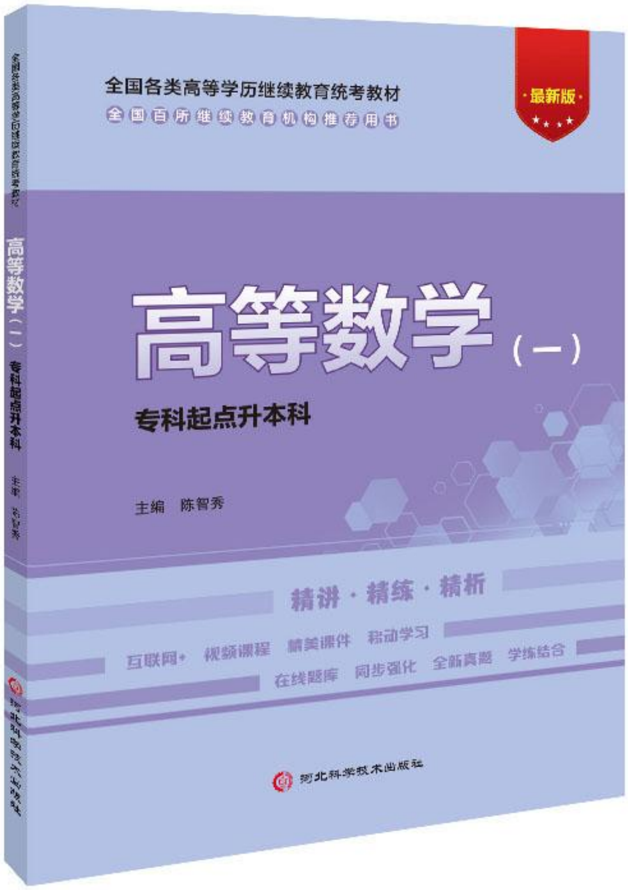
高等学历-高等数学一



类目：高等学历继续教育统考教材
书名：高等学历-高等数学一
主编：陈智秀
出版社： 河北科学技术出版社
开本：大 16 开
书号：978-7-5717-1175-7
使用层次：成人教育
出版时间：2022 年 11 月
定价：42
印刷方式：双色
是否有资源：是

责任编辑：王　宇
责任校对：张京生
美术编辑：张　帆

图书同步精讲课程

-课时多、讲得细、学得快，通过考试更容易-

提升学历就选高等学历继续教育

理论精讲	真题讲练	专题突破	模考训练
明确考情 夯实基础	掌握规律 巩固提升	把握重点 突破难点	模考强化 标准预测

课程说明
本课程视频由一线教师录制。
本课程与最新考试大纲配套。
本课程的学习平台为小书恋学习公众号，扫描右侧二维码观看。

立即扫码
小书恋学习公众号

全国各类高等学历继续教育招生考试备考用书（专科起点升本科）

教材系列
- ○ 政治 ○ 英语 ● 高等数学（一） ○ 高等数学（二）
- ○ 民法 ○ 教育理论 ○ 医学综合 ○ 大学语文
- ○ 艺术概论 ○ 生态学基础

试卷系列
- ○ 政治 ○ 英语 ○ 高等数学（一） ○ 高等数学（二）
- ○ 民法 ○ 教育理论 ○ 医学综合 ○ 大学语文
- ○ 艺术概论 ○ 生态学基础

ISBN 978-7-5717-1175-7
定价：42.00元

全国各类高等学历继续教育统考教材 高等数学（一） 专科起点升本科 主编 陈智秀 河北科学技术出版社

全国各类高等学历继续教育统考教材
全国百所继续教育机构推荐用书

·最新版·

高等数学（一）

专科起点升本科

主编　陈智秀

精讲 · 精练 · 精析

互联网+　视频课程　精美课件　移动学习

在线题库　同步强化　全新真题　学练结合

河北科学技术出版社

全国各类高等学历继续教育统考教材

全国百所继续教育机构推荐用书

高等数学（一）

专科起点升本科

主编　陈智秀

河北科学技术出版社
·石家庄·

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(一) ：专科起点升本科 / 陈智秀主编
. -- 石家庄 ：河北科学技术出版社，2022.9
全国各类高等学历继续教育统考教材 / 张东红主编
ISBN 978-7-5717-1175-7

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①陈… Ⅲ. ①高等数学－成人高等教育－升学参考资料 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2022)第 156613 号

高等数学(一)　专科起点升本科

GAODENG SHUXUE (YI) ZHUANKE QIDIAN SHENG BENKE

主编　陈智秀

出版发行　河北科学技术出版社
地　　址　石家庄市友谊北大街 330 号(邮编:050061)
印　　刷　唐山唐文印刷有限公司
开　　本　880 毫米×1230 毫米　1/16
印　　张　11
字　　数　240 千字
版　　次　2022 年 9 月第 1 版
印　　次　2022 年 9 月第 1 次印刷
定　　价　42.00 元

出版说明

2022年，教育部印发《关于推进新时代普通高等学校学历继续教育改革的实施意见》（以下简称《意见》），要求推进新时代普通高等学校举办的学历继续教育改革发展。《意见》指出普通高等学校举办的学历继续教育统一通过成人高考入学，统一专业教学基本要求，统一最低修业年限，统一毕业证书。为了满足广大考生备考的需要，使其能够顺利通过成人高校统一入学考试，我们组织了有丰富成教经验的一线教师和专家，认真研究了教育部高校学生司和教育部考试中心2020年修订的《全国各类成人高等学校招生复习考试大纲》，并依据2020年版大纲的要求，在把握成人高考命题变化的基础上，精心编写了全国各类高等学历继续教育统考教材。

本系列教材包括：

高中起点升本、专科：《语文》《英语》《数学（文史财经类）》《数学（理工农医类）》《历史地理综合》《物理化学综合》。

专科起点升本科：《政治》《英语》《大学语文》《高等数学（一）》《高等数学（二）》《艺术概论》《民法》《教育理论》《生态学基础》《医学综合》。

在本系列教材的编写过程中，侧重体现如下几个特点：

1.紧扣大纲，时代性强

本系列教材紧扣最新修订的《全国各类成人高等学校招生复习考试大纲》，内容的编排和选择与新大纲的知识系统完全一致，充分体现了新大纲的知识能力要求。在编写过程中，借鉴和吸收基础教育改革的成果，融入新的命题思想和观点，及时适应成人高考的新变化，具有较强的时代性。

2.结构合理，重点突出

本系列教材根据知识的内在联系和考生的认知规律，既坚持了“少而精”的原则，又注重了教材内容的完整性，遵循从简单到复杂、由浅入深、循序渐进的原则进行编排。学习起点低，重点突出，更加有利于考生对学科知识内容的理解，提高复习效率。

3.针对性强，科学实用

本系列教材针对成人高考的实际需要，注重基础知识复习和能力训练，具有较强的针对性和实用性。

本系列教材不仅可供参加全国各类高等学历继续教育统考的考生使用，也适用于高中及以上学历的学生、教师和教研人员学习、参考。

为进一步提高本系列教材的质量，欢迎广大师生提出宝贵意见和建议，以便及时修订，使之日趋完善。

编　者

超高命中,源自精选

命题专家深度解读历年考试真题,对出题内容、题型比例、考查重点、出题形式有独特的把握,在紧密结合考试大纲的基础上,精心提炼核心考点,辅以精选全真试题,准确洞悉命题方向,连续命中原题,一直保持超高命中率!

《高等数学(一)》命中实例

1.设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 可导,$f'(x)>0$,$f(a)f(b)<0$,则 $f(x)$ 在 (a,b) 内零点的个数为(C)(2019 年统考题)

A.3　　B.2　　C.1　　D. 0

2.设 $2x$ 为 $f(x)$ 的一个原函数,则 $f(x)=$(B)(2019 年统考题)

A.0　　B.2　　C. x^2　　D. x^2+C

3.设函数 $y=e^{2x}$,则 $dy=$__________ .(2019 年统考题)

答:$2e^{2x}dx$

4.函数 $f(x)=x^3-12x$ 的极小值点 $x=$__________ .(2019 年统考题)

答:2

5.方程 $y^3+\ln y-x^2=0$ 在点(1,1)的某邻域确定隐函数 $y=y(x)$,则 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1}=$__________.(2020 年统考题)

答:$\frac{1}{2}$

6.求微分方程 $y''-y'-2y=0$ 的通解.(2020 年统考题)

解析:

原方程对应的特征方程为 $r^2-r-2=0$,

解得　$r_1=-1,r_2=2$.

故原方程的通解为 $y=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}$.

说明:由于篇幅所限,命中题目不一一列举,但都在书中以考题的形式出现。

目　录

CONTENTS

第一章　极限和连续

本章要求

极限

(1)理解极限的概念(对极限定义中“ε-N”“ε-δ”“ε-M”等形式的描述不作要求).会求函数在一点处的左极限与右极限,了解函数在一点处极限存在的充分必要条件.

(2)了解极限的有关性质,掌握极限的四则运算法则.

(3)理解无穷小量、无穷大量的概念,掌握无穷小量的性质、无穷小量与无穷大量的关系.会进行无穷小量阶的比较(高阶、低阶、同阶和等价).会运用等价无穷小量代换求极限.

(4)熟练掌握用两个重要极限求极限的方法.

连续

(1)理解函数在一点处连续与间断的概念,理解函数在一点处连续与极限存在的关系,掌握判断函数(含分段函数)在一点处的连续性的方法.

(2)会求函数的间断点.

(3)掌握在闭区间上连续函数的性质,会用介值定理推证一些简单命题.

(4)理解初等函数在其定义区间上的连续性,会利用连续性求极限.

说明:据教育部最新颁布的《全国各类成人高等学校招生复习考试大纲》专科起点升本科高等数学(一)考试大纲规定,去掉函数的概念与性质的相关内容,但极限、连续、导函数等部分还要研究函数的性质.为方便初学者或基础薄弱者更好地学习本教材,我们仍予保留,以供自学之用.

第一节　函　数

基础知识

一、函数的概念

1.函数的定义

定义　设 A,B 都是非空的数的集合,$f:x\rightarrow y$ 是从 A 到 B 的一个对应法则,那么从 A 到 B 的映射

$f:A\to B$ 就叫作**函数**,记作 $y=f(x)$,其中 $x\in A$,$y\in B$,原象集合 A 叫作函数 $f(x)$ 的**定义域**,象集合 B 叫作函数 $f(x)$ 的**值域**.

符号 $y=f(x)$ 即是"y 是 x 的函数"的数学表示,应理解为:x 是**自变量**,它是法则所施加的对象;f 是**对应法则**,它可以是一个或几个解析式,可以是图像、表格,也可以是文字描述;y 是自变量的**函数**,当 x 为允许的某一具体值时,相应的 y 值为与该自变量值对应的函数值,当 f 用解析式表示时,则解析式为函数解析式.$y=f(x)$ 仅仅是函数符号,不是表示"y 等于 f 与 x 的乘积",$f(x)$ 也不一定是解析式.在研究函数时,除用符号 $f(x)$ 外,还常用 $g(x)$,$F(x)$,$G(x)$ 等符号来表示.

由函数的定义可知,函数含有三个要素:定义域 A、值域 B 和对应法则 f.其中核心是对应法则 f,它是函数关系的本质特征.$y=f(x)$ 的意义是:y 等于 x 在法则 f 下的对应值,而 f 是"对应"得以实现的方法和途径,是联系 x 与 y 的纽带,所以是函数的核心.至于用什么字母表示自变量、因变量和对应法则,这是无关紧要的.

函数的定义域(即原象集合)是自变量 x 的取值范围,它是构成函数的一个不可缺少的组成部分.当函数的定义域及从定义域到值域的对应法则完全确定之后,函数的值域也就随之确定了.因此,定义域和对应法则为"y 是 x 的函数"的两个基本条件,缺一不可.只有当两个函数的定义域和对应法则都分别相同时,这两个函数才是同一个函数,这就是说:

(1)定义域不同,两个函数也就不同.

(2)对应法则不同,两个函数也是不同的.

(3)即使是定义域和值域都分别相同的两个函数,它们也不一定是同一函数,因为函数的定义域和值域不能唯一地确定函数的对应法则.

2.函数的表示方法

函数的表示方法有**解析法**、**列表法**和**图像法**.

(1)**解析法**就是把两个变量的函数关系,用一个数学表达式表示出来,这个表达式叫作函数的解析表达式,简称**解析式**.

(2)**列表法**就是列出表格来表示两个变量之间的函数关系.

(3)**图像法**就是用函数的图像表示两个变量之间的函数关系.

3.函数解析表示法中常见的几种形式

(1)**显函数**:由关系式 $y=f(x)$ 确定 y 是 x 的函数,称为**显函数**.

(2)**隐函数**:由方程 $F(x,y)=0$ 确定的函数关系 $y=f(x)$,称为**隐函数**.

注意

并非所有隐函数都可以转化为显函数.

(3)**分段函数**:对于自变量 x 的不同的取值范围,有着不同的对应法则,这样的函数通常叫作**分段函数**.它是一个函数,而不是几个函数.分段函数的定义域是各段函数定义域的并集,值域也是各段函数

值域的并集.

例如:

$$y=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, 0<x<1,\\ x, x\geqslant 1.\end{cases}$$

其表示的含义为:当 $0<x<1$ 时,$y=\dfrac{1}{x}$;当 $x\geqslant 1$ 时,$y=x$.

注 意

(1)分段函数是一个函数,不要把它误认为是几个函数.

(2)分段函数的定义域是各段定义域的并集,值域是各段值域的并集.

(3)分段函数的图像是由几个不同的部分组成,作分段函数的图像时,应根据不同定义域上的不同解析式分别作出.

4.函数的定义域

函数的定义域是指函数有定义的自变量 x 所允许的取值范围,因此求定义域常常是排除那些使函数没有定义的点.

求定义域的三种基本方法:

(1)依据函数解析式中所包含的运算规则(除法、开平方等)对自变量的制约要求,通过解不等式(组)求得定义域.

(2)依据确定函数 $y=f(x)$的对应法则 f 对作用对象的取值范围的制约要求,通过解不等式(组)求得定义域.

(3)根据问题的实际意义,规定自变量的取值范围,求得定义域.

如果函数是由一些基本函数通过四则运算构成的,那么它的定义域是使各个部分都有意义的 x 值组成的集合.对含参数的函数求定义域(或已知定义域,求字母参数的取值范围)时,必须对参数的取值进行讨论.

当函数由实际问题给出时,其定义域由实际问题确定.

二、函数的基本性质

1.奇偶性

设函数 $y=f(x)$在区间 D 内有定义,且 D 关于原点对称,若任取 $x\in D$,有 $f(-x)=f(x)$,则称函数 $y=f(x)$在区间 D 内为**偶函数**.

若任取 $x\in D$,有 $f(-x)=-f(x)$,则称函数 $y=f(x)$在区间 D 内为**奇函数**.

注 意

(1)判断函数定义域 D 关于原点是否对称是判断函数奇偶性的前提条件,因此判断一个函数的奇偶性应首先判断定义域是否关于原点对称,然后求 $f(-x)$.

(2)如果函数 $y=f(x)(x\in D)$ 是奇函数,那么 $y=f(x)$ 的图像关于原点为中心对称.如果函数 $y=f(x)(x\in D)$ 为偶函数,那么 $y=f(x)$ 的图像关于 y 轴对称.

(3)常数函数 $f(x)=c(x\in \mathbf{R})$ 一定是偶函数;若 $c=0$,则 $f(x)$ 既是偶函数又是奇函数.

(4)偶函数与偶函数的和函数是偶函数,奇函数与奇函数的和函数是奇函数;偶函数与偶函数的积函数是偶函数,偶函数与奇函数的积函数是奇函数,奇函数与奇函数的积函数是偶函数.

2.周期性

对于函数 $f(x)$,如果存在一个非零常数 $T(T>0)$,使得当 x 取定义域内的每一个值时,都有 $f(x+T)=f(x)$,则称 $f(x)$ 为**周期函数**,T 为这个函数的**周期**.

如果 $f(x)$ 存在周期,一般指的是最小正周期.周期函数在各个周期内的图形是相同的.

3.有界性

如果在变量 x 的取值范围(用 D 表示)内,存在一个正数 M,使在 D 上的函数值 $f(x)$ 都满足 $|f(x)|\leqslant M$,则称函数 $y=f(x)$ 在 D 上有界,亦称 $f(x)$ 在 D 上是**有界函数**.如果不存在这样的正数 M,则称函数 $y=f(x)$ 在 D 上无界,亦称 $f(x)$ 在 D 上是**无界函数**.

一般来说,连续函数在闭区间上具有有界性.

例如:$y=x+6$ 在 $[1,2]$ 上有最小值 7,最大值 8,即它的函数值在 7 和 8 之间变化,是有界的,所以函数 $y=x+6$ 在 $[1,2]$ 上具有有界性.

4.单调性

一般地,设函数 $f(x)$ 的定义域为 I:

如果对于属于 I 内某个区间上的任意两个自变量的值 x_1,x_2,当 $x_1<x_2$ 时都有 $f(x_1)<f(x_2)$,那么就说 $f(x)$ 在这个区间上是**增函数**.

如果对于属于 I 内某个区间上的任意两个自变量的值 x_1,x_2,当 $x_1<x_2$ 时都有 $f(x_1)>f(x_2)$,那么就说 $f(x)$ 在这个区间上是**减函数**.

若函数 $y=f(x)$ 在某个区间上是增函数或减函数,则函数在这一区间具有(严格的)**单调性**,这一区间叫作函数的**单调区间**.此时也说函数是这一区间上的**单调函数**.

在单调区间上,增函数的图像是上升的,减函数的图像是下降的.

减(增)函数与减(增)函数的和为减(增)函数;

增(减)函数与减(增)函数的差为增(减)函数.

三、反函数

1.反函数的定义

定义　设函数 $y=f(x)(x\in A)$的值域是 C，根据函数中 x 与 y 的关系，用 y 表示 x，得到 $x=g(y)$. 若对于 y 在 C 中的任何一个值，通过 $x=g(y)$，x 在 A 中都有唯一的值和它对应，那么，$x=g(y)$就表示 y 是自变量，x 是因变量，x 是 y 的函数，这样的函数 $x=g(y)(y\in C)$叫作函数 $y=f(x)(x\in A)$的**反函数**，记作 $y=f^{-1}(x)$.反函数 $y=f^{-1}(x)$的定义域、值域分别是函数 $y=f(x)$的值域、定义域.

2.反函数存在定理

如果函数 $y=f(x)$是严格单调增加(或减少)的，则它必定存在反函数 $y=f^{-1}(x)$，并且也是严格单调增加(或减少)的.

3.求反函数的步骤

令 $f(x)=y$，根据函数式导出 x 关于自变量 y 的函数式.

由于通常是以 x 表示自变量，y 表示函数.所以把导出的函数式自变量换成 x，函数换成 y，即得到原函数的反函数.

注意

(1)互为反函数的两个函数的图像关于直线 $y=x$ 对称.

(2)在函数 $x=f^{-1}(y)$中，y 是自变量，x 是函数，但习惯上，我们一般用 x 表示自变量，用 y 表示函数，为此我们常常对调函数 $x=f^{-1}(y)$中的字母 x，y，把它改写成 $y=f^{-1}(x)$.今后凡无特别说明，函数 $y=f(x)$的反函数都采用这种经过改写的形式.

(3)反函数也是函数，因为它符合函数的定义.从反函数的定义可知，对于任意一个函数 $y=f(x)$来说，不一定有反函数，若函数 $y=f(x)$有反函数 $y=f^{-1}(x)$，那么函数 $y=f(x)$的反函数 $y=f^{-1}(x)$是唯一的，这就是说，函数 $y=f(x)$与 $y=f^{-1}(x)$互为反函数.

(4)互为反函数的两个函数在各自定义域内有相同的单调性.严格单调函数才有反函数，如二次函数在 $\mathbf{R}$ 内没有反函数，但在其单调增(减)的定义域内，可以求得反函数.

四、复合函数与初等函数

1.复合函数

定义　设 $y=f(u)$的定义域为 D_u，值域为 M_u，函数 $u=g(x)$的定义域为 D_x，值域为 M_x，那么对于 D_x 内的任意一个 x，经过 u 有唯一确定的 y 值与之对应，因此变量 x 与 y 之间通过变量 u 形成一种函数关系，记为 $y=f[g(x)]$，这种函数称为**复合函数**，其中 x 称为自变量，u 为中间变量，y 为因变量(即函数).

注 意

(1)不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数,只有当 $M_x \cap D_u$ 不为空集时,二者才可以构成一个复合函数.

(2)设 $y=f(u)$ 的最小正周期为 T_1,$u=\varphi(x)$ 的最小正周期为 T_2,则 $y=f(u)$ 的最小正周期为 T_1T_2,任一周期可表示为 kT_1T_2(k 属于 $\mathbf{R}^+$).

(3)复合函数单调性由 $y=f(u)$,$u=\varphi(x)$ 的增减性决定.即"增增得增,减减得增,增减得减",可以简化为"同增异减".

2.初等函数

初等函数是由幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数与常数经过有限次的有理运算及有限次函数复合所产生,并且能用一个解析式表示的函数.其中幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为**基本初等函数**.

(1)常值函数.

对定义域中的一切 x 对应的函数值都取某个固定常数的函数.

(2)幂函数.

形如 $y=x^a$ 的函数,式中 a 为实数.

(3)指数函数.

形如 $y=a^x$ 的函数,式中 $a>0$ 且 $a\neq 1$.

(4)对数函数.

指数函数的反函数,记作 $y=\log_a x$,式中 $a>0$ 且 $a\neq 1$,定义域是 $x>0$.指数函数与对数函数之间成立关系式为 $\log_a a^x=x$.

(5)三角函数.

正弦函数 $y=\sin x$,余弦函数 $y=\cos x$,正切函数 $y=\tan x$,余切函数 $y=\cot x$,正割函数 $y=\sec x$,余割函数 $y=\csc x$.

(6)反三角函数.

三角函数的反函数,包括反正弦函数 $y=\arcsin x\left(-1\leqslant x\leqslant 1,-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$,反余弦函数 $y=\arccos x(-1\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant\pi)$,反正切函数 $y=\arctan x\left(-\infty<x<+\infty,-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}\right)$,反余切函数 $y=\mathrm{arccot}\,x(-\infty<x<+\infty,0<y<\pi)$等.

例题解析

例 1 已知函数 $f(x)$的定义域为$(-1,0)$，则下列函数中定义域为$(0,1)$的是(　　).

A. $f(1-x)$　　B. $f(x-1)$　　B. $f(x+1)$　　D. $f(x^2-1)$

答案　B

解析　A. $-1<1-x<0$，即 $1<x<2$，故 $f(1-x)$的定义域为$(1,2)$；

B. $-1<x-1<0$，即 $0<x<1$，故 $f(x-1)$的定义域为$(0,1)$；

C. $-1<x+1<0$，即 $-2<x<-1$，故 $f(x+1)$的定义域为$(-2,-1)$；

D. $-1<x^2-1<0$，即 $-1<x<0$ 或 $0<x<1$，故 $f(x^2-1)$的定义域为$(-1,0)\cup(0,1)$.

例 2 下列函数为奇函数的是(　　).

A. $f(x)=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$　　B. $f(x)=\dfrac{a^{-x}-a^x}{2}$

C. $f(x)=\dfrac{x(1+x)}{1-x}$　　D. $f(x)=\dfrac{|x|}{x}\sin x$

答案　B

解析　A. $f(-x)=\dfrac{a^{-x}+a^x}{2}=f(x)$为偶函数；

B. $f(-x)=\dfrac{a^x-a^{-x}}{2}=-\dfrac{a^x-a^{-x}}{2}=-f(x)$为奇函数；

C. $f(x)$为非奇非偶函数；

D. $f(x)$满足 $f(-x)=\dfrac{|-x|}{-x}\sin(-x)=\dfrac{|x|}{x}\sin x=f(x)$为偶函数

第二节　极　限

基础知识

一、数列的极限

1.数列

定义　无穷多个数按一定顺序排列成 $x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$的形式称为**数列**，记为$\{x_n\}$.其中 x_n 称为数列的**通项**或一般项，正整数 n 称为数列的下标.

2.数列极限

定义 已知数列$\{x_n\}$,当$n\to\infty$时,若存在常数A,使得x_n与A无限接近,则称常数A为数列$\{x_n\}$当$n\to\infty$时的极限,记作$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$或$x_n\to A$(当$n\to\infty$时).没有极限的数列称为发散数列.

二、数列极限的性质与运算法则

性质1 有极限的数列,其极限值必唯一.

性质2 收敛数列一定有界,反之不成立,即有界数列不一定收敛.

1.四则运算法则

设有数列$\{x_n\}$,$\{y_n\}$,若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$,$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=B$,则

$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\pm\lim\limits_{n\to\infty}y_n=A\pm B$;

$\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}y_n=A\cdot B$;

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}{\lim\limits_{n\to\infty}y_n}=\frac{A}{B}(B\neq0).$$

2.夹逼定理

定理 若数列$\{x_n\}$,$\{y_n\}$,$\{z_n\}$满足不等式$x_n\leqslant y_n\leqslant z_n$($n=1,2,\cdots$),且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=A$,则$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=A$.

3.单调有界数列极限存在定理

定理 若数列$\{y_n\}$单调有界,则它必有极限.

三、函数极限的概念

1.定义

已知函数$f(x)$在点x_0的邻域有定义,当$x\to x_0$时,若存在常数A,使得$f(x)$与A无限接近,则称常数A为函数$f(x)$当$x\to x_0$时的**极限**,记作$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$或$f(x)\to A$(当$x\to x_0$时).

2.左、右极限及其与极限的关系

左极限 已知函数$f(x)$在点x_0左侧邻域有定义,当x从左侧趋近于x_0时,若存在常数A,使得$f(x)$与A无限接近,则称常数A为函数$f(x)$在x_0处的**左极限**,记作$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0^-)=A$.

右极限 已知函数$f(x)$在点x_0右侧邻域有定义,当x从右侧趋向于x_0时,若存在常数A,使得$f(x)$与A无限接近,则称常数A为函数$f(x)$在x_0处的**右极限**,记作$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f_{x\to x_0^+})=A$.

定理 函数极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在且等于$A$的充分必要条件是左极限$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$与右极限$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$都

存在且等于 A，即有

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A.$$

3.$x\to\infty$($x\to+\infty$, $x\to-\infty$)时函数的极限

定义　已知函数 $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 内有定义，当 $x\to\infty$时，若存在常数 A，使得 $f(x)$与 A 无限接近，则称常数 A 为函数 $f(x)$当 $x\to\infty$时的极限，记作$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$ 或 $f(x)\to A$(当 $x\to\infty$).

定义　已知函数 $f(x)$在$(x_0,+\infty)$区间内有定义，当 $x\to+\infty$时，若存在常数 A，使得$f(x)$与 A 无限接近，则称常数 A 为函数 $f(x)$当 $x\to+\infty$时的极限，记作 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$ 或$f(x)\to A$(当 $x\to+\infty$ 时).

定义　已知函数 $f(x)$在$(-\infty,x_0)$区间内有定义，当 $x\to-\infty$时，若存在常数 A，使得$f(x)$与 A 无限接近，则称常数 A 为函数 $f(x)$当 $x\to-\infty$时的极限，记作 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$ 或$f(x)\to A$(当 $x\to-\infty$ 时).

定理　函数极限$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$存在且等于 A 的充分必要条件是极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$和 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$都存在且都等于 A，即$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$.

4.函数极限的几何意义

函数极限的几何意义：任意给定一正数 ε，作平行于 x 轴的两直线$y=A+\varepsilon$ 和 $y=A-\varepsilon$，介于这两条直线之间是一横条区域.根据定义，对于给定 x_0，存在点 x_0 的一个 δ 邻域$(x_0-\delta,x_0+\delta)$，当 $y=f(x)$的图形上的点的横坐标 x 在邻域$(x_0-\delta,x_0+\delta)$内，但 $x\neq x_0$ 时，这些点的纵坐标 $f(x)$满足不等式$|f(x)-A|<\varepsilon$ 或 $A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$.即这些点落在上面所作的横条区域内(图 1-1).

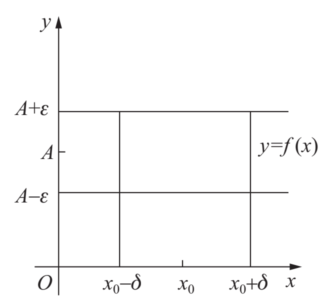


图 1-1

四、函数极限的性质

性质 1　如果$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在，则这个极限唯一.

性质 2　$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A>0$，则必定存在 x_0 的某邻域，在该邻域内任何异于 x_0 的点 x 处，恒有 $f(x)>0$.

性质 3　若 $f(x)\geqslant 0$，且$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，则必有 $A\geqslant 0$.

五、函数极限的四则运算法则

设有函数 $f(x)$，$g(x)$，如果在自变量 x 的同一变化过程中，有 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=A$，$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} g(x)=B$，则

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}[f(x)\pm g(x)]=\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)\pm\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}g(x)=A\pm B;$$

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}[f(x)g(x)]=\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)\cdot\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}g(x)=A\cdot B;$$

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)}{\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}g(x)}=\frac{A}{B}(B\neq0).$$

六、无穷小量与无穷大量

1.无穷小量和无穷大量的定义

(1)无穷小量的定义.在自变量 x 的某一变化趋势下,若函数 $f(x)$的极限为零,则称 x 为这一变化趋势下的**无穷小量**,简称**无穷小**.记为

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=0.$$

(2)无穷大量的定义.在自变量 x 的某一变化趋势下,若函数 $f(x)$的绝对值无限地增大,则称函数 $f(x)$为**无穷大量**,简称为**无穷大**.记为

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=\infty.$$

2.无穷小量和无穷大量的关系

(1)若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=\infty$,则 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\dfrac{1}{f(x)}=0$.

(2)若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=0$,且 $f(x)\neq0$,则 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\dfrac{1}{f(x)}=\infty$.

3.无穷小量的性质

性质 1 有限个无穷小量的和或差仍为无穷小量.

性质 2 有限个无穷小量的积仍为无穷小量.

性质 3 无穷小量与有界变量之积仍为无穷小量.

性质 4 无穷小量除以有极限且极限不为零的变量,其商仍为无穷小量.

性质 5 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的充分必要条件是 $f(x)=A+\alpha$,其中 α 为当 $x\to x_0$ 时的无穷小量.

4.无穷小量的阶

设 $\alpha(x)$与 $\beta(x)$是关于自变量 x 在同一变化过程 $\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}$ 的两个无穷小量.

(1)若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$,则称 $\alpha(x)$比 $\beta(x)$为**高阶无穷小量**(或称 $\beta(x)$是比 $\alpha(x)$低阶的无穷小量).

(2)若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=A\neq0$,则称 $\alpha(x)$与 $\beta(x)$是**同阶无穷小量**.

(3)若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$,则称 $\alpha(x)$与 $\beta(x)$是**等价无穷小量**,并记为 $\alpha(x)\sim\beta(x)$.

定理(无穷小量等价代换定理)　设 $\alpha(x),\alpha'(x),\beta(x),\beta'(x)$是自变量 x 在同一变化过程中的无穷小量,且 $\alpha(x)\sim\alpha'(x),\beta(x)\sim\beta'(x)$, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\dfrac{\alpha'(x)}{\beta'(x)}$存在,则

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\frac{\alpha'(x)}{\beta'(x)}.$$

常用的无穷小量等价代换:$\sin x\sim x$,$\tan x\sim x$,$\ln(1+x)\sim x$,$1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$,$e^x-1\sim x$.

七、极限存在准则与两个重要极限

1.极限存在准则

夹逼定理　设在 x_0 的某空心邻域内恒有 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$,且有 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$,则极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在,且有 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

注　意

此定理对 $x\to x_0^+$,$x\to x_0^-$,$x\to\infty$,$x\to+\infty$,$x\to-\infty$等函数极限,也有类似的结果.

2.两个重要极限

重要极限Ⅰ　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

重要极限Ⅱ　$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$,$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$.

八、求极限的方法

(1)极限定义(分段函数的分段点或者是函数间断点,常常要使用左、右极限).

(2)极限的四则运算法则(注意:必须首先满足定理条件,特别是求商的极限时,分母的极限不为零).

(3)夹逼准则(对数列、函数都成立).

(4)单调有界数列必收敛(仅对数列成立).

(5)两个重要极限:

①$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e$,$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$(属于 1^∞ 型).

②$\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}}=1\left(属于\dfrac{0}{0}型\right)$.

(6)变量替换求极限(包括取对数后再求极限).

(7)利用有限个无穷小的和、差、积仍为无穷小,以及无穷小与有界量的乘积仍为无穷小.

(8)利用无穷小与无穷大之间的关系求极限(例如:α 为无穷小且 $\alpha\neq0$,则$\frac{1}{\alpha}$为无穷大).

(9)等价无穷小替换(这是求极限最重要的方法之一,特别要注意无穷小的和、差替换的条件是要替换的两个无穷小不能是等价无穷小).

例题解析

例 1 设 $f(x)=\dfrac{x^2-2x-3}{x+1}$,则 $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=$________.

答案 -4

解析 由题设条件,有

$$\lim_{x\to-1}f(x)=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x-3)}{x+1}=\lim_{x\to-1}(x-3)=-4.$$

例 2 已知当 $x\to0$ 时,$\sqrt{1+ax^2}-1$ 与 x^2 是等价无穷小,则 $a=$________.

答案 2

解析 因为$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+ax^2}-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{ax^2}{x^2(\sqrt{1+ax^2}+1)}=\dfrac{a}{2}=1$,得 $a=2$.

例 3 当 $x\to0$ 时,与 $e^{2x}-1$ 等价的无穷小量是(　　).

A.x　　B.$2x$　　C.$4x$　　D.x^2

答案 B

解析 因为$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}2\dfrac{e^{2x}-1}{2x}=2$,$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-1}{2x}=1$,

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{4x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{2}\frac{e^{2x}-1}{2x}=\frac{1}{2},\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{2x}\cdot\frac{2}{x}=\infty.$$

第三节 连　续

基础知识

一、函数连续与间断的概念

1.函数在一点处连续的定义

(1)设函数$=f(x)$在x_0处的某一邻域内有定义,如果当自变量x在x_0处取得的增量Δx趋于零时,函数相应的增量$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$也趋于零,即$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$,则称函数$f(x)$**在点**$x_0$**处连续**.

(2)设函数$y=f(x)$在x_0的某个邻域内有定义,如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在,且$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$,则称函数$f(x)$**在点**$x_0$**处连续**.

2.左连续与右连续

设函数$y=f(x)$在点x_0的某左侧邻域$(x_0-\delta,x_0]$有定义,且$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$,则称$f(x)$在$x_0$处**左连续**;若函数$y=f(x)$在点$x_0$的某右侧邻域$[x_0,x_0+\delta)$有定义,且$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$,则称$f(x)$在$x_0$处**右连续**.

如果函数$f(x)$在(a,b)内每一点都连续,则称$f(x)$在(a,b)内连续.

如果$f(x)$在(a,b)内连续,而且在左端点$x=a$,$f(x)$右连续,即$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=f(a)$;在右端点$x=b$,$f(x)$左连续,即$\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=f(b)$,则称函数$f(x)$在$[a,b]$上连续.

定理　函数$y=f(x)$在点x_0处连续的充要条件是在x_0点既是左连续又是右连续,即

$$f(x_0^-)=f(x_0^+)=f(x_0).$$

定理　基本初等函数在其定义域都是连续函数.

3.函数的间断点及其分类

(1)函数的间断点.

若函数$f(x)$在点x_0不满足连续的条件,即如果函数$f(x)$在点x_0处有下列三种情况之一:

①$f(x)$在点x_0处无定义.

②$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$不存在.

③虽然$f(x_0)$有定义,且$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在,但是$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$.

则称函数$f(x)$在$x=x_0$点**间断**,$x=x_0$称为$f(x)$的**间断点**.

(2)函数间断点的分类.

若x_0为$f(x)$的间断点,则

①如果$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$与$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$都存在,但不相等,则称$x_0$为$f(x)$的**跳跃间断点**.

②如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在,但与$f(x_0)$不相等或$f(x_0)$无定义,则称$x_0$为$f(x)$的**可去间断点**.对于可去间断点,只要改变定义或补充定义,就能使$f(x)$在x_0处连续.

③如果$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$与$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$中至少有一个为$\infty$时,则称$x_0$为$f(x)$的**无穷间断点**.

④若在$x\to x_0$时,$f(x)$的值无限次地在两个不同的数之间变化,则称x_0为$f(x)$的**振荡间断点**.

通常我们将函数$f(x)$的可去间断点和跳跃间断点称为第一类间断点,将无穷间断点和振荡间断点称为第二类间断点.

二、函数连续性的运算

1.连续函数的四则运算

若函数 $f(x)$,$g(x)$在点 x_0 处连续,则它们的和$(f(x)+g(x))$,差$(f(x)-g(x))$,积$(f(x)\cdot g(x))$,商$\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}(g(x_0)\neq 0)\right)$在点 x_0 处也连续.

2.复合函数的连续性

设 $y=f(u)$在 $u=u_0$ 处连续,$u=\varphi(x)$在 $x=x_0$ 处连续,且 $u_0=\varphi(x_0)$,则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$在 $x=x_0$ 处连续,即

$$\lim_{x\to x_0} f[\varphi(x)]=f[\varphi(x_0)]=f[\lim_{x\to x_0}\varphi(x)].$$

注意

若 $\varphi(x)$在 $x=x_0$ 点不连续,但 $\varphi(x)$存在,则通过补充定义可使 $\varphi(x)$在此点连续,从而上式仍成立.

3.反函数的连续性

设函数 $y=f(x)$在某区间上连续且为严格单调函数,则它的反函数 $y=f^{-1}(x)$也在对应区间上连续,且严格单调.

三、闭区间上连续函数的性质

1.有界性定理

设函数 $y=f(x)$在$[a,b]$上连续,则 $f(x)$在$[a,b]$上有界,即存在常数 $M>0$,对任意的$x\in[a,b]$,有$|f(x)|\leqslant M$.

2.最大值与最小值定理

设函数 $f(x)$在$[a,b]$上连续,则在$[a,b]$上,$f(x)$必然存在最大值与最小值.

3.介值定理(包括零点定理)

(1)介值定理:设函数 $y=f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,则在该区间端点处取值不同时,即 $f(a)=A$,$f(b)=B$,且 $A\neq B$,那么,不论 C 是 A 与 B 之间的怎样一个数,在开区间(a,b)内至少有一点 ξ,使得 $f(\xi)=C(a<\xi<b)$.

(2)零点定理:设函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,且 $f(a)$与 $f(b)$异号(即 $f(a)\cdot f(b)<0$),那么在开区间(a,b)内至少有函数 $f(x)$的一个零点,即至少存在一点 $\xi(a<\xi<b)$,使 $f(\xi)=0$.

例题解析

一、讨论分段函数在分段点的连续性

分两种情形：已知分段函数，研究其在分段点的连续性；已知分段函数在分段点连续，求分段函数关系式中的参数.

方法　在分段点 x_0 处连续，则既是左连续，又是右连续，即 $f(x_0^-)=f(x_0^+)=f(x_0)$.

例 1　设 $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x<0,\\ x, & x>0,\end{cases}$ 画出 $f(x)$ 的图形，求 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$ 及 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$，$\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 是否存在.

解　$f(x)$ 的图像如图 1-2 所示.

$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(x^2+1)=1$，

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}x=0$，

因为 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$，

所以 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 不存在.

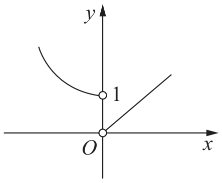


图 1-2

二、确定函数的间断点并进行分类

函数 $y=f(x)$ 的间断点是指满足下列三个条件之一的点：

(1) $f(x)$ 在点 x_0 处无定义.

(2) 在 x_0 点 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在.

(3) 在 x_0 点 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，但 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$.

求函数 $y=f(x)$ 的间断点也就是寻找满足三个条件之一的点.

例 2　求函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{(x-1)x}$ 的间断点，并判断其类型.

解　由使函数 $f(x)$ 有意义知 $f(x)$ 的间断点为 $x=0$，$x=1$.

因为 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+1}{x}=2$，而 $f(x)$ 在 $x=1$ 处无定义，故 $x=1$ 为可去间断点.

又因为 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x+1}{x}=\infty$，所以 $x=0$ 为 $f(x)$ 的无穷间断点.

综上得 $x=1$ 为 $f(x)$ 的可去间断点，$x=0$ 为 $f(x)$ 的无穷间断点.

例 3　求函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2-x-2}$ 的间断点，并确定其类型.

解　所给函数在点 $x=-1,2$ 处没有意义，因此 $x=-1,2$ 是所给函数的间断点.

由于在 $x=-1$ 点有

$$\lim_{x\to-1}f(x)=\lim_{x\to-1}\frac{x^2-1}{(x+1)(x-2)}=\lim_{x\to-1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)(x-2)}=\lim_{x\to-1}\frac{x-1}{x-2}=\frac{2}{3},$$

故 $x=-1$ 是第一类间断点且为可去间断点.

在 $x=2$ 点有 $\lim\limits_{x\to2}f(x)=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-1}{(x+1)(x-2)}=\infty$,

故 $x=2$ 是第二类间断点且为无穷间断点.

三、利用函数的连续性求极限

设 $u=\varphi(x)$,且 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=A$,而函数 $y=f(u)$在点 $u=A$ 处连续,则由复合函数的连续性可证

$$\lim_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=f[\lim_{x\to x_0}\varphi(x)]=F(A).$$

注意

这里并不要求 $\varphi(x)$在 $x=x_0$ 点连续,只要极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)$存在即可.

由此可进一步推导出:若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A(A>0)$,$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$,则

$$\lim_{x\to x_0}f(x)^{g(x)}=A^B.$$

例 4 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\ln\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

解 由于 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$,

而函数 $y=\ln u$ 在 $u=\dfrac{1}{2}$处连续,

从而 $\lim\limits_{x\to0}\ln\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\ln\left[\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}\right]=\ln\dfrac{1}{2}=-\ln2$.

四、有关闭区间上连续函数的命题的证明

这里主要是指利用介值定理及其推论、零点定理证明方程根的存在性.其基本步骤是:把已知方程右端项全部移到左端,令其为 $f(x)$,再由题设确定区间$[a,b]$,然后验证$f(a)\cdot f(b)<0$ 即可推证在 a 与 b 之间至少存在一个根.

例 5 试证方程 $e^x-2=x$ 在区间$(0,2)$内至少有一个根.

证明 令 $f(x)=e^x-2-x$,则 $f(x)$在$[0,2]$上连续,且 $f(0)=e^0-2-0=-1<0$,$f(2)=e^2-2-2=e^2-4>0$.由零点定理知,在$(0,2)$内至少存在一点 ξ,使 $f(\xi)=0$.

即 $e^{\xi}-2=\xi$，也就是说方程 $e^{x}-2=x$ 在区间 $(0,2)$ 内至少有一个根.

例 6 证明方程 $x=\sin x+2$ 至少有一个不超过 3 的正实根.

证明 令 $f(x)=x-\sin x-2$，则 $f(0)=-2<0$，$f(3)=1-\sin 3>0$，

故由零点定理知，在 $(0,3)$ 内至少有一个根使得方程 $f(x)=0$ 成立.即方程 $x=\sin x+2$ 至少有一个小于 3 的正实根.

同步练习

一、选择题

1.当 $x\to 0$ 时，$x^{2}-\sin x$ 是 x 的(C)

A.高阶无穷小　　B.等价无穷小

C.同阶无穷小，但不是等价无穷小　　D.低阶无穷小

2.当 $x\to 0$ 时，下列函数为无穷小的是(B)

A.$\dfrac{\sin x}{x}$　　B.$x^{2}+\sin x$　　C.$\dfrac{1}{x}\ln(1+x)$　　D.$2x-1$

3.当 $x\to 0$ 时，$f(x)=e^{-x^{2}+2x^{3}}-1$ 与 $g(x)=x^{2}$ 比较得(C)

A.$f(x)$是较 $g(x)$高阶的无穷小量

B.$f(x)$是较 $g(x)$低阶的无穷小量

C.$f(x)$与 $g(x)$是同阶无穷小量，但不是等价无穷小量

D.$f(x)$与 $g(x)$是等价无穷小量

4.函数 $y=\dfrac{1}{x}\ln(2+x)$的定义域为(D)

A.$x\neq 0$ 且 $x\neq -2$　　B.$x>0$　　C.$x>-2$　　D.$x>-2$ 且 $x\neq 0$

5.极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin 2x}{x}=$(A)

A.0　　B.$\dfrac{1}{2}$　　C.1　　D.2

6.点 $x=0$ 是函数 $f(x)=\begin{cases}x, & x<0,\\ e^{x}-1, & x\geq 0\end{cases}$ 的(A)

A.连续点　　B.可去间断点

C.第二类间断点　　D.第一类间断点，但不是可去间断点

7.函数 $f(x)=\begin{cases}0, & x\leq 0,\\ \dfrac{1}{x}, & x>0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处不连续是因为(C)

A.$f(0^{+})\neq f(0)$　　B.$f(0^{-})\neq f(0)$

C. $f(0^+)$不存在　　D. $f(0^-)$不存在

8. $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}=$(B)

A. e　　B. e^{-1}　　C. $-e^{-1}$　　D. $-e$

9. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2-6x+8}=$(C)

A. 0　　B. 1　　C. $-\dfrac{1}{2}$　　D. $\dfrac{1}{3}$

10. 函数 $f(x)=|x|+1$ 在 $x=0$ 处(C)

A. 无定义　　B. 不连续　　C. 连续　　D. 可去间断点

二、填空题

11. 设 $f(x)=\dfrac{1}{x}$，则 $f(f(x))=$________.

12. 函数 $f(x)=2x^2+3x-12$ 的单调递减区间是________.

13. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x+1}=$________.

14. 已知 $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x<0,\\ 2^x, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $f(\lim\limits_{x\to 0}f(x))=$________.

15. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)=$________.

16. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{x}\right)^{2x}=e$，则 $k=$________.

17. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{x^2}-1}{2x^2}, & x\neq 0,\\ a, & x=0\end{cases}$ 为连续函数，则 $a=$________.

18. 设 $f(x)=\begin{cases}1+e^{-\frac{1}{(x-1)^2}}, & x\neq 1,\\ k, & x=1,\end{cases}$ 当 $k=$________时，可使 $f(x)$在点 $x=1$ 处连续.

19. 设 $f(x)=\begin{cases}\cos x, & x\leqslant 0,\\ \sqrt{x}, & x>0,\end{cases}$ 则 $f(0)=$________.

20. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}a\cos x, & x\geqslant 0,\\ x^2-1, & x<0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续，则 $a=$________.

三、解答题

21. 求函数 $f(x)=\begin{cases}2^{\frac{1}{x}}, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ \arctan\dfrac{1}{x}, & x\geqslant 0\end{cases}$ 的间断点，并确定其类型.

22. 求 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{\sin x}}$.

23.求$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{x}{2}+4}$.

24.求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1-\sqrt{1-x^2}}$.

25.求$\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\cos\dfrac{1}{x}-1\right)$.

26.求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}$.

27.求$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+x}{2-x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

28.求$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$.

29.证明方程 $x^3-3x+1=0$ 在区间(1,2)内至少存在一个实根.

30.设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\tan(ax)}{x}, & x<0,\\ x+2, & x\geqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续,求 a 的值.

参考答案

二、填空题

11.x　　12.$\left(-\infty,-\dfrac{3}{4}\right)$　　13.0　　14.2

15.$\dfrac{1}{2}$　　16.$\dfrac{1}{2}$　　17.$\dfrac{1}{2}$　　18.1

19.1　　20.-1

三、解答题

21.解:当 $x\neq 0$ 时,$f(x)$在各区间为连续的,当 $x=0$ 时,因为 $f(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}2^{\frac{1}{x}}=0$,$f(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}\arctan\dfrac{1}{x}=\dfrac{\pi}{2}\neq f(0^-)$,所以 $x=0$ 是函数的第一类间断点且为跳跃间断点.

22.解:因为$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{\sin x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]^{\frac{x}{\sin x}}$,而$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$,$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1$,故原式$=e^1=e$.

23.解:原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{x}{2}+4}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1-\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{1}{x}}\right)^{\frac{x}{2}+4}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x}{2}+4}}{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x}{2}+4}}=\frac{e^{-\frac{1}{2}}}{e^{\frac{1}{2}}}=e^{-1}.$$

24.解:原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2(1+\sqrt{1-x^2})}{(1-\sqrt{1-x^2})(1+\sqrt{1-x^2})}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2(1+\sqrt{1-x^2})}{x^2}=2$.

25.解:$\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\cos\dfrac{1}{x}-1\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\cos\dfrac{1}{x}-1}{\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-1}{2x}=0$.

26.解:$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x}=1$.

27.解:$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+x}{2-x}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\dfrac{x}{2}}{1-\dfrac{x}{2}}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(1+\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}}{\left(1-\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}}=\dfrac{e^{\frac{1}{2}}}{e^{-\frac{1}{2}}}=e$.

28.解:$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x+1)(x-1)}{(x-1)(2x+1)}=\dfrac{2}{3}$.

29.证明:令 $f(x)=x^3-3x+1$,则 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内为连续函数.由于 $f(1)=-1<0$,$f(2)=3>0$,由零点定理知至少存在一点 $\xi\in(1,2)$使得 $f(\xi)=0$,即所给方程在区间 $(1,2)$内至少有一个实根.

30.解:因为 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\tan(ax)}{x}=a$, $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x+2)=2$,

又因为 $f(x)$在 $x=0$ 处连续,所以 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$,故 $a=2$.

第二章　一元函数微分学

本章要求

导数与微分

(1)理解导数的概念及其几何意义,了解可导性与连续性的关系,掌握用定义求函数在一点处的导数的方法.

(2)会求曲线上一点处的切线方程与法线方程.

(3)熟练掌握导数的基本公式、四则运算法则及复合函数的求导方法,会求反函数的导数.

(4)掌握隐函数求导法、对数求导法以及由参数方程所确定的函数的求导方法,会求分段函数的导数.

(5)理解高阶导数的概念,会求简单函数的 n 阶导数.

(6)理解函数的微分概念,掌握微分法则,了解可微与可导的关系,会求函数的一阶微分.

微分中值定理及导数的应用

(1)理解罗尔定理、拉格朗日中值定理及它们的几何意义。会用拉格朗日中值定理证明简单的不等式.

(2)熟练掌握用洛必达法则求“$\frac{0}{0}$”“$\frac{\infty}{\infty}$”型未定式的极限的方法.

(3)掌握利用导数判定函数的单调性及求函数的单调增、减区间的方法,会利用函数的单调性证明简单的不等式.

(4)理解函数极值的概念.掌握求函数的驻点、极值点、极值、最大值与最小值的方法,会解简单的应用问题.

(5)会判断曲线的凹凸性,会求曲线的拐点.

(6)会求曲线的水平渐近线与铅直渐近线.

第一节　导数与微分

基础知识

一、导数概念

1.导数的定义

设函数 $y=f(x)$在点 x_0 的某一邻域内有定义,自变量 x 在 x_0 处取得一增量 Δx($x_0+\Delta x$ 仍在该

邻域内),函数 y 相应地取得增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$,如果极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在,则称此极限值为函数 $y=f(x)$在点 x_0 处的导数,记作

$$f'(x_0),y'|_{x=x_0},y'(x_0),\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}|_{x=x_0}\text{或}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}|_{x=x_0}\text{等,即}$$

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},$$

此时也称函数 $f(x)$在点 x_0 处可导.若上式的极限不存在,则称函数 $f(x)$在点 x_0 处不可导或导数不存在.

函数 $f(x)$在点 x_0 处的导数的另一种等价定义是

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

2.左导数与右导数

设函数 $y=f(x)$在点 x_0 的左侧(右侧)包含 x_0 点的邻域内有定义.在点 x_0 处给 x 以增量 $\Delta x<0$ $(\Delta x>0)$,$x_0+\Delta x$ 仍在该邻域内,函数 y 相应地取得增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$,如果极限

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\text{或}\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在,则称此极限值为函数 $y=f(x)$在该点的左导数(右导数),记作 $f'_-(x_0)(f'_+(x_0))$,即

$$f'_-(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\text{或}f'_+(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

3.函数在一点可导的充分必要条件

函数 $y=f(x)$在一点可导的充分必要条件是 $f(x)$在点 x_0 处左、右导数存在且相等,即 $f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$.

4.导数的几何意义与物理意义

函数 $y=f(x)$在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$表示曲线 $y=f(x)$在点$(x_0,f(x_0))$处切线的斜率.

若函数 $y=f(x)$在点 x_0 处的导数为无穷大,则曲线 $y=f(x)$在点$(x_0,f(x_0))$处的切线垂直于 x 轴,切线方程为 $x=x_0$,法线方程为 $y=f(x_0)$.

若函数 $y=f(x)$在点 x_0 处可导,则曲线 $y=f(x)$在点$(x_0,f(x_0))$处的切线方程为

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0),$$

法线方程为

$$y-f(x_0)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0),f'(x_0)\neq 0,$$

$$x=x_0,f'(x_0)=0.$$

导数在物理上有多种意义,仅从速度角度给出导数的物理意义.

设质点做直线运动,其路程 s 与时间 t 的函数关系是 $s=f(t)$,且 $f(t)$ 在点 $t=t_0$ 处可导,则 $f'(t_0)$ 表示质点在时刻 t_0 的瞬时速度,即 $v(t_0)=f'(t_0)$.

5.导函数

若函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内每一点处都可导,则称 $f(x)$ 在 (a,b) 可导.

若函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内可导,且在区间端点 a 处的右导数和端点 b 处的左导数都存在,则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可导.

若函数 $y=f(x)$ 在区间 D 可导,则任意 $x\in D$ 有导数值,由此定义了一个新函数,称为 $f(x)$ 的导函数,简称导数,记为 $f'(x)$,y',$y'(x)$,$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$等.

6.可导与连续的关系

若函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导,则 $f(x)$ 在点 x_0 处连续.但反之不成立,即函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续,它在 x_0 点不一定可导.

例如,$y=|x|$ 在 $x=0$ 点连续,但在此点不可导.因为 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{|0+\Delta x|-|0|}{\Delta x}=\dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}$,$f'_-(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{-\Delta x}{\Delta x}=-1$,$f'_+(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{\Delta x}{\Delta x}=1$,$f'_-(0)\neq f'_+(0)$,即 $f'(0)$ 不存在.

二、求导法则与导数的基本公式

1.导数的四则运算

设函数 $u(x)$,$v(x)$ 在点 x 处可导,则

(1)$[u(x)\pm v(x)]'=u'(x)\pm v'(x)$.

(2)$[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$.

$[cu(x)]'=cu'(x)$(c 是常数).

(3)$\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]'=\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}\quad (v(x)\neq 0)$;

$\left[\dfrac{1}{v(x)}\right]'=-\dfrac{v'(x)}{v^2(x)}\quad (v(x)\neq 0)$.

2.反函数的导数

设函数 $y=f(x)$ 在某区间内严格单调且可导,在某点 $x\in D$,$f'(x)\neq 0$,则 $f(x)$ 的反函数 $x=\varphi(y)$ 在对应点 y 也可导,且有

$$\varphi'(y)=\frac{1}{f'(x)}.$$

3.导数的基本公式

(1)$(c)'=0$(c 为常数).

(2)$(x^{\mu})'=\mu x^{\mu-1}$(μ 是实数).

(3)$(a^{x})'=a^{x}\ln a(a>0,a\neq1)$.

(4)$(e^{x})'=e^{x}$.

(5)$(\log_{a}x)'=\dfrac{1}{x\ln a}(a>0,a\neq1)$.

(6)$(\ln|x|)'=\dfrac{1}{x}$.

(7)$(\sin x)'=\cos x$.

(8)$(\cos x)'=-\sin x$.

(9)$(\tan x)'=\dfrac{1}{\cos^{2}x}=\sec^{2}x$.

(10)$(\cot x)'=-\dfrac{1}{\sin^{2}x}=-\csc^{2}x$.

(11)$(\sec x)'=\sec x\tan x$.

(12)$(\csc x)'=-\operatorname{cosc}x\cot x$.

(13)$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$.

(14)$(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$.

(15)$(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^{2}}$.

(16)$(\operatorname{arccot}x)'=-\dfrac{1}{1+x^{2}}$.

三、求导方法

1.复合函数的求导法

设 $y=f(u)$通过 $u=u(x)$定义的复合函数 $y=f(u(x))$,$u=u(x)$在某一点 x 可导,$u'_{x}=u'(x)$,$y=f(u)$在对应的点 u 可导,$y'_{u}=f'(u)$,则复合函数 $y=f(u(x))$在点 x 处可导,且

$$y'_{x}=y'_{u}\cdot u'_{x} \text{ 或} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=f'(u)u'(x).$$

2.隐函数的求导法

用自变量的解析式明显表达出来的函数叫显函数.

由方程 $F(x,y)=0$ 确定 y 是 x 的函数且不能由显式给出的函数叫隐函数.

由方程 $F(x,y)=0$ 确定的隐函数 $y=y(x)$,将 $y=y(x)$代入方程得恒等式

$$F(x,y(x))\equiv0.$$

设所论问题其隐函数存在且可导,利用复合函数求导法,对上式两边同时对 x 求导,求导时把 y 看作中间变量,解出 y'_{x} 的表达式(可含 y).

3.对数求导法

当函数值大于零时，将函数的表达式两边取自然对数，并利用对数性质将表达式化简，然后应用隐函数的求导法，将等式两端对自变量求导，最后得出函数的导数，这种方法称为对数求导法.一般适用于幂指函数 $y=u(x)^{v(x)}(u(x)>0)$及若干个因子的幂的连乘积.

4.由参数方程确定的函数的求导法

设在参数方程$\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t)\end{cases}$中，若 $\varphi(t),\psi(t)$关于 x 可导且 $\varphi(t)$严格单调，$\varphi'(t)\neq0$，则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

若 $\varphi''(t),\psi''(t)$存在，则

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\varphi'(t)\psi''(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{(\varphi'(t))^2}.$$

参数方程在(x_0,y_0)的切线方程和法线方程分别为

$$y-y_0=\frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}(x-x_0),\varphi'(t_0)\neq0,$$

$$y-y_0=-\frac{\varphi'(t_0)}{\psi'(t_0)}(x-x_0),\psi'(t_0)\neq0.$$

5.求分段函数的导数

设 $x=x_0$ 是分段函数 $y=f(x)$的一个分界点，若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，且在 $x=x_0$ 处左右两侧的导数相等，则称 $f(x)$在 $x=x_0$ 处可导.由此表明，分段函数在分界点的导数存在与否归结为该点是否连续及其左右导数是否相等.

四、高阶导数的概念

若 $y'=f'(x)$的导数

$$f''(x)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f'(x_0+\Delta x)-f'(x_0)}{\Delta x}$$

存在，该导数称为 $y=f(x)$的二阶导数，记作 $f''(x),y'',\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}x^2},\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$或 $\ddot{y}$.

一般，若$(n-1)$阶导数 $y^{n-1}=f^{n-1}(x)$的导数存在，该导数称为 $y=f(x)$的 n 阶导数，记作 $f^{(n)}(x),y^{(n)}(x),\frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}$或$\frac{\mathrm{d}^nf}{\mathrm{d}x^n}(n=2,3,\cdots)$.

二阶及二阶以上的导数统称为高阶导数.

五、微分

1.微分的定义

设函数 $y=f(x)$在点 x_0 的某一邻域内有定义.在点 x_0 取一增量 Δx($x_0+\Delta x$ 仍在该邻域内),若函数 $y=f(x)$在点 x_0 处的增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$可表示为

$$\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x),$$

其中 A 是不依赖于 Δx 的常数,$o(\Delta x)$是比 Δx 高阶的无穷小,则称 $y=f(x)$在点 x_0 是可微的(或可微分),称 $A\Delta x$ 是函数 $y=f(x)$在点 x_0 处对应于自变量增量 Δx 的微分,记作 $\mathrm{d}y$,即 $\mathrm{d}y=A\Delta x$.

2.微分与导数的关系

函数 $y=f(x)$在点 x_0 处可微分的充分必要条件是 $f(x)$在点 x_0 处可导且 $A=f'(x_0)$.

若定义自变量 x 的微分是函数 $y=x$ 的微分,则 $\mathrm{d}x=\mathrm{d}y=x'\Delta x=\Delta x$,即 $\mathrm{d}x=\Delta x$.此后,对可导的 $y=f(x)$,有 $\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x\Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$,即导数是函数的微分与自变量的微分之商,故又称微商.

微分与导数是两个不同的概念,但由上知道,可微与可导是等价的,故可导法也称为微分法.

函数 $y=f(x)$在点 x_0 处的微分 $\mathrm{d}y=f'(x)\Delta x$ 有如下特性:

(1)当 $f'(x)\neq0$ 时,$\mathrm{d}y=f'(x_0)\Delta x$ 是 Δx 的线性函数.

(2)微分 $\mathrm{d}y$ 与函数增量 Δy 之差 $\Delta y-\mathrm{d}y=o(\Delta x)$是比 Δx 高阶的无穷小.故当$|\Delta x|$很小时,常用 $\mathrm{d}y$ 近似代替 Δy,常说 $\mathrm{d}y$ 是 Δy 的线性主部.

函数 $y=f(x)$在点 x_0 处的微分 $\mathrm{d}y=f'(x_0)\Delta x$ 的几何意义是曲线 $y=f(x)$在点$(x_0,f(x_0))$处的切线,当 x 取得增量 Δx 时纵坐标对应的增量.

3.微分法则

由于$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'(x)\Leftrightarrow \mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x$,即函数的微分等于函数的导数乘以自变量的微分,故由函数的导数公式立即得到函数的微分公式.

(1)微分的四则运算.

设函数 $u(x)$,$v(x)$可微分,则

①$\mathrm{d}[u(x)\pm v(x)]=\mathrm{d}u(x)\pm\mathrm{d}v(x)$.

②$\mathrm{d}[u(x)v(x)]=v(x)\mathrm{d}u(x)+u(x)\mathrm{d}v(x)$.

③$\mathrm{d}\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]=\dfrac{v(x)\mathrm{d}u(x)-u(x)\mathrm{d}v(x)}{v^2(x)}$,$v(x)\neq0$.

(2)微分的基本公式.

①$\mathrm{d}c=0$,c 是常数.

②$\mathrm{d}x^\mu=\mu x^{\mu-1}\mathrm{d}x$,$\mu$ 是实数.

③$\mathrm{d}a^x=a^x\ln a\,\mathrm{d}x$,$a>0$,$a\neq1$.

④$\mathrm{d}e^x=e^x\mathrm{d}x$.

⑤$d\log_a x=\frac{1}{x\ln a}dx, a>0, a\neq 1$.

⑥$d\ln x=\frac{1}{x}dx$.

⑦$d\sin x=\cos x dx$.

⑧$d\cos x=-\sin x dx$.

⑨$d\tan x=\sec^2 x dx$.

⑩$d\cot x=-\csc^2 x dx$.

⑪$d\sec x=\sec x\tan x dx$.

⑫$d\csc x=-\csc x\cot x dx$.

⑬$d\arcsin x=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

⑭$d\arccos x=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

⑮$d\arctan x=\frac{1}{1+x^2}dx$.

⑯$d\text{arccot}\, x=-\frac{1}{1+x^2}dx$.

4.一阶微分形式不变性(复合函数微分法则)

设 $y=f(u)$,$u=u(x)$构成复合函数,若 $f(u)$关于 u 可微,$u(x)$关于 x 可微,则复合函数 $y=f(u(x))$关于 x 的微分 dy 有

$$dy=f'(u)u'(x)dx \quad 或\ dy=f'(u)du,$$

其中 du 是 $u(x)$关于 x 的微分.

由此可见,无论 u 是自变量还是中间变量,总有 $dy=f'(u)du$.这一性质称为一阶微分形式不变性.

例题解析

例 1 设函数 $y=f(x)$在点 x_0 处可导,且下式各极限都存在,其中一定成立的是(　　)

A. $\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=f'(a)$

B. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)$

C. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)$

D. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}=2f'(x_0)$

解 因为 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=f'_+(a)$，不一定等于 $f'(a)$，或 $f'(a)$ 不存在，故 A 不成立.

对 B，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{-(-\Delta x)}\xlongequal{-\Delta x=h}-\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=-f'(x_0)$，故 B 不正确.

由定义知 C 不成立，故应选 D.事实上

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)+f(x_0)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}+\frac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{-\Delta x}\right]\\&=f'(x_0)+f'(x_0)=2f'(x_0).\end{aligned}$$

例 2 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的左导数 $f'_-(x_0)$ 和右导数 $f'_+(x_0)$ 存在且相等是 $f(x)$ 在点 x_0 可导的(　　)

A.充分条件　　B.必要条件

C.充分必要条件　　D.非充分必要条件

解 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处导数存在的充分必要条件是 $f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$，故选 C.

例 3 设 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导，且 $f'(x_0)=-2$，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h}$ 等于(　　)

A.$\dfrac{1}{2}$　　B.2　　C.$-\dfrac{1}{2}$　　D.-2

解 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-(-h)}\xlongequal{-h=t}-\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t}$

$=-f'(x_0)=-(-2)=2$，故选 B.

例 4 设 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导，且 $f(0)=0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=$________.

解 $f(0)=0$，由导数定义可知，

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0).$$

例 5 设 $y=x^e+e^x+\ln x+e^e$，则 $y'=$________.

解 $y'=ex^{e-1}+e^x+\dfrac{1}{x}$.

例 6 设 $f(x)=2^x$，$g(x)=x^2$，则 $f'(g'(x))=$________.

解 $f'(x)=2^x\ln 2$，$g'(x)=2x$，则 $f'(g'(x))=2^{2x}\ln 2=4^x\ln 2$.

例 7 设 $y=\sin e^{\frac{1}{x}}$，则 $\dfrac{dy}{dx}=$________.

解 用复合函数求导法，

$$\frac{dy}{dx}=\cos e^{\frac{1}{x}}\left(e^{\frac{1}{x}}\right)'=\cos e^{\frac{1}{x}}e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x}\right)'=-\cos e^{\frac{1}{x}}e^{\frac{1}{x}}\frac{1}{x^2}=-\frac{e^{\frac{1}{x}}\cos e^{\frac{1}{x}}}{x^2}.$$

例 8 设 $f'(1)=1$，则 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x^2-1}=$________.

解 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{(x+1)(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x+1}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\dfrac{1}{2}f'(1)=\dfrac{1}{2}$.

例 9 设 $xy^2-e^{xy}+2=0$，则 $\dfrac{dy}{dx}=$________.

解 利用隐函数求导法，两端对 x 求导：

$$y^2+2xy\frac{dy}{dx}-e^{xy}\left(y+x\frac{dy}{dx}\right)=0$$

解出

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y(e^{xy}-y)}{x(2y-e^{xy})}.$$

例 10 设 $x=t-\dfrac{1}{t}$，$y=\dfrac{1}{2}t^2+\ln t$，则 $\dfrac{dy}{dx}=$________.

解 利用参数方程确定的函数求导法，得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{t+\frac{1}{t}}{1+\frac{1}{t^2}}=t.$$

例 11 曲线 $y=x+e^x$ 在点 $x=0$ 处的切线方程是________，法线方程是________.

解 设 $f(x)=x+e^x$，则 $f'(x)=1+e^x$，$f'(0)=2$，又当 $x=0$ 时，$y=1$，故切线方程为

$$y-1=2(x-0)，即\ y=2x+1.$$

法线方程为

$$y-1=-\frac{1}{2}(x-0)，即\ y=-\frac{1}{2}x+1.$$

例 12 设 $y=e^{\sqrt{\cos 2x}}$，则 $dy=$________ $d\cos 2x$.

解 利用一阶微分形式不变性，则

$$dy=de^{\sqrt{\cos 2x}}=e^{\sqrt{\cos 2x}}d\sqrt{\cos 2x}=e^{\sqrt{\cos 2x}}\frac{1}{2\sqrt{\cos 2x}}d\cos 2x，故填\frac{1}{2\sqrt{\cos 2x}}e^{\sqrt{\cos 2x}}.$$

例 13 设函数 $y=f(x)=\begin{cases}ax, & x\leqslant 1,\\ x^2+b, & x>1\end{cases}$ 在 $x_0=1$ 处可导，试确定常数 a 和 b 的值.

解 因为 $f(x)$ 在 $x_0=1$ 处可导，所以在 $x_0=1$ 处连续.且

$$f(1)=a,$$
$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}(x^2+b)=1+b,$$

故　$a=1+b$.

再由于 $f(x)$ 在 $x_0=1$ 处可导，其左、右导数存在且相等，即 $f'_-(1)=f'_+(1)$，于是

$$f'_-(1)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{a(1+\Delta x)-a}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}a=a,$$

$$f'_+(1)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{[(1+\Delta x)^2+b]-(1+b)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}(2+\Delta x)=2,$$

故 $a=2$.将 $a=2$ 代入 $a=1+b$，得 $b=1$.

利用 $f'_-(1)=f'_+(1)$ 的条件也可用如下方法.用求导的方法可得

$$f'(x)=\begin{cases}a, & x\leqslant 1,\\ 2x, & x>1,\end{cases}$$

又 $f'(1)$ 存在，故 $f'(1)=f'_-(1)=f'_+(1)$，但

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}f'(1)=\lim_{x\to 1^-}a=a,$$
$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}f'(1)=\lim_{x\to 1^+}2x=2,$$

于是 $a=2$.再利用在 $x=1$ 的连续结果 $a=1+b$,得 $b=1$.

例 14 按定义求 $f(x)=\sqrt{x}$ 在点 $x=1$ 和 x 处的导数.

解 $f'(1)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}=\dfrac{1}{2}$.

$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x})(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

根据导数定义求函数的导数,如果是求在一点处的导数,用 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 求较方便;如果是求在任意一点处的导数,用 $\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ 较方便.

例 15 讨论函数 $f(x)=|\sin x|$ 在点 $x=0$ 处的连续性与可导性.

解 可只考虑 x 在 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内的情形,故

$$f(x)=\begin{cases}-\sin x, & -\dfrac{\pi}{2}<x\leqslant0\\ \sin x, & 0<x<\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

由于

$$f(0-0)=\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}(-\sin x)=0,$$
$$f(0+0)=\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\sin x=0,$$

即 $f(0-0)=f(0+0)=f(0)=0$,故 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续.又

$$f'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{-\sin x-0}{x-0}=-1,$$
$$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x-0}{x-0}=1,$$

即 $f'_-(0)\neq f'_+(0)$,故 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处不可导.

例 16 求下列函数的导数:

(1) $y=\sin3x\cos5x$;　　(2) $y=3^x e^x$;

(3) $y=\dfrac{1}{x^2(1+x^2)}$;　　(4) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$;

(5) $y=\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$;　　(6) $y=\sqrt{\tan\dfrac{x}{2}}$.

解 (1) $y'=(\sin3x\cos5x)'=(\sin3x)'\cos5x+\sin3x(\cos5x)'$

$=\cos3x(3x)'\cos5x+\sin3x(-\sin5x)(5x)'$

$=3\cos3x\cos5x-5\sin3x\sin5x$.

如先将 y 做恒等交换:$y=\dfrac{1}{2}(\sin8x-\sin2x)$,则

$$y'=\left[\frac{1}{2}(\sin 8x-\sin 2x)\right]'=\frac{1}{2}(8\cos 8x-2\cos 2x)$$
$$=4\cos 8x-\cos 2x.$$

可将两种答案化为相等，留给读者来做.

(2) $y'=[(3e)^x]'=(3e)^x\ln(3e)=(3e)^x(1+\ln 3)$.

(3) $y'=\left[\dfrac{1}{x^2(1+x^2)}\right]'=\left[\dfrac{1+x^2-x^2}{x^2(1+x^2)}\right]'=\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{1+x^2}\right)'=-\dfrac{2}{x^3}+\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$

$=-\dfrac{2(1+2x^2)}{x^3(1+x^2)^2}$.

若直接求导数，则

$$y'=\frac{-[x^2(1+x^2)]'}{[x^2(1+x^2)]^2}=\frac{-[2x(1+x^2)+2x^3]}{x^4(1+x^2)^2}=-\frac{2(1+2x^2)}{x^3(1+x^2)^2}.$$

(4) $y'=[\ln(x+\sqrt{1+x^2})]'=\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

(5) $y'=\left(\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\right)'=\left(x^{\frac{7}{8}}\right)'=\dfrac{7}{8}x^{-\frac{1}{8}}$.

(6) $y'=\left(\sqrt{\tan\dfrac{x}{2}}\right)'=\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{\tan\dfrac{x}{2}}}\cdot\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{x}{2}}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}\cdot\sqrt{\dfrac{\cos\dfrac{x}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}}}\cdot\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{x}{2}}$

$=\dfrac{1}{4}\cdot\sqrt{\dfrac{2\cos^2\dfrac{x}{2}}{2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}}}\cdot\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{x}{2}}=\dfrac{\sqrt{2}\left|\cos\dfrac{x}{2}\right|}{4\sqrt{\sin x}\cos^2\dfrac{x}{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{4\sqrt{\sin x}\left|\cos\dfrac{x}{2}\right|}$.

在求函数的导数时，要求熟练掌握并记住基本初等函数的求导公式和掌握导数的四则运算法则，以及复合函数的求导法则.复合函数的求导法则，既是重点又是难点，其关键在于正确分析已知的复合函数是由哪些中间变量复合而成.

例 17 求下列函数的导数：

(1) $f(x)=e^{\sqrt{x}}$；　　　(2) $f(x)=\cos\ln x$.

解 (1) $f'(x)=e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x})'=e^{\sqrt{x}}\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$.

(2) $f'(x)=-\sin(\ln x)(\ln x)'=-\dfrac{1}{x}\sin(\ln x)$.

例 18 求 $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$ 在 $x=1$ 处的导数.

解 $f'(x)=\left[e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}\right]'=(1+x)^{\frac{1}{x}}\left[\dfrac{1}{x(1+x)}-\dfrac{\ln(1+x)}{x^2}\right]$，

故 $f'(1)=2\times\left(\dfrac{1}{2}-\ln 2\right)=1-2\ln 2$.

例 19 设曲线 $y=x\ln x$，在该曲线上的点 $P(x_0,y_0)$ 处的切线平行于直线 $y=2x$，求点 $P(x_0,y_0)$ 的坐标和切线方程.

解 由于点 $P(x_0,y_0)$ 在曲线 $y=x\ln x$ 上，故 $y_0=x_0\ln x_0$，$y'=(x\ln x)'=1+\ln x$，

$y'\Big|_{x=x_0}=1+\ln x_0$.

又曲线上的点 $P(x_0,y_0)$ 处的切线平行于直线 $y=2x$，直线 $y=2x$ 的斜率 $k=2$，故曲线上点 $P(x_0,y_0)$ 处的切线斜率是 2，即 $1+\ln x_0=2$，解得 $x_0=\mathrm{e}$，相应地得 $y_0=x_0\ln x_0=\mathrm{e}\ln\mathrm{e}=\mathrm{e}$，故 $P(x_0,y_0)=(\mathrm{e},\mathrm{e})$，所求切线方程为

$$y-\mathrm{e}=2(x-\mathrm{e})\text{，即 } 2x-y-\mathrm{e}=0.$$

例 20 设 $f(x)$ 可导，求：

(1)$[f^3(x)]'$； (2)$[f(x^3)]'$； (3)$\left[\dfrac{f(\ln x)}{x}\right]'$； (4)$[\ln f(x^3)]'$.

解 (1)$[f^3(x)]'=3f^2(x)f'(x)$；

(2)$[f(x^3)]'=3x^2f'(x^3)$；

(3)$\left[\dfrac{f(\ln x)}{x}\right]'=\dfrac{f'(\ln x)-f(\ln x)}{x^2}$；

(4)$[\ln f(x^3)]'=\dfrac{1}{f(x^3)}f'(x^3)\cdot 3x^2=\dfrac{3x^2f'(x^3)}{f(x^3)}$.

例 21 求由方程 $xy=\mathrm{e}^{x+y}$ 确定的函数 $y(x)$ 的导数.

解 1 两端对 x 求导，注意 y 是 x 的函数，则

$$y+xy'_x=\mathrm{e}^{x+y}(1+y'_x),$$

化简得

$$y'_x=\frac{y-\mathrm{e}^{x+y}}{-x+\mathrm{e}^{x+y}}.$$

解 2 利用微分形式不变性，得

$$y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y=\mathrm{e}^{x+y}(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y),$$

化简即得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y-\mathrm{e}^{x+y}}{-x+\mathrm{e}^{x+y}}.$$

解 3 设 $F(x,y)=xy-\mathrm{e}^{x+y}\equiv 0$，得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{f'_x(x,y)}{f'_y(x,y)}$，其中 $f'_x(x,y)$ 和 $f'_y(x,y)$ 分别表示 $F(x,y)$ 对 x 和 y 的偏导数.

把 y 看作常数，对 x 求导，得 $f'_x(x,y)=y-\mathrm{e}^{x+y}$，把 x 看作常数，对 y 求导，得 $f'_y(x,y)=x-\mathrm{e}^{x+y}$，

故
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{f'_x(x,y)}{f'_y(x,y)}=-\frac{y-\mathrm{e}^{x+y}}{x-\mathrm{e}^{x+y}}=\frac{y-\mathrm{e}^{x+y}}{-x+\mathrm{e}^{x+y}}.$$