\}$,$B=\{x|x$ 是参加 200 米跑的同学$\}$,$C=\{x|x$ 是参加 400 米跑的同学$\}$.学校规定,每个参加上述比赛的同学最多只能参加两项,请你用集合的运算说明这项规定,并解释以下集合运算的含义:(1)$A\cup B$;(2)$A\cap B$.

2.在平面直角坐标系中,集合 $C=\{(x,y)|y=x\}$表示直线 $y=x$,从这个角度看,集合 $D=\{(x,y)|2x-y=1,x+4y=5\}$表示什么? 集合 C,D 之间有什么关系? 请分别用集合语言和几何语言说明这种关系.

3.已知集合 $A=\{x|1\leqslant x\leqslant 3\}$,$B=\{x|(x-1)(x-a)\leqslant 0\}$.试判断:$B$ 是不是 A 的子集? 是否存在实数 a 使 $A=B$ 成立?

4.对于有限集合 A,B,C,能不能找出这三个集合中元素个数与交集、并集元素个数之间的关系呢?

5.无限集合 $A=\{1,2,3,4,\cdots,n,\cdots\}$,$B=\{2,4,6,8,\cdots,2n,\cdots\}$,你能设计一种比较这两个集合中元素个数多少的方法吗?

第二节 极 限

基础知识

一、数列的极限

如果按照某一法则,对每个 $n\in\mathbf{N}^+$,对应着一个确定的实数 x_n,这些实数 x_n 按照下标 n 从小到大排列得到的一个序列

$$x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n,\cdots,$$

就叫作数列,简记为数列$\{x_n\}$.

数列中的每一个数叫作数列的项,第 n 项 x_n 叫作数列的一般项.

定义　设$\{x_n\}$为一数列，如果存在常数a，对于任意给定的正数ε(不论多么小)，总存在正整数N，使得当$n>N$时，不等式

$$|x_n-a|<\varepsilon,$$

都成立，那么就称常数a是数列$\{x_n\}$的极限，或者称数列$\{x_n\}$收敛于a，记作

$$\lim_{x\to\infty}x_n=a \text{ 或 } x_n\to a(n\to\infty),$$

其中上式中的“→”读作“趋于”，并称数列$\{x_n\}$是收敛的；若数列$\{x_n\}$没有极限，则称数列$\{x_n\}$是发散的.

注　上面定义中的正数ε可以任意给定很重要，因为只有这样，不等式$|x_n-a|<\varepsilon$才能表达出x_n无限接近a的意思.此外还应注意到：定义中的正整数N是与任意给定的正数ε有关的，它随着ε的给定而选定.

我们给“数列$\{x_n\}$的极限为a”一个几何解释.

将常数a及数列$x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$，在数轴上用它们对应的点表示出来，再在数轴上做点$a$的$\varepsilon$邻域即开区间$(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$.

因不等式$|x_n-a|<\varepsilon$与不等式$a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon$等价，所以当$n>N$时，所有的点$x_n$都落在$(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$内，而只有有限个(至多只有$N$个)在这区间以外.

为了表达方便，引入符号“$\forall$”表示“对于任意给定的”或“对于每一个”，符号“$\exists$”表示“存在”.于是“对于任意给定的$\varepsilon>0$”写成“$\forall\varepsilon>0$”，“存在正整数N”写成“$\exists$正整数N”，数列极限$\lim\limits_{x\to\infty}x_n=a$的定义可表达为：

$$\lim_{x\to\infty}x_n=a\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\text{正整数 }N,\text{当 }n>N\text{ 时，有 }|x_n-a|<\varepsilon\text{(图 1-3)}.$$

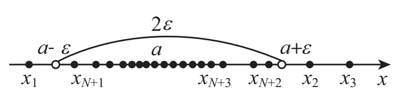


图 1-3

二、函数的极限

数列是定义于正整数集合上的函数，现在我们讨论定义于实数集合上的函数$y=f(x)$的极限.我们根据自变量不同的变化趋势，分别给出函数极限的定义.

1.当$x\to\infty$时，函数的极限

由反比例函数$y=\dfrac{1}{x}$的图像(图 1-4)可以看出，x轴是曲线的一条渐近线，也就是说当自变量x的绝对值无限增大时，相应的函数值y无限逼近常数0，我们就说：当$x\to\infty$时，函数$y=\dfrac{1}{x}$的极限是0.

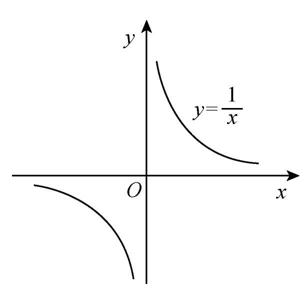


图 1-4

由此我们给出$x\to\infty$时，函数极限的定义.

定义　设函数$f(x)$当$|x|$大于某一正数时有定义，如果存在常数A，对于任意给定的正数ε(不论它多么小)，总存在正数X，使得当x满足不等式$|x|>X$时，对应的函数值$f(x)$都满足不等式

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称 A 为当 $x\to\infty$ 时 $f(x)$ 的极限，记为

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to\infty).$$

上述定义可简单表示为：

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0\ \exists X>0$，当 $|x|>X$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

从几何上来讲，$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 的意义是：作直线 $y=A-\varepsilon$ 和 $y=A+\varepsilon$，则总有一个正数 $X>0$ 存在，使得当 $|x|>X$ 时，函数 $y=f(x)$ 的图形位于这两直线之间.这时，直线 $y=A$ 是函数 $y=f(x)$ 的图形的水平渐近线.

2.当 $x\to+\infty$ 或 $x\to-\infty$ 时，函数 $f(x)$ 的极限

有时我们还需要区分 x 趋于无穷大的情况，如果 x 从某一时刻起，往后总是取正值且无限增大，则称 x 趋于正无穷大，记作：$x\to+\infty$，此时定义中 $|x|>X$ 可改写成 $x>X$，就可得 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 的定义；如果 x 从某一时刻起，往后总取负值且 $-x$ 无限增大，则称 x 趋于负无穷大，记作：$x\to-\infty$，此时定义中的 $|x|>X$ 可改写成 $-x>X$，同样可得 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$ 的定义.

我们考察反正切函数 $f(x)=\arctan x$ 的图像，如图 1-5 所示.

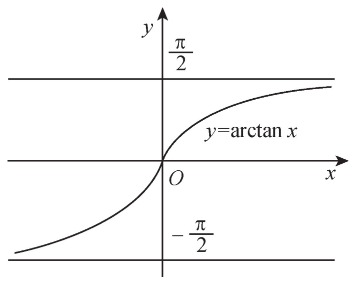


图 1-5

从图 1-5 可以看出，当 $x\to+\infty$ 时，函数 $f(x)=\arctan x$ 的值无限逼近于常数 $\frac{\pi}{2}$；而当 $x\to-\infty$ 时，函数 $f(x)=\arctan x$ 的值无限逼近于常数 $-\frac{\pi}{2}$.

当 $x\to\infty$，$x\to+\infty$，$x\to-\infty$ 时，由函数 $f(x)$ 的极限的定义，得到下面的定理.

定理　$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 的充分必要条件是

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}f(x)=A.$$

3.当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限

下面我们考察函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$，当 $x\to1$ 时函数值的变化情况，如图 1-6 所示.

由图可以看出，当 x 从 1 的左右两侧同时趋近于 1 时，$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 的值无限逼近常数 2，对于函数的这种变化趋势，有下面的定义：

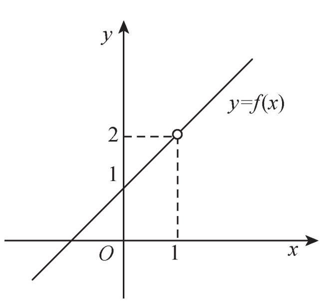


图 1-6

定义　设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 内有定义，如果存在常数 A，对于任意给定的正数 ε（不论它多么小），总存在正数 δ，使得当 x 满足不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称 A 为 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限，记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A,(x\to x_0).$$

根据定义,上面的极限可记为:$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$.

注 (1)极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$表示的是自变量$x$与$x_0$无限接近($x\neq x_0$)时,相应的函数值$f(x)$的一种变化趋势:无限逼近常数$A$,或者换个说法,当$|x-x_0|$趋近0时,有$|f(x)-A|$无限逼近0.因此,讨论$x\to x_0$时,函数$f(x)$的极限,取决于$x_0$邻近的$x(x\neq x_0)$处的函数值$f(x)$,而与$x=x_0$时$f(x)$是否有定义或怎样定义无关.

(2)从几何上来讲,$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$的意义是:任意给定正数$\varepsilon$,作直线$y=A-\varepsilon$和$y=A+\varepsilon$,介于两直线之间的是一条横区域.根据定义,对于给定的ε,存在点x_0的一个δ邻域$(x_0-\delta,x_0+\delta)$内,当$y=f(x)$的图形上的点的横坐标在x邻域$(x_0-\delta,x_0+\delta)$内,但$x\neq x_0$时,这些点的纵坐标$f(x)$满足不等式

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

或

$$A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon.$$

4.当$x\to x_0^+$或$x\to x_0^-$时,函数$f(x)$的左极限与右极限

有时候,我们需要考虑x只从x_0的左侧趋近于x_0,记作$x\to x_0^-$,或x只从x_0右侧趋近于x_0,记作$x\to x_0^+$时,函数值的变化趋势,由此,我们给出当$x\to x_0^-$或$x\to x_0^+$时,函数单侧极限的定义:

定义 设在x_0的某个左半邻域$(x_0-\delta,x_0)$(或者右半邻域$(x_0,x_0+\delta)$)内函数$f(x)$有定义,如果存在常数A,对于任意给定的正数ε(不论它多么小),总存在正数δ,使得当x满足不等式$x_0-\delta<x<x_0$($x_0<x<x_0+\delta$)时,对应的函数值$f(x)$都满足不等式

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称A为函数$f(x)$在x_0处的左极限(或右极限),记作

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A(\text{或}\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A),$$

左极限与右极限统称为单侧极限.

定理 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$的充分必要条件是

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A.$$

5.函数极限的性质

由于函数极限的定义按自变量的变化过程不同有不同的形式,前面学过的数列的性质和下面函数的性质类似.

下面仅以“$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$”这种形式为代表给出关于极限性质的一些定理,并就其中几个给出证明.

性质1 (函数极限的唯一性)如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在,那么这极限唯一.

性质2 (函数极限的局部有界性)如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,那么存在常数$M>0$和$\delta>0$,使得当$0<|x-x_0|<\delta$时,有$|f(x)|\leqslant M$.

证　因为$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，所以取 $\varepsilon=1$，则 $\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有

$$|f(x)-A|<1\Rightarrow|f(x)|\leqslant|f(x)-A|+|A|<|A|+1.$$

记 $M=|A|+1$，则性质 2 获得证明.

性质 3　(函数极限的局部保号性)如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，且 $A>0$(或 $A<0$)，那么存在常数 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $f(x)>0$(或 $f(x)<0$).

证　就 $A>0$ 的情形证明.

因为$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A>0$，所以，取 $\varepsilon=\dfrac{A}{2}>0$，则 $\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有

$$|f(x)-A|<\frac{A}{2}\Rightarrow f(x)>A-\frac{A}{2}=\frac{A}{2}>0,$$

类似地可以证明 $A<0$ 的情形.

从性质 3 的证明中可知，在性质 3 的条件下，可得下面更强的结论：

性质 3′　如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A(A\neq 0)$，那么就存在着 x_0 的某一去心邻域 $U(\hat{x}_0,\delta)$，当 $x\in U(\hat{x}_0,\delta)$ 时，就有 $|f(x)|>\dfrac{A}{2}$.

由性质 3 可得以下推论：

推论　如果在 x_0 的某一去心邻域内 $f(x)\geqslant 0$(或 $f(x)\leqslant 0$)，而且$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，那么$A\geqslant 0$(或 $A\leqslant 0$).

三、无穷小量与无穷大量

(一)无穷小量

1.无穷小量的定义

定义　极限为零的变量称为无穷小量，简称无穷小.

特别地，以零为极限的数列$\{x_n\}$称为 $n\to\infty$时的无穷小.

由定义可知当 $x\to 0$ 时，x，$\tan x$ 等，都是无穷小；当 $x\to\infty$时，$\dfrac{1}{x}$，$\dfrac{1}{x^2}$等也是无穷小.

注意　(1)零是唯一的可以看作无穷小的常数.

(2)不要把无穷小与很小的数混为一谈.因为无穷小是这样的函数，在 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)的过程中，这函数的绝对值能小于任意给定的正数 ε，而很小的数如百万分之一，就不能小于给定的正数 ε(可以取千万分之一).

(3)一般来说，无穷小是相对于自变量的某个变化趋势而言的.

例如，$\dfrac{1}{x}$当 $x\to\infty$时为无穷小，但当 $x\to 1$ 时它不是无穷小.

2.极限与无穷小之间的关系

定理　$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的充要条件是 $f(x)=A+\alpha(x)$，其中 $\alpha(x)$当 $x\to x_0$ 时为无穷小.

证 先证必要性.设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,则$\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta>0$,使当$0<|x-x_0|<\delta$时,有

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

令$\alpha(x)=f(x)-A$,则$\alpha(x)$是当$x\to x_0$时的无穷小,且

$$f(x)=A+\alpha(x),$$

这就证明了$f(x)$等于它的极限A与一个无穷小$\alpha(x)$之和.

再证充分性.设$f(x)=A+\alpha(x)$,其中A是常数,$\alpha(x)$当$x\to x_0$时为无穷小,于是$|f(x)-A|=|\alpha(x)|$,因为$\alpha(x)$当$x\to x_0$时为无穷小,所以$\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta>0$,使当$0<|x-x_0|<\delta$时,有

$$|\alpha(x)|<\varepsilon,$$

即

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

这就证明了A是$f(x)$当$x\to x_0$时的极限.

注 定理中自变量的变化过程换成其他任何一种情形$x\to 0^+$,$x\to 0^-$,$x\to\infty$,$x\to+\infty$,$x\to-\infty$,结论仍成立.

3.无穷小量的性质

对于无穷小量,它们具有如下的性质:

性质1 有限个无穷小的代数和还是无穷小.

证 考虑两个无穷小的和.

设α及β是当$x\to x_0$时的两个无穷小,而

$$\gamma=\alpha+\beta,$$

$\forall\varepsilon>0$因为α是$x\to x_0$时的无穷小,对于$\frac{\varepsilon}{2}>0$,$\exists\delta_1>0$,当$0<|x-x_0|<\delta_1$时,不等式

$$|\alpha|<\frac{\varepsilon}{2}$$

成立.又因β是$x\to x_0$时的无穷小,对于$\frac{\varepsilon}{2}>0$,$\exists\delta_2>0$,当$0<|x-x_0|<\delta_2$时,不等式

$$|\beta|<\frac{\varepsilon}{2}$$

成立.取$\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$,则当$0<|x-x_0|<\delta$时,

$$|\alpha|<\frac{\varepsilon}{2}\text{及}|\beta|<\frac{\varepsilon}{2}$$

同时成立,从而$|\gamma|=|\alpha+\beta|\leqslant|\alpha|+|\beta|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$.这就证明了$\gamma$也是$x\to x_0$的无穷小.

有限个无穷小之和的情形可以同样证明.

性质2 有界量与无穷小的乘积还是无穷小.

证 设函数u在某一去心邻域$\mathring{U}(x_0,\delta_1)$内是有界的,即$\exists M>0$使$|u|\leqslant M$对一切$x\in\mathring{U}(x_0,\delta_1)$成立.又设$\alpha$是当$x\to x_0$时的无穷小,即$\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta_2>0$,使当$0<|x-x_0|<\delta_2$,即当$x\in\mathring{U}(x_0,\delta_2)$时,有

$$|\alpha|<\frac{\varepsilon}{M}$$

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，则当 $x\in U(\hat{x}_0,\delta)$ 时，

$$|u|\leqslant M \text{ 及 } |\alpha|<\frac{\varepsilon}{M}$$

同时成立.从而

$$|u\alpha|=|u||\alpha|<M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon.$$

这就证明了 $u\alpha$ 是当 $x\to x_0$ 时的无穷小.

推论 1　常数与无穷小的乘积还是无穷小.

性质 3　有限个无穷小的乘积还是无穷小.

注　(1)无穷多个无穷小的和未必是无穷小.如 $x\to\infty$ 时，$\frac{1}{x^2},\frac{2}{x^2},\cdots,\frac{x}{x^2}$ 都是无穷小，但 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^2}+\cdots+\frac{x}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x(x+1)}{2x^2}=\frac{1}{2}$.

(2)两个无穷小的商未必是无穷小.如 $x\to 0$ 时，$x,2x,x^2$ 都是无穷小，由 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{x}=2$ 可知，当 $x\to 0$ 时，$\frac{2x}{x}$ 不是无穷小.但由 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{x}=0$ 可知，当 $x\to 0$ 时，$\frac{x^2}{x}$ 是无穷小.

4.无穷小量的比较

定义　设当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 和 $g(x)$ 都是无穷小，

(1)如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=0$，则称 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的高阶无穷小(也称 $g(x)$ 为 $f(x)$ 的低阶无穷小)，记作 $f(x)=o(g(x))(x\to x_0)$.

(2)如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=C$ ($C\neq 0$ 为常数)，则称 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的同阶无穷小.

(3)如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g^k(x)}=C$ ($C\neq 0$ 为常数，$k>0$)，则称 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的 k 阶无穷小.

(4)特别地，如果当 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=1$ 时，则称 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是等价的无穷小，记作 $f(x)\sim g(x)(x\to x_0)$.

关于等价无穷小，我们有如下的一个定理，此定理在极限的计算中经常会遇到.

定理　设 $f(x)\sim\alpha(x)$，$g(x)\sim\beta(x)$，当 $x\to x_0$ 时，且 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ 存在，则有

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}.$$

下列几组无穷小是等价的：

$\sin x \sim x(x\to 0)$；$1-\cos x\sim \frac{1}{2}x^2(x\to 0)$；$\tan x\sim x(x\to 0)$；$\sqrt{1+x}-1\sim \frac{1}{2}x(x\to 0)$；$e^x-1\sim x(x\to 0)$；$\ln(1+x)\sim x(x\to 0)$.

利用等价无穷小的性质，在求极限时，分子、分母的无穷小因子可用它们相应的等价无穷小代换，从而达到简化计算的目的，这种方法叫作等价无穷小代换法.

(二)无穷大量

定义 设函数 $f(x)$在 x_0 的某一去心邻域内有定义(或$|x|$大于某一正数时有定义).如果对于任意给定的正数 M(无论多大)，总存在正数 δ(或正数 X)，只要适合不等式$0<|x-x_0|<\delta$(或$|x|>X$)，对应的函数值 $f(x)$总满足不等式

$$|f(x)|>M,$$

则称函数 $f(x)$为当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的无穷大.

例如，函数 $f(x)$是 $x\to x_0$ 时的无穷大，记作$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$；函数 $f(x)$是 $x\to\infty$时的正无穷大，记作$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=+\infty$；函数 $f(x)$是 $x\to x_0^+$ 时的负无穷大，记作$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=-\infty$.

注 (1)无穷大量必定是变量，绝对值再大的常数也不是无穷大量.

(2)无穷大量是极限不存在的一种情形，我们只是借用极限的符号：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$，表示“当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$是无穷大量”.

(3)无穷大量和无界量是两个不同的概念，无穷大量必定是无界量，但是无界量未必是无穷大量，如 $y=x\sin x$(当 $x\to\infty$时).

(三)无穷大量与无穷小量的关系

定理 如果函数 $f(x)$在自变量 x 的某一变化过程中是无穷大量，则在同一变化过程中$\frac{1}{f(x)}$为无穷小量；反之，在自变量 x 的某一过程中，如果 $f(x)(f(x)\neq 0)$为无穷小量，则在同一变化过程中，$\frac{1}{f(x)}$为无穷大量.

证 设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$，$\forall\varepsilon>0$，根据无穷大的定义，对于 $M=\frac{1}{\varepsilon}$，$\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有

$$|f(x)|>M=\frac{1}{\varepsilon},$$

即

$$\left|\frac{1}{f(x)}\right|<\varepsilon,$$

所以$\frac{1}{f(x)}$为当 $x\to x_0$ 时的无穷小.

反之，设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$ 且 $f(x)\neq 0$.

$\forall M>0$，根据无穷小的定义，对于 $\varepsilon=\dfrac{1}{M}$，$\exists\,\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有

$$|f(x)|<\varepsilon=\frac{1}{M},$$

由于当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时 $f(x)\neq 0$，从而

$$\left|\frac{1}{f(x)}\right|>M,$$

所以$\dfrac{1}{f(x)}$为当 $x\to x_0$ 时的无穷大.

类似地可证当 $x\to\infty$的情形.

四、极限的运算法则

定理　设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$，则有

(1)$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A\pm B$.

(2)$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A\cdot B$.

(3)$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}=\dfrac{A}{B}$(其中$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)\neq 0$).

此定理称为极限的四则运算法则.

推论 1　如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，$c$ 为常数，则$\lim\limits_{x\to x_0}(cf(x))=c\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$.

推论 2　如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，$n\in\mathbf{N}$，则$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^n=[\lim\limits_{x\to x_0}f(x)]^n$.

注　(1)以上法则对自变量的其他另外几种变化过程也成立.

(2)法则要求 $f(x)$，$g(x)$的极限分别存在.

(3)定理中的法则(1)、(2)可以推广到任意有限个函数的情形，如

$$\lim_{x\to x_0}[f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_n(x)]=\lim_{x\to x_0}f_1(x)+\lim_{x\to x_0}f_2(x)+\cdots+\lim_{x\to x_0}f_n(x).$$

定理　(复合函数的极限运算法则)设函数 $y=f[g(x)]$是由函数 $u=g(x)$与函数 $y=f(u)$复合而成，$y=f[g(x)]$在点 x_0 的某去心邻域内有定义，若$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=u_0$，$\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$，且存在 $\delta_0>0$，当 $x\in \mathring{U}(x_0,\delta_0)$时，有 $g(x)\neq u_0$，则

$$\lim_{x\to x_0}f[g(x)]=\lim_{u\to u_0}f(u)=A.$$

证　略.

五、两个重要极限公式

1. 极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

证明 因为函数$\dfrac{\sin x}{x}$是偶函数，所以，只要证明$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin x}{x}=1$即可.

如图1-7所示.

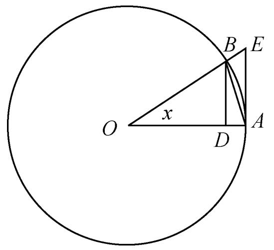


图1-7

设⊙O为单位圆，$0<x<\dfrac{\pi}{2}$，对于圆心角$x=\angle BOA$，有$\sin x=BD$，$\cos x=OD$，$\tan x=EA$及$x=$弧AB.当$x\to 0$时，$BD\to 0$，$OD\to 1$，即

$$\lim_{x\to 0^+}\sin x=0,\ \lim_{x\to 0^+}\cos x=1,$$

又因为$0<x<\dfrac{\pi}{2}$，则有

$$S_{\triangle OAB}<S_{扇OAB}<S_{\triangle OAE}$$

即有

$$\frac{1}{2}BD<\frac{1}{2}x<\frac{1}{2}EA,$$

$$\sin x<x<\tan x,$$

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x},$$

即

$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1.$$

又因为$\cos x$和$\dfrac{\sin x}{x}$均为偶函数，上例中不等式对于$-\dfrac{\pi}{2}<x<0$仍然成立，令$x\to 0$，由准则1得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1. \tag{1}$$

重要极限(1)式在极限计算中有重要应用，它在形式上有以下特点：

(1)它是“$\dfrac{0}{0}$”型不定式.

(2)公式(1)的形式可写成$\lim\limits_{\square\to 0}\dfrac{\sin\square}{\square}=1$(其中“□”代表同样的变量或者同样的表达式，且当□→0时，□是无穷小量).

(3)公式(1)的变形公式：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1$仍然成立，其形式可写成$\lim\limits_{\square\to 0}\dfrac{\square}{\sin\square}=1$，利用公式(1)，可以解决一些与三角函数有关的极限.

2.极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$

我们先来讨论数列$\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$的极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

记 $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$，得到数列 $\{x_n\}$，先将 x_n 的前几项列于表 1-5 中.

表 1-5

n	1	2	3	4	5	10	100	1000	10000	…
$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	2	2.250	2.370	2.441	2.488	2.594	2.705	2.717	2.718	…

可以证明数列 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ 单调增加且有上界 3，从而由准则 2 可知，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 存在，并记为 e，即

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}.$$

若把 n 换成连续变量 x，则 x 取实数趋向于 $+\infty$ 或 $-\infty$ 时，$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ 的极限也存在，且等于 e，即

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}. \tag{2}$$

在(2)式中，令 $\frac{1}{x}=t$，则 $x\to\infty$ 时，$t\to 0$，可得(2)式的另一种形式

$$\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=\mathrm{e}. \tag{3}$$

上面的(2)、(3)两式有以下共同特点：

(1)它们是“1^∞”型不定式.

(2)公式的形式可以归结为

$$\lim_{\square\to\infty}\left(1+\frac{1}{\square}\right)^{\square}=\mathrm{e} \text{ 或} \lim_{\square\to 0}(1+\square)^{\frac{1}{\square}}=\mathrm{e}.$$

(以上每式的“□”代表同一个变量或相同的表达式)

注　利用上面这个公式我们可以解决一些 1^∞ 型的极限，在运用该公式时，要注意公式的变形.

例题解析

例 1　利用数列极限的定义，证明数列 $2,\frac{1}{2},\frac{4}{3},\frac{3}{4},\cdots,1+(-1)^{n-1}\frac{1}{n},\cdots$ 的极限是 1.

证　$|x_n-a|=\frac{1}{n}$，为了使 $|x_n-a|$ 小于任意给定的正数 ε(设 $\varepsilon<1$)，只要

$$\frac{1}{n}<\varepsilon \text{ 或 } n>\frac{1}{\varepsilon},$$

所以 $\forall\varepsilon>0$，取正整数 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，当 $n>N$ 时，就有

$$\left|1+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}-1\right|<\varepsilon,$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\left[1+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right]=1.$$

例 2 已知 $x_n=\dfrac{(-1)^n}{(n+1)^2}$,证明数列$\{x_n\}$的极限是 0.

证 $|x_n-a|=\dfrac{1}{(n+1)^2}<\dfrac{1}{(n+1)}$,

为了使$|x_n-a|$小于任意给定的正数 ε(设 ε<1),只要

$$\frac{1}{n+1}<\varepsilon \text{ 或 } n>\frac{1}{\varepsilon}-1,$$

所以 $\forall\varepsilon>0$,取正整数 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}-1\right]$,当 $n>N$ 时,就有

$$\left|\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}-0\right|<\varepsilon,$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}=0.$$

注意 在利用数列极限的定义来论证某个数 a 是数列$\{x_n\}$的极限时,重要的是对于任意给定的正数 ε,要能够指出定义中所说的这种正整数 N 确实存在,但没有必要去求最小的 N.如果知道$|x_n-a|$小于某个量,那么当这个量小于 ε 时,$|x_n-a|<\varepsilon$ 当然也成立.若令这个量小于 ε 来定出 N 比较方便的话,就可采用这种方法.例 2 就是这样做的.

在数列$\{x_n\}$中任意抽取无限多项并保持这些项在原数列$\{x_n\}$中的先后次序,这样得到的一个数列称为原数列$\{x_n\}$的子数列(或子列).

设在数列$\{x_n\}$中,第一次抽取 x_{n_1},第二次在 x_{n_1}后抽取 x_{n_2},第三次在 x_{n_2}后抽取 x_{n_3},这样无休止地抽取下去,得到一个数列

$$x_{n_1},x_{n_2},\cdots,x_{n_k},\cdots,$$

这个数列$\{x_{n_k}\}$即是数列$\{x_n\}$的一个子数列.

注意 在子数列$\{x_{n_k}\}$中,一般项 x_{n_k}是第 k 项,而在原数列$\{x_n\}$中却是第 n_k 项.显然$n_k\geqslant k$.

例 3 证明$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

证 $\forall\varepsilon>0$,要证 $\exists X>0$,当$|x|>X$ 时,不等式$\left|\dfrac{1}{x}-0\right|<\varepsilon$ 成立.因这个不等式相当于

$$|x|>\frac{1}{\varepsilon}\text{或}\left|\frac{1}{x}\right|<\varepsilon,$$

由此可知,如果取 $X=\dfrac{1}{\varepsilon}$,那么当$|x|>X$ 时,就有$\left|\dfrac{1}{x}-0\right|<\varepsilon$ 成立,这就证明了

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0.$$

例 4　求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$；　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}$.

解　(1) 因为

$$\lim_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x\to-\infty}\arctan x\neq\lim_{x\to+\infty}\arctan x.$$

所以，由定理可知 $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在.

(2) 因为

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0,$$

所以得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=0.$$

例 5　证明 $\lim\limits_{x\to x_0}c=c$.

证　这里 $|f(x)-A|=|c-c|=0$，因此 $\forall$ 正数 ε，可任取正数 δ，使得当 x 满足不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，能使不等式

$$|f(x)-A|=|c-c|=0<\varepsilon$$

成立.所以 $\lim\limits_{x\to x_0}c=c$.

例 6　证明 $\lim\limits_{x\to1}(2x-1)=1$.

证　由于

$$|f(x)-A|=|2x-1-1|=2|x-1|,$$

为了使 $|f(x)-A|<\varepsilon$，只要

$$|x-1|<\frac{\varepsilon}{2},$$

所以，$\forall\varepsilon>0$ 取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$，则当 x 适合不等式 $0<|x-1|<\delta$ 时，对应的函数值 $f(x)$ 就满足不等式

$$|f(x)-A|=|2x-1-1|=2|x-1|<\varepsilon,$$

从而

$$\lim_{x\to1}(2x-1)=1.$$

例 7　设函数

$$f(x)=\begin{cases}x+2, & -\infty<x<0,\\ x, & 0\leqslant x<1,\\ (x-1)^2+1, & 1\leqslant x<+\infty,\end{cases}$$

试分别讨论当 $x\to0$ 和 $x\to1$ 的极限.

解　容易得出

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}(x+2)=2,$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} x=0,$$

因为 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$，由定理知，极限$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$不存在；

同理

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} x=1,$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}[(x-1)^2+1]=1,$$

因为 $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=1$，由定理知，极限存在且有$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1$.

例 8 自变量 x 在怎样的变化过程中，下列函数为无穷小：

(1) $y=\dfrac{1}{2x-1}$；　　(2) $y=2x-4$；　　(3) $y=a^x\ (a>0, a\neq 1)$.

解 (1) 因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{2x-1}=0$，所以当 $x\to\infty$ 时，$\dfrac{1}{2x-1}$ 为无穷小.

(2) 因为 $\lim\limits_{x\to 2}(2x-4)=0$，所以当 $x\to 2$ 时，$2x-4$ 为无穷小.

(3) $a>1$ 时，当 $x\to-\infty$ 时，a^x 是无穷小；而 $0<a<1$ 时，当 $x\to+\infty$ 时，a^x 是无穷小.

例 9 求极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\tan\dfrac{1}{x}+\sin\dfrac{1}{x}+e^{-x^2}\right)$.

解 当 $x\to\infty$ 时 $\tan\dfrac{1}{x}$，$\sin\dfrac{1}{x}$ 和 e^{-x^2} 都是无穷小，所以由性质 1 可得

$$\lim_{x\to\infty}\left(\tan\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x}+e^{-x^2}\right)=0.$$

例 10 已知$\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0$，求极限$\lim\limits_{x\to 0}\left[g(x)\sin\dfrac{1}{x}\right]$.

解 因为 $\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 1$，所以 $\sin\dfrac{1}{x}$ 是有界函数，并且$\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0$，由性质 2 可得

$$\lim_{x\to 0}\left[g(x)\sin\frac{1}{x}\right]=0.$$

例 11 利用等价无穷小代换法求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-x}-1}{x}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$.

解 (1) 因为 $e^{-x}-1\sim -x$ 当 $x\to 0$ 时，所以有

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{x}=-1.$$

(2) 因为 $\tan x-\sin x=\tan x(1-\cos x)$，当 $x\to 0$ 时，$\tan x\sim x$，$1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{x^2}{2}}{x^3}=\frac{1}{2}.$$

注　在做等价无穷小的代换时，只能对分子或分母整体进行代换，不能对分子或分母的加减项用等价无穷小代换.

例 12　比较下列两组无穷小的阶.

(1)当 $x\to 0$ 时，$\sin x$ 与 $\tan x$；　　(2)当 $x\to+\infty$时，e^{-x} 与 2^{-x}；

(3)当 $x\to 0$ 时，$1-\cos x$ 与 x^2.

解　(1)因为$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\tan x}=\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$，所以，当 $x\to 0$ 时，$\sin x$ 和 $\tan x$ 是等价无穷小.

(2)因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{-x}}{2^{-x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e}{2}\right)^{-x}=0$，所以，当 $x\to+\infty$时，e^{-x} 是 2^{-x} 的高阶无穷小.

(3)因为$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$，所以，当 $x\to 0$ 时，$1-\cos x$ 是 x 的二阶无穷小.

例 13　证明$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}=\infty$.

证　设$\forall M>0$，要使$\left|\dfrac{1}{x-1}\right|>M$，只要$|x-1|<\dfrac{1}{M}$.所以，取$\delta=\dfrac{1}{M}$，则只要 x 适合不等式 $0<|x-1|<\delta=\dfrac{1}{M}$，就有$\left|\dfrac{1}{x-1}\right|>M$.

这就证明了$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}=\infty$.

例 14　自变量在怎样的变化过程中，下列函数为无穷大量：

(1)$y=x$；　(2)$y=\dfrac{1}{x+2}$；　(3)$y=\ln(1-x)$；　(4)$y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$.

解　(1)当 $x\to\infty$时，$\lim\limits_{x\to\infty}x=\infty$，所以 $x\to\infty$时，x 是无穷大量.

(2)当 $x\to-2$ 时，$\dfrac{1}{x+2}\to\infty$，所以 $x\to-2$ 时，$\dfrac{1}{x+2}$是无穷大量.

(3)当 $x\to 1^-$ 或 $x\to-\infty$时，$\ln(1-x)$是无穷大量.

(4)当 $x\to-\infty$时，$(\dfrac{1}{3})^x$ 是无穷大量.

例 15　计算极限$\lim\limits_{x\to 1}(x^2+3x-1)$.

解　由极限运算法则得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}(x^2+3x-1)&=\lim_{x\to 1}x^2+\lim_{x\to 1}3x-\lim_{x\to 1}1\\&=(\lim_{x\to 1}x)^2+\lim_{x\to 1}3x-\lim_{x\to 1}1\\&=1^2+3-1=3.\end{aligned}$$

一般地有

$$\lim_{x\to x_0}(a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n)=a_0x_0{}^n+a_1x_0{}^{n-1}+\cdots+a_n,$$

其中 $f_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$称为 n 次多项式函数.

例 16 计算极限$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+x-2}{x^2-3x+2}$.

解 当$x\to1$时,分母的极限为零,故不能直接用极限的运算法则.但由极限定义知,当$x\to1$时的极限与函数在$x=1$点有无定义没有关系,因而可以先通过分解因式化简后再求极限.

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x-2)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x+2}{x-2}=\frac{\lim\limits_{x\to1}(x+2)}{\lim\limits_{x\to1}(x-2)}=-3.$$

注意 以下解法是错误的:

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{x^2-3x+2}=\frac{\lim\limits_{x\to1}(x^2+x-2)}{\lim\limits_{x\to1}(x^2-3x+2)}=\frac{0}{0}=0.$$

先通过对分子、分母进行因式分解或恒等变形来消去零因子,再求极限,这种方法在求一些“$\dfrac{0}{0}$”型极限时经常用到.由于“$\dfrac{0}{0}$”型的极限可能存在,也可能不存在,因此这种极限也称为不定式(不定型).

例 17 求极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sqrt{x+1}-1}$.

解 此题也是“$\dfrac{0}{0}$”型不定式,但求解时不能直接通过分解因式化简消去零因子,由于分母中含根号,可以先通过“分母有理化”化简,然后再求极限.

$$\lim_{x\to0}\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}=\lim_{x\to0}\frac{x(\sqrt{x+1}+1)}{x+1-1}=\lim_{x\to0}(\sqrt{x+1}+1)=2.$$

例 18 求极限$\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right)$.

解 因为$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x}{x-1}=\infty$,$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2}{x^2-1}=\infty$,所以不能用差的极限的运算法则.先将函数进行通分,化成“$\dfrac{0}{0}$”型不定式,再利用因式分解化简消零因子的方法计算:

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}\right)=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to1}\frac{x+2}{x+1}=\frac{3}{2}.$$

例 19 求极限$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2x-1}{x^2-1}$.

解 当$x\to\infty$时,分子、分母都是无穷大,极限都不存在,所以不能直接用商的极限的运算法则,这种两个无穷大的比“$\dfrac{\infty}{\infty}$”型的极限和“$\dfrac{0}{0}$型”的极限一样,也是不定式.由于分子、分母关于x的最高次幂是x^2,所以,我们可以将分子分母同除以x^2,然后再求极限.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+2x-1}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+2\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}{1-\dfrac{1}{x^2}}=3.$$

一般地有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots b_m}=\lim_{x\to\infty}x^{n-m}\frac{a_0+a_1\cdot\dfrac{1}{x}+\cdots+a_n\cdot\dfrac{1}{x^n}}{b_0+b_1\cdot\dfrac{1}{x}+\cdots+b_m\cdot\dfrac{1}{x^m}}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & m=n,\\ 0, & m>n,\\ \infty, & m<n,\end{cases}$$

这里 $a_0\neq0,b_0\neq0,m,n$ 为正整数.

例 20 求极限 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$.

解 $x\to1$ 时，$x^2-1\to0$，但 $x^2+x\to2(\neq0)$，不能直接用商的极限运算法则，由于该分式倒数的极限值为零，即

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x^2+x}=\frac{1^2-1}{1^2+1}=0,$$

因此，由无穷大和无穷小的关系得：$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+x}{x^2-1}=\infty$，该极限不存在.

例 21 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}\right)$.

解 当 $n\to\infty$ 时，上式是无限项之和，而极限的运算法则仅适应于有限项之和，这时必须先对函数式作适当的变形再求极限.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1\times\left(1-\dfrac{1}{2^{n+1}}\right)}{1-\dfrac{1}{2}}=2.$$

例 22 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}$（其中 a,b 都不为零）.

解

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin ax}{\sin bx}=\lim_{x\to0}\frac{\sin ax}{ax}\cdot\frac{bx}{\sin bx}\cdot\frac{a}{b}$$

$$=\frac{a}{b}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin ax}{ax}\cdot\lim_{x\to0}\frac{bx}{\sin bx}=\frac{a}{b}\cdot1\cdot1=\frac{a}{b}.$$

例 23 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1}{\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}=1\cdot 1=1.$

例 24 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\right)^2\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}.$

例 25 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$.

解 令 $\alpha=\arcsin x$，则 $x=\sin\alpha$，当 $x\to 0$ 时 $\alpha\to 0$，故

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha}{\sin\alpha}=1.$$

例 26 求极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{x}\right)^x$.

解

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1-\frac{3}{x}\right)^{-\frac{x}{3}}\right]^{-3}=e^{-3}.$$

例 27 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln[\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}]=\ln e=1.$

例 28 求极限$\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\cos 2x}$.

解

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\cos 2x}&=\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}\cdot\sin x\cdot\cos 2x}\\&=\lim_{x\to 0}[(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}]^{\sin x\cdot\cos 2x}\\&=e^0=1.\end{aligned}$$

第三节 连 续

基础知识

一、函数连续的概念

定义 设函数 $y=f(x)$在点 x_0 的某个邻域$U(x_0)$内有定义，如果在 x_0 处，当自变量的增量 Δx 趋于零时，对应的函数的增量 Δy 也趋于零，即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0,$$

则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续，点 x_0 称为函数 $f(x)$ 的连续点.

利用增量的定义，我们可以得出函数连续的另一等价定义：

定义 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域 $U(x_0)$ 内有定义，如果函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时极限存在，且等于它在点 x_0 的函数值，即

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0),$$

则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续，点 x_0 称为函数的连续点.

由函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限定义可知，上述定义也可用"$\varepsilon-\delta$"语言表达如下：

函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续 $\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

如果函数 $f(x)$ 在 x_0 有 $\lim\limits_{x\to x^+}f(x)=f(x_0)$（或 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$），则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 右连续（或左连续），记作 $f(x_0{}^+)=f(x_0)$（或 $f(x_0{}^-)=f(x_0)$）.

关于函数的左连续和右连续有下面的一个定理：

定理 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续的充分必要条件是函数 $f(x)$ 在该点左连续且右连续.

如果函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内每一点都连续，则称函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内连续，区间 (a,b) 称为连续区间.如果函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内连续，且该函数在左端点处右连续，在右端点处左连续，则称函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续.

函数 $f(x)$ 在它的定义域内的每一点都连续，则称 $f(x)$ 为连续函数.

从几何直观上，区间上的连续函数的图像是一条不间断的曲线.

二、初等函数的连续性

1.连续函数的和差积商的运算

定理 若函数 $f(x),g(x)$ 都在 x_0 处连续，则函数 $f(x)\pm g(x),f(x)\cdot g(x)$ 也在 x_0 处连续.

定理 若函数 $f(x),g(x)$ 都在 x_0 处连续，$g(x_0)\neq 0$，则在 x_0 处函数 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 也连续.

2.反函数与复合函数的连续性

定理 如果函数 $y=f(x)$ 在某区间上单调增加（或减少）且连续，则它的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 在相应的区间上单调增加（或减少）且连续.

定理 设函数 $u=\varphi(x)$ 在 x_0 处连续且 $u_0=\varphi(x_0)$，函数 $y=f(u)$ 在 u_0 处连续，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在 x_0 处连续.

推论 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0$，函数 $y=f(u)$ 在 u_0 处连续，则

$$\lim_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=f[\lim_{x\to x_0}\varphi(x)].$$

此推论表明，只要复合函数连续则极限符号可以同运算号交换次序.

3.初等函数的连续性

如果函数 $f(x)$ 在一个区间的每一点处都连续，则称 $f(x)$ 在该区间上连续.可以证明：基本初等函

数在其定义域内是连续的;所有初等函数在其定义域内都是连续的.

因此,求初等函数 $f(x)$ 在其定义区间内的点 x_0 处的极限,可以直接用 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ 来求;求初等函数的连续区间就是求定义区间.关于分段函数的连续性,除考虑每一段函数的连续性外,还必须讨论定义域分界点处的连续性.

三、函数的间断点

定义 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的空心邻域内有定义且函数 $f(x)$ 在 x_0 点不连续,则称 x_0 为函数 $f(x)$ 的间断点.

我们从函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续的定义可知,x_0 是函数 $f(x)$ 的间断点,至少属于下列三种情形之一:

(1) $f(x)$ 在点 x_0 处无定义.

(2) 极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在.

(3) $f(x)$ 在 x_0 处有定义且极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在,但 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$.

四、闭区间上连续函数的性质

定理 (最值存在定理)闭区间上的连续函数必能取到最大值和最小值.即若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,则在 $[a,b]$ 上至少存在一点 ξ_1 和一点 ξ_2,对于 $[a,b]$ 上任一点 x,均满足:

$$f(\xi_1)\leqslant f(x)\leqslant f(\xi_2),$$

称 $f(\xi_1)$ 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值,$f(\xi_2)$ 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值.

注 如果定理中"闭区间"和"连续"的条件不具备时,结论可能不成立.如函数 $y=x$ 在开区间 $(0,1)$ 内连续,但它既无最大值也无最小值.

推论 1 (有界定理)闭区间上的连续函数有界.

定理 (介值定理)闭区间上的连续函数必能取到介于最大值和最小值之间的一切值,即函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,c 是介于 $f(x)$ 的最大值 M 和最小值 m 之间的一个值,则至少存在一点 $\xi\in[a,b]$,使得 $f(\xi)=c$.

推论 2 (零点存在定理)若 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,且 $f(a)\cdot f(b)<0$,则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,使得 $f(\xi)=0$.

这个定理也叫作根的存在定理,常用来判断方程是否存在根.

例题解析

例 1 证明函数 $y=\ln x$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内连续.

证 设 x_0 是定义域 $(0,+\infty)$ 内任意一点,当 x 在 x_0 处有增量 Δx 时,对应函数的增量 Δy 为

$$\Delta y=\ln(x_0+\Delta x)-\ln x_0=\ln\frac{x_0+\Delta x}{x_0}=\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x_0}\right),$$

当 $\Delta x\to 0$ 时，$\frac{\Delta x}{x_0}\to 0$，则 $\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x_0}\right)\to 0$，即有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0,$$

所以，由连续的定义可知，函数 $y=\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 内连续.

例 2 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性.

解 因为 $x\to 0$ 时，$x\sin\frac{1}{x}$ 是无穷小，且

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}(x\sin\frac{1}{x})=0=f(0),$$

所以，函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

例 3 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}1+\cos x, & x<\frac{\pi}{2},\\ \sin x, & x\geqslant\frac{\pi}{2}\end{cases}$ 在 $x=\frac{\pi}{2}$ 处的连续性.

解 由于 $f(x)$ 在 $x=\frac{\pi}{2}$ 的左、右表达式不同，所以先讨论函数 $f(x)$ 在 $\frac{\pi}{2}$ 处的左、右连续性.

由于

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}(\sin x)=\sin\frac{\pi}{2}=1=f\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(1+\cos x)=1+\cos\frac{\pi}{2}=1=f\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

所以，函数 $f(x)$ 在 $x=\frac{\pi}{2}$ 处左、右连续，从而在 $x=\frac{\pi}{2}$ 处连续.

例 4 讨论函数 $y=\arcsin x\,(x\in[-1,1])$ 的连续性.

解 由于 $y=\sin x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调增加且连续，由定理得，$y=\sin x$ 的反函数 $x=\arcsin y$ 在 $[-1,1]$ 上连续，因此函数 $y=\arcsin x$ 在 $[-1,1]$ 上连续.

例 5 求极限 $\lim_{x\to\infty}\cos\frac{(x^2-1)\pi}{x^2+1}$.

解 因为 $\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2-1)\pi}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\cdot\pi=\pi$ 且 $y=\cos u$ 在 $u=\pi$ 处连续，所以由推论得

$$\lim_{x\to\infty}\cos\frac{(x^2-1)\pi}{x^2+1}=\cos\left[\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2-1)\pi}{x^2+1}\right]=\cos\pi=-1.$$

例 6 求极限$\lim\limits_{x\to1}\sqrt{3x^2-x+2}$.

解 易知函数 $f(x)=\sqrt{3x^2-x+2}$ 是初等函数，因此有

$$\lim_{x\to1}\sqrt{3x^2-x+2}=\sqrt{3\cdot1^2-1+2}=2.$$

例 7 求极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{\sin 5x}$.

解

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sin 5x}&=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)}{\sin5x(\sqrt{x+4}+2)}\\&=\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin 5x(\sqrt{x+4}+2)}\\&=\frac{1}{5}\lim_{x\to0}\frac{5x}{\sin5x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{x+4}+2}\\&=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(\sqrt{0+4}+2)}=\frac{1}{20}.\end{aligned}$$

例 8 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1}, & x\neq1,\\ 1, & x=1\end{cases}$ 的连续性，并求它的间断点.

解 因为 $x\neq1$ 时，$f(x)=x+1$，所以函数 $f(x)$ 有连续区间 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.

由于$\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}(x+1)=2\neq f(1)$，因此 $x=1$ 是函数 $f(x)$ 的间断点，如图 1-8 所示.

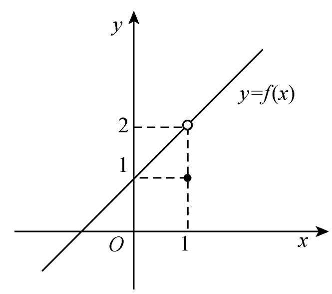


图 1-8

例 9 讨论函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}$ 的连续性，求它的间断点.

解 函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}$ 是初等函数，其定义域 $D=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，因此，函数 $f(x)$ 有连续区间 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. $x=0$ 是它的间断点.

例 10 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}x-2, & x<1,\\ 0, & x=1,\\ x, & x>1\end{cases}$ 的连续性，并求它的间断点.

解 函数图像如图 1-9 所示.

因为 $x>1$ 时，函数 $f(x)=x$ 是连续的；$x<1$ 时，函数 $f(x)=x-2$ 也是连续的，所以，函数 $f(x)$ 有连续区间 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.

由于$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}(x-2)=-1$，$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}x=1$，即左右极限存在但不相等，所以$\lim\limits_{x\to1}f(x)$不存在，$x=1$ 为函数 $f(x)$ 的间断点.

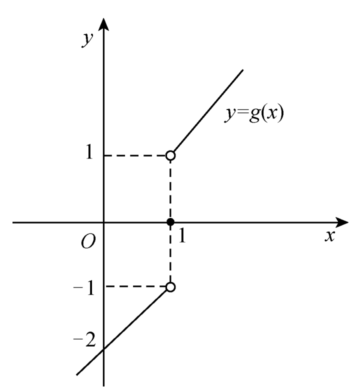


图 1-9

例 11 求正切函数 $y=\tan x$ 的间断点.

解 正切函数为基本初等函数，在定义域内处处连续. 在 $x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 处，$\tan x$ 无意义，且 $\lim\limits_{x\to k\pi+\frac{\pi}{2}}\tan x=\infty$.

因此 $k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 为 $y=\tan x$ 的间断点.

例 12 证明方程 $x^5-3x^3+1=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少有一个根.

证明 令 $f(x)=x^5-3x^3+1$，则 $f(x)$ 显然在 $[0,1]$ 上连续，并且有

$$f(0)=1>0;f(1)=-1<0,$$

则由零点存在定理可知，在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=0$，即

$$\xi^5-3\xi^3+1=0,\xi\in(0,1),$$

这说明方程 $x^5-3x^3+1=0$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个根.

同步练习

一、求极限

1. $\lim\limits_{n\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)$;

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)$;

3. $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x^2}}{\sin x}$;

4. $\lim\limits_{x\to0}(1-2x)^{\frac{3}{\sin x}}$;

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\{(1+n)[\ln(1+n)-\ln n]\}$;

6. $\lim\limits_{x\to0}\frac{(\cos x-1)(e^x-1)}{\ln(1+3x)\arctan x^2}$.

二、若 $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+ax+b}{1-x}=5$，求 a,b 的值.

三、设 $f(x)=\frac{x}{\tan x}$，求 $f(x)$ 的间断点，并说明间断点的类型.

四、设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，证明：至少存在一点 $\xi\in[a,b]$，使得 $f(\xi)=\frac{f(a)+f(b)}{2}$.

参考答案

一、

1. -1　　2. $\frac{1}{2}$　　3. 0　　4. e^{-6}

5. 1　　6. $-\frac{1}{6}$

二、解：$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to1}(x^2+ax+b)=0\Rightarrow b=-1-a\\ \lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+ax-1-a}{1-x}=5\end{array}\right\}\Rightarrow a=-7,b=6.$

三、解：$x=0$ 和 $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ 为可去间断点，$x=k\pi(k\neq 0)$ 为第二类间断点.

四、证明：方法一：(1)当 $f(a)\neq f(b)$ 时，不妨设 $f(a)<f(b)$，则 $f(a)<\frac{f(a)+f(b)}{2}<f(b)$，又 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，满足介值定理的条件，故至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，得 $f(\xi)=\frac{f(a)+f(b)}{2}$.

(2)当 $f(a)=f(b)$ 时，$\frac{f(a)+f(b)}{2}=f(a)=f(b)$，则可取 $\xi=a$ 或 b.

综合(1)(2)得，至少存在一点 $\xi\in[a,b]$，使得 $f(\xi)=\frac{f(a)+f(b)}{2}$.

方法二：因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，所以必取得最大值 M 和最小值 m.

(1)当 $f(a)=f(b)=M$ 时，$\frac{f(a)+f(b)}{2}=M$，则可取 $\xi=a$ 或 b，使得 $f(\xi)=\frac{f(a)+f(b)}{2}$.

(2)当 $f(a)=f(b)=m$ 时，$\frac{f(a)+f(b)}{2}=m$，则可取 $\xi=a$ 或 b，使得 $f(\xi)=\frac{f(a)+f(b)}{2}$.

(3)除(1)(2)外，$m<\frac{f(a)+f(b)}{2}<M$，由介值定理的推论知，至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=\frac{f(a)+f(b)}{2}$.

综合(1)(2)(3)得，至少存在一点 $\xi\in[a,b]$，使得 $f(\xi)=\frac{f(a)+f(b)}{2}$.