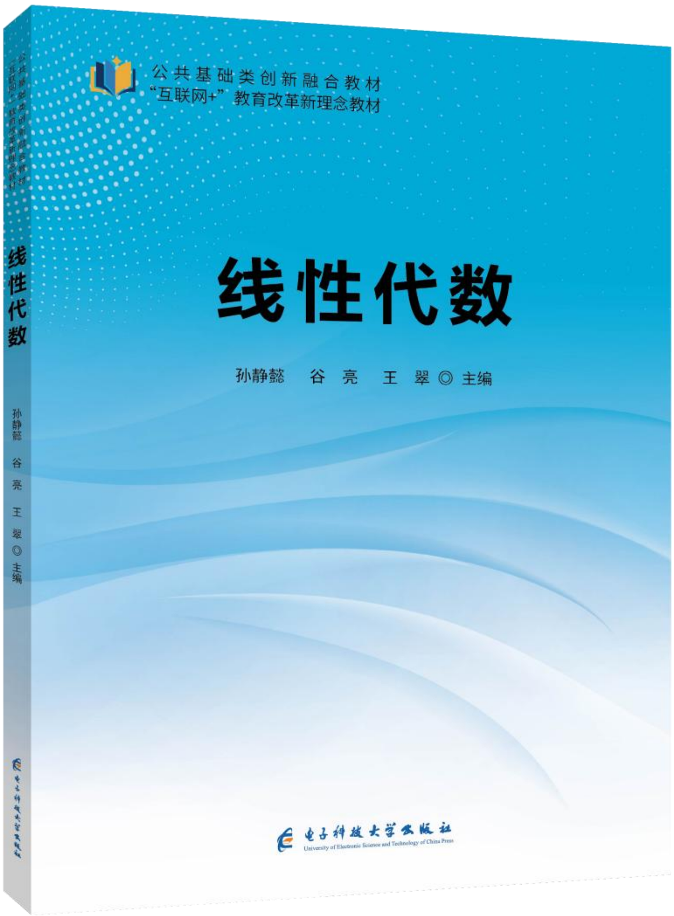
线性代数



类目：公共课
书名：线性代数
主编：孙静懿 谷 亮 王 翠
出版社： 电子科大出版社
开本：大 16 开
书号：978-7-5770-0083-1
使用层次：通用
出版时间：2023 年 5 月
定价：45 元
印刷方式：双色
是否有资源：是

公共基础类创新融合教材
"互联网+"教育改革新理念教材

线性代数

主编 ◎ 孙静懿　谷　亮　王　翠

电子科技大学出版社
University of Electronic Science and Technology of China Press

公共基础类创新融合教材 "互联网+"教育改革新理念教材

线性代数

主编 ◎ 孙静懿　谷　亮　王　翠

电子科技大学出版社

线性代数

XIANXING DAISHU

策划编辑：万晓桐
责任编辑：李　倩
封面设计：旗语书装

扫描二维码
关注更多教材信息

ISBN 978-7-5770-0083-1
定价：45.00元

公共基础类创新融合教材
“互联网+”教育改革新理念教材

线性代数

主　编 ◎ 孙静懿　谷　亮　王　翠
副主编 ◎ 付梦君　叶　立　邢亚斌
张可为　王　娜　藏晓鑫

电子科技大学出版社
University of Electronic Science and Technology of China Press
·成都·

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/ 孙静懿，谷亮，王翠主编. —成都：
电子科技大学出版社，2023.5

ISBN 978-7-5770-0083-1

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①孙… ②谷… ③王… Ⅲ. ①线性代
数-高等职业教育-教材 Ⅳ. ①O151.2

中国国家版本馆 CIP 数据核字(2023)第 015325 号

线性代数

XIANXING DAISHU

孙静懿　谷　亮　王　翠　主编

策划编辑　万晓桐
责任编辑　李　倩

出　　版　电子科技大学出版社
　　　　　成都市一环路东一段 159 号电子信息产业大厦九楼　邮编 610051
主　　页　www.uestcp.com.cn
服务电话　028-83203399
邮购电话　028-83201495

印　　刷　天津市永盈印刷有限公司
成品尺寸　210mm×285mm
印　　张　10.5
字　　数　240 千字
版　　次　2023 年 5 月第 1 版
印　　次　2023 年 5 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5770-0083-1
定　　价　45.00 元

前言

PREFACE

线性代数课程在高等院校理工科专业的教学计划中是一门基础理论课.由于线性问题广泛存在于技术科学的各个领域,某些非线性问题在一定条件下可以转化为线性问题,也常“离散化”为有限维问题来处理,因此线性代数的理论与方法已经渗透到现代科学、技术、经济、管理的各个领域,为其提供描述、处理问题的思想和方法.随着科学技术数字化和计算机的广泛应用,线性代数在现代科技和高等教育中的地位和作用愈显重要.在计算机日益普及的今天,解决大型线性方程组、求矩阵的特征值与特征向量等已经成为工程人员经常遇到的问题,因此线性代数课程所介绍的方法广泛地应用于各个学科,尤其在计算机、通信、电子、机械、电气等学科领域,这就要求学生具有关于本课程的基础知识,并熟练地掌握它的方法.

本书具有以下几个特点.

(1)从普通高等教育的实际出发,结合数学教学改革的实际经验,按照“以应用为目的,以必需、够用为度”的原则,以“理解基本概念,掌握运算方法及应用”为依据,略去了不必要的逻辑推导,强化了基本概念的教学.

(2)编写的内容力求简洁易懂,注意把握好理论推导的深度,注重基本运算能力、分析问题和解决问题能力的培养,贯彻理论联系实际和启发式教学原则,深入浅出,通俗易懂.

(3)注意从实际问题中引入数学知识,再应用数学知识解决各种实际问题,加深学生对数学知识的理解,从而使数学源于实际,又应用于实际.

(4)充分考虑普通高等学校学生的数学基础,较好地处理了初等数学与高等数学的过渡与衔接.适度淡化逻辑论证,充分利用几何说明,帮助学生理解有关概念和理论.

(5)结合重点和难点,书中选择了数量适中、难度适当的例题,并突出数学思维方法.

(6)为了方便教与学,每节配有习题,每章配有复习题,书后附有参考答案.

由于作者水平和编写时间有限,书中难免存在不妥之处,敬请各位专家及广大读者提出宝贵意见,以便修订时改进.

编　者

2023 年 2 月

目　录 CONTENTS

第1章 行列式

行列式是线性方程组理论的一个组成部分，是对中学数学有关内容的提高和延展，也是一种重要的数学工具.除此之外，行列式在许多理论和实际问题中也发挥着重要作用.

本章主要介绍行列式的定义、基本性质、计算方法及其在求解线性方程组中的应用.

1.1 行列式的定义

1.1.1 二阶和三阶行列式

二阶和三阶行列式

行列式这个概念究竟是如何形成的呢？这就得从求解方程个数和未知量个数相等的一次(线性)方程组讲起.

在初等代数中,用加、减消元法求解一个二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases} \tag{1.1}$$

的具体步骤是:先从方程组(1.1)里消去 x_2 而求得 x_1,这只要将方程组(1.1) 的第 1、第 2 两个式子分别乘以 a_{22} 与 $-a_{12}$,然后再相加,就得到

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=a_{22}b_1-a_{12}b_2.$$

同理,也可以从方程组(1.1)里消去 x_1 而求得 x_2,这只要将方程组(1.1)的第 1、第 2 两个式子分别乘以$-a_{21}$与 a_{11},然后再相加,得到

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=a_{11}b_2-a_{21}b_1,$$

即

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=a_{22}b_1-a_{12}b_2 \\ (a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=a_{11}b_2-a_{21}b_1 \end{cases}.$$

如果未知量 x_1,x_2 的系数 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq0$,那么,这个线性方程组(1.1)有唯一解:

$$x_1=\frac{a_{22}b_1-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\ x_2=\frac{a_{11}b_2-a_{21}b_1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}.$$

为了便于使用与记忆,我们引进二阶行列式的概念.

如果把线性方程组(1.1)中未知量 x_1,x_2 的系数按原来的位置写成两行两列的数表,并用两根竖线加以标出,那么,便得到一个二阶行列式,对此除引入字母 D 作为记号外,还规定

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}. \tag{1.2}$$

式(1.2)最右边的式子称为二阶行列式 D 的展开式.

于是,线性方程组(1.1)的解可以表示为

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\ x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

若记

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}=b_1a_{22}-b_2a_{12},\ D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=b_2a_{11}-b_1a_{21},$$

则线性方程组(1.1)的解可表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D}. \tag{1.3}$$

由此可见,二阶行列式的引入与二元一次方程组有关,它表示排成两行两列的 4 个数在规定运算下得到的一个数值.

类似地,对于三元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases} \tag{1.4}$$

为了简单地表达它的解,我们引进三阶行列式的概念.三阶行列式就是排成三行三列的 9 个数的一张数表,其展开式规定为

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &=(-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+(-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+(-1)^{1+3}a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}) \\ &=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}. \end{aligned}$$

例 1　计算三阶行列式

$$\begin{vmatrix} -1 & 6 & 7 \\ 4 & 0 & 9 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}.$$

解

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -1 & 6 & 7 \\ 4 & 0 & 9 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} &=(-1)^{1+1}\times(-1)\begin{vmatrix} 0 & 9 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}+(-1)^{1+2}\times 6\begin{vmatrix} 4 & 9 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}+(-1)^{1+3}\times 7\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &=(-1)\times(0\times5-9\times1)-6\times(4\times5-9\times2)+7\times(4\times1-0\times2) \\ &=9-12+28=25. \end{aligned}$$

所以,三阶行列式也是在规定运算下的一个数值,它可通过转化为二阶行列式来计算得到.三阶行列式可以用来表达三元一次方程组(1.4)的解.如果方程组(1.4)的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\neq 0,$$

那么方程组有唯一解,其解同样可表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D},\ x_3=\frac{D_3}{D}, \tag{1.5}$$

其中

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\ D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

在方程组(1.4)的解的表达式(1.5)中,$x_i(i=1,2,3)$的分母均是方程组(1.4)的系数行列式 D,$x_i(i=1,2,3)$的分子是将系数行列式 D 中的第 i 列换成方程组(1.4)中的常数项,其余列不动所得到的行列式,并简记为 $D_i(i=1,2,3)$.

例 2 解方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=2 \\ -2x_1+x_2-x_3=-1. \\ x_1+3x_2-x_3=-2 \end{cases}$$

解 方程组的系数行列式为

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}-2\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=-11\neq 0,$$

又计算得

$$D_1=\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix}=5,\ D_2=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}=-2,\ D_3=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}=-23,$$

所以方程组的解是

$$x_1=\frac{D_1}{D}=-\frac{5}{11},\ x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{2}{11},\ x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{23}{11}.$$

显然,对于未知数个数等于方程个数的二元、三元线性方程组,当它们的系数行列式不等于零时,利用行列式这一工具求解十分简便,结果也容易记忆.因此我们想到,对于未知数的个数等于方程的个数的 $n(n>3)$元线性方程组,是否也有类似的结果?这就需要引入 $n(n>3)$阶行列式的定义.

1.1.2　n 阶行列式

前面,我们首先定义了二阶行列式,并指出了三阶行列式可通过转化为二阶行列式来计算.下面,按照这种思路给出 n 阶行列式的一种归纳定义.

定义 1　由 n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 组成的记号

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 **n 阶行列式**,其中横排称为**行**,竖排称为**列**.它表示一个由确定的递推运算关系所得到的数.

当 $n=1$ 时,

$$D_1=|a_{11}|=a_{11};$$

当 $n=2$ 时,

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21};$$

当 $n=3$ 时,

$$D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}.$$

需要指出的是:当 $n=1,2,3$ 时,可以利用上述规定求行列式的值,但是当 $n>3$ 时,如何求解呢?为了寻求普遍有效的展开方法,下面介绍行列式元素的余子式与代数余子式的概念.

定义 2　在 n 阶行列式 D 中,划去元素 a_{ij} 所在第 i 行、第 j 列的元素,剩余元素按原顺序组成的一个 $n-1$ 阶行列式,称为 a_{ij} 的**余子式**,记为 M_{ij}.在 M_{ij} 前乘上 $(-1)^{i+j}$,称为 a_{ij} 的**代数余子式**,记为 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

例如,在四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

中,元素 a_{32} 的余子式和代数余子式分别为

$$M_{32}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},\ A_{32}=(-1)^{3+2}M_{32}=-M_{32}.$$

定理 行列式 D 等于它的任意一行(列)所有元素与其对应代数余子式的乘积之和.即设 D 的第 i 行元素 $a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}$ 对应的代数余子式分别是 $A_{i1},A_{i2},\cdots,A_{in}$,则

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik}\quad(i=1,2,\cdots,n).\tag{1.6}$$

式(1.6)称为行列式 D 按第 i 行展开的展开式.若按第 j 列展开,则展开式为

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}A_{kj}\quad(j=1,2,\cdots,n).\tag{1.7}$$

例 3 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}3&0&0&-5\\-4&1&0&2\\6&5&7&0\\-3&4&-2&-1\end{vmatrix}.$$

解 由行列式的定理,得

$$\begin{aligned}D&=3\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1&0&2\\5&7&0\\4&-2&-1\end{vmatrix}+(-5)\times(-1)^{1+4}\begin{vmatrix}-4&1&0\\6&5&7\\-3&4&-2\end{vmatrix}\\&=3\times\left[1\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}7&0\\-2&-1\end{vmatrix}+2\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}5&7\\4&-2\end{vmatrix}\right]\\&\quad+5\times\left[(-4)\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}5&7\\4&-2\end{vmatrix}+1\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}6&7\\-3&-2\end{vmatrix}\right]\\&=3\times[-7+2\times(-10-28)]+5\times[(-4)\times(-10-28)-(-12+21)]=466.\end{aligned}$$

例 4 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}0&a_{12}&0&0\\0&0&0&a_{24}\\a_{31}&0&0&0\\0&0&a_{43}&0\end{vmatrix}.$$

解 由行列式的定理,得

$$D=a_{12}\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}0&0&a_{24}\\a_{31}&0&0\\0&a_{43}&0\end{vmatrix}$$

$$=-a_{12}\cdot a_{24}\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}a_{31}&0\\0&a_{43}\end{vmatrix}=-a_{12}a_{24}a_{31}a_{43}.$$

例 5　计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}3&2&0&8\\4&-9&2&10\\-1&6&0&-7\\0&0&0&5\end{vmatrix}.$$

解　因为第三列中有三个零元素，可按第三列展开，得

$$D=2\times(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}3&2&8\\-1&6&-7\\0&0&5\end{vmatrix},$$

对于上面的三阶行列式，按第三行展开，得

$$D=-2\times5\times(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}3&2\\-1&6\end{vmatrix}=-200.$$

注　意

计算行列式时，选择先按零元素多的行或列展开可大大简化行列式的计算，这是计算行列式的常用技巧之一.

1.1.3　几个常用的特殊行列式

形如

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\0&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}\text{ 与 }\begin{vmatrix}a_{11}&0&\cdots&0\\a_{21}&a_{22}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

的行列式分别称为上三角行列式与下三角行列式，其特点是主对角线以下（上）的元素全为零.

我们先来计算下三角行列式的值.根据 n 阶行列式的定义，每次均通过按第一行展开的方法来降低行列式的阶数，而每次第一行都仅有第一项不为零，故有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{43} & a_{44} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \cdots = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

对上三角形行列式,我们可以每次通过按最后一行展开的方法来降低行列式的阶数,而每次最后一行都仅有最后一项不为零,同样可得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

特别地,非主对角线上元素全为零的行列式称为**对角行列式**,易知

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

综上所述可知,上、下三角行列式和对角行列式的值都等于其主对角线上元素的乘积.

习题 1.1

1. 计算下列二阶行列式.

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$; (3) $\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ -7 & 5 \end{vmatrix}$.

2. 计算下列三阶行列式.

(1) $\begin{vmatrix} 7 & 3 & 9 \\ -1 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 8 \\ 4 & 6 & -7 \\ 2 & 3 & 6 \end{vmatrix}$; (3) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -7 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$.

3. 求行列式 $\begin{vmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 5 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ 中元素 2 和 -2 的代数余子式.

4. 已知四阶行列式 D 中的第 3 列元素依次为 $-1,2,0,1$，它们的余子式依次为 $5,3,-7,4$，求 D.

5. 证明：$\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=(a-b)^3$.

1.2 行列式的性质与计算

行列式的奥妙在于对行列式的行或列进行了某些变换[如行与列互换、交换两行(列)位置、某行(列)乘以某个数、某行(列)乘以某数后加到另一行(列)等]后，行列式虽然会发生相应的变化，但变换前后两个行列式的值却仍保持着线性关系，这意味着我们可以利用这些关系大大简化高阶行列式的计算.本节我们首先要讨论行列式在这些方面的重要性质，然后进一步讨论如何利用这些性质计算高阶行列式的值.

行列式的性质

1.2.1 行列式的性质

将行列式 D 的行与列互换后得到的行列式，称为 D 的**转置行列式**，记为 D^{T} 或 D'，即若

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 1　行列式与它的转置行列式相等，即 $D=D^{\mathrm{T}}$.

注　意

由性质 1 可知，行列式中的行与列具有相同的地位，行列式的行具有的性质，它的列也同样具有.

性质 2　交换行列式的两行(列),行列式变号.

注　意

交换 i,j 两行(列)记为 $r_i \leftrightarrow r_j(c_i \leftrightarrow c_j)$.

推论 1　若行列式中有两行(列)的对应元素相同,则此行列式为零.

证明　互换 D 中相同的两行(列),有 $D=-D$,故 $D=0$.

性质 3　用数 k 乘行列式的某一行(列),等于用数 k 乘此行列式.

例如

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=kD.$$

注　意

第 i 行(列)乘以 k,记为 $r_i \times k$(或 $c_i \times k$).

推论 2　行列式的某一行(列)中所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面.

推论 3　行列式中若有两行(列)对应元素成比例,则此行列式为零.

例如,行列式 $D=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 3 & -6 & 3 \\ -5 & 10 & 4 \end{vmatrix}$,因为第一列与第二列对应元素成比例,根据推论 3,可直接得到 $D=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 3 & -6 & 3 \\ -5 & 10 & 4 \end{vmatrix}=0$.

例 1　设 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=1$，求 $\begin{vmatrix} 6a_{11} & -2a_{12} & -10a_{13} \\ -3a_{21} & a_{22} & 5a_{23} \\ -3a_{31} & a_{32} & 5a_{33} \end{vmatrix}$.

解

$$\begin{vmatrix} 6a_{11} & -2a_{12} & -10a_{13} \\ -3a_{21} & a_{22} & 5a_{23} \\ -3a_{31} & a_{32} & 5a_{33} \end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix} -3a_{11} & a_{12} & 5a_{13} \\ -3a_{21} & a_{22} & 5a_{23} \\ -3a_{31} & a_{32} & 5a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=-2\times(-3)\times5\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=-2\times(-3)\times5\times1=30.$$

性质 4　若行列式的某一行(列)的元素都是两数之和，即若

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 5　将行列式的某一行(列)的所有元素都乘以数 k 后加到另一行(列)对应位置的元素上，行列式的值不变.

以三阶行列式为例，将数 k 乘第一行加到第二行上，有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+ka_{11} & a_{22}+ka_{12} & a_{23}+ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

性质 5 可由性质 4 和推论 3 证得.

注　意

第 j 行(列)乘以 k 加到第 i 行(列)上，记为 $r_i+kr_j(c_i+kc_j)$.

1.2.2 利用“三角化”计算行列式

计算行列式时，常用行列式的性质把它转化为三角形行列式来计算.例如，化为上三角形行列式的步骤是：如果第一列第一个元素为 0，先将第一行与其他行交换，使得第一列第一个元素不为 0，然后把第一行分别乘以适当的数加到其他各行，使得第一列除第一个元素外其余元素全为 0；再用同样的方法处理除去第一行和第一列后余下的低一阶行列式；如此继续下去，直至使它成为上三角形行列式，这时主对角线上元素的乘积就是所求行列式的值.

例 2 计算 $D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$.

解
$$D \xlongequal{c_1 \leftrightarrow c_2} -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 3 & -3 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4+5r_1]{r_2-r_1} -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix}$$
$$\xlongequal{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-8r_2]{r_3+4r_2} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & -10 & 15 \end{vmatrix}$$
$$\xlongequal{r_4+\frac{5}{4}r_3} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 5/2 \end{vmatrix} = 40.$$

例 3 计算 $D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

解　注意到行列式中各行(列)4个数之和都为6,故可把第2,3,4行同时加到第1行,提出公因子6,然后各行减去第1行,化为上三角形行列式来计算:

$$D\xlongequal{r_1+r_2+r_3+r_4}\begin{vmatrix}6&6&6&6\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}=6\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}\xlongequal[r_4-r_1]{\substack{r_2-r_1\\r_3-r_1}}6\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{vmatrix}=48.$$

注　意

仿照上述方法可得到结论:

$$\begin{vmatrix}a&b&b&\cdots&b\\b&a&b&\cdots&b\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\b&b&b&\cdots&a\end{vmatrix}=[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

例4　计算 $D=\begin{vmatrix}a_1&-a_1&0&0\\0&a_2&-a_2&0\\0&0&a_3&-a_3\\1&1&1&1\end{vmatrix}$.

解　根据行列式的特点,可将第1列加至第2列,然后将第2列加至第3列,再将第3列加至第4列,目的是使D中的零元素增多.

$$D\xlongequal{c_2+c_1}\begin{vmatrix}a_1&0&0&0\\0&a_2&-a_2&0\\0&0&a_3&-a_3\\1&2&1&1\end{vmatrix}\xlongequal{c_3+c_2}\begin{vmatrix}a_1&0&0&0\\0&a_2&0&0\\0&0&a_3&-a_3\\1&2&3&1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_4+c_3}\begin{vmatrix}a_1&0&0&0\\0&a_2&0&0\\0&0&a_3&0\\1&2&3&4\end{vmatrix}=4a_1a_2a_3.$$

例 5 计算 $D=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d \end{vmatrix}$.

解 从第 4 行开始，后一行减前一行.

$$D\xlongequal[r_2-r_1]{\substack{r_4-r_3\\ r_3-r_2}}\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & a & 2a+b & 3a+2b+c \\ 0 & a & 3a+b & 6a+3b+c \end{vmatrix}\xlongequal[r_3-r_2]{r_4-r_3}\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & a & 3a+b \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4-r_3}\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}=a^4.$$

此外，在行列式的计算中，还将行列式的性质与行列式按行(列)展开的方法结合起来使用.一般可先用行列式的性质将行列式中某一行(列)化为仅含有一个非零元素，再将行列式按此行(列)展开，化为低一阶的行列式，如此继续下去，直到化为二阶行列式为止.

注 意

按行(列)展开计算行列式的方法称为降阶法.

例 6 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}$.

解 $$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}\xlongequal[r_4+2r_3]{r_1+2r_3}\begin{vmatrix} 7 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 7 & 0 & -2 & -5 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)\times(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}7&1&4\\1&1&2\\7&-2&-5\end{vmatrix}\xlongequal[r_3+2r_2]{r_1-r_2}\begin{vmatrix}6&0&2\\1&1&2\\9&0&-1\end{vmatrix}$$

$$=1\times(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}6&2\\9&-1\end{vmatrix}=-6-18=-24.$$

例 7　计算行列式 $D=\begin{vmatrix}2&3&-1&0\\1&7&2&5\\2&-2&3&0\\6&-4&-1&0\end{vmatrix}$.

解　$$D=\begin{vmatrix}2&3&-1&0\\1&7&2&5\\2&-2&3&0\\6&-4&-1&0\end{vmatrix}=5\times(-1)^{2+4}\begin{vmatrix}2&3&-1\\2&-2&3\\6&-4&-1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_3-3r_1]{r_2-r_1}5\begin{vmatrix}2&3&-1\\0&-5&4\\0&-13&2\end{vmatrix}=5\times2\begin{vmatrix}-5&4\\-13&2\end{vmatrix}$$

$$=10\times(-10+52)=420.$$

例 8　证明 n 阶范德蒙(Vandermonde)行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\a_1&a_2&\cdots&a_n\\a_1^2&a_2^2&\cdots&a_n^2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_1^{n-1}&a_2^{n-1}&\cdots&a_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j).$$

其中记号 $\prod$ 表示全体同类因子的乘积.

证明　用数学归纳法.

当 $n=2$ 时，$D_2=\begin{vmatrix}1&1\\a_1&a_2\end{vmatrix}=a_2-a_1$，结论成立.

假设对 $n-1$ 阶成立，要证明对 n 阶时结论也成立.为此，设法把 D_n 降阶.将 D_n 从最后一行开始，从下到上顺次后行减去前行的 a_1 倍，得

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & a_2-a_1 & \cdots & a_n-a_1\\ 0 & a_2(a_2-a_1) & \cdots & a_n(a_n-a_1)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & a_2^{n-2}(a_2-a_1) & \cdots & a_n^{n-2}(a_n-a_1)\end{vmatrix},$$

将上面的行列式按第 1 列展开，然后把每一列的公因子$(a_i-a_1)(i=2,3,\cdots,n)$提出来，就有

$$D_n=(a_2-a_1)(a_3-a_1)\cdots(a_n-a_1)\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ a_2 & a_3 & \cdots & a_n\\ a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2}\end{vmatrix},$$

上式右端的行列式是 $n-1$ 阶范德蒙行列式，按归纳法假设知，它等于

$$\prod_{2\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j),$$

所以

$$D_n=(a_2-a_1)(a_3-a_1)\cdots(a_n-a_1)\prod_{2\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j)=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j). \quad (1.8)$$

这就是著名的**范德蒙行列式**，其结果在行列式的计算中可作为公式使用.

计算行列式的方法很多，也很灵活.要掌握行列式的计算方法，应加强练习，在练习中总结经验.

习题 1.2

1. 用行列式的性质计算下列行列式.

(1) $\begin{vmatrix}7 & 10 & 13\\ 8 & 11 & 14\\ 9 & 12 & 15\end{vmatrix}$；　(2) $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ x & y & z\\ x^2 & y^2 & z^2\end{vmatrix}$；　(3) $\begin{vmatrix}3 & 1 & -1 & 0\\ 5 & 1 & 3 & -1\\ 2 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -5 & 3 & 1\end{vmatrix}$；

(4) $\begin{vmatrix}34\,215 & 35\,215\\ 28\,092 & 29\,092\end{vmatrix}$；　(5) $\begin{vmatrix}103 & 100 & 204\\ 199 & 200 & 395\\ 301 & 300 & 600\end{vmatrix}$；　(6) $\begin{vmatrix}-ab & ac & ae\\ bd & -cd & de\\ bf & cf & -ef\end{vmatrix}$.

2. 用行列式的性质证明下列等式.

$$\begin{vmatrix}y+z & z+x & x+y\\ x+y & y+z & z+x\\ z+x & x+y & y+z\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}x & y & z\\ z & x & y\\ y & z & x\end{vmatrix}.$$

3. 用降阶法计算下列行列式.

(1) $\begin{vmatrix}1+x & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1-x & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1+y & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1-y\end{vmatrix}$；　(2) $\begin{vmatrix}0 & a & b & a\\ a & 0 & a & b\\ b & a & 0 & a\\ a & b & b & 0\end{vmatrix}$.

1.3 克莱姆(Cramer)法则

克莱姆(Cramer)法则

我们知道,对三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases},$$

在其系数行列式 $D\neq 0$ 的条件下,有唯一解:

$$x_1=\frac{D_1}{D},x_2=\frac{D_2}{D},x_3=\frac{D_3}{D}.$$

其中

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

那么,对于更一般的线性方程组是否有类似的结果呢?答案是肯定的.在引入克莱姆法则之前,我们先介绍有关 n 阶线性方程组的概念.含有 n 个未知数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}, \tag{1.9}$$

称为 **n 元线性方程组**.当其右端的常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 不全为零时,线性方程组(1.9)称为**非齐次线性方程组**,当 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 全为零时,线性方程组(1.9)称为**齐次线性方程组**,即

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0 \end{cases}. \tag{1.10}$$

线性方程组(1.9)的系数 a_{ij} 构成的行列式称为该方程组的系数行列式 D,即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

定理 1(克莱姆法则) 若线性方程组(1.9)的系数行列式 $D\neq 0$,则线性方程组(1.9)有唯一解,其解为

$$x_j=\frac{D_j}{D}\quad (j=1,2,\cdots,n), \tag{1.11}$$

其中 $D_j(j=1,2,\cdots,n)$是把 D 中第 j 列元素 $a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{nj}$ 对应地换成常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$,而其余各列保持不变所得到的行列式.

例 1 用克莱姆法则解方程组

$$\begin{cases} 2x_1+x_2-5x_3+x_4=8 \\ x_1-3x_2-6x_4=9 \\ 2x_2-x_3+2x_4=-5 \\ x_1+4x_2-7x_3+6x_4=0 \end{cases}.$$

解 $$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-r_2]{r_1-2r_2} \begin{vmatrix} 0 & 7 & -5 & 13 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -7 & 12 \end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix} 7 & -5 & 13 \\ 2 & -1 & 2 \\ 7 & -7 & 12 \end{vmatrix} \xlongequal[c_3+2c_2]{c_1+2c_2} -\begin{vmatrix} -3 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -7 & -7 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -7 & -2 \end{vmatrix} =27,$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 8 & 1 & -5 & 1 \\ 9 & -3 & 0 & -6 \\ -5 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}=81,\quad D_2=\begin{vmatrix} 2 & 8 & -5 & 1 \\ 1 & 9 & 0 & -6 \\ 0 & -5 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -7 & 6 \end{vmatrix}=-108,$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 & 1 \\ 1 & -3 & 9 & -6 \\ 0 & 2 & -5 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 6 \end{vmatrix}=-27,\quad D_4=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 8 \\ 1 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 2 & -1 & -5 \\ 1 & 4 & -7 & 0 \end{vmatrix}=27,$$

所以

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{81}{27}=3,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{-108}{27}=-4,$$

$$x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{-27}{27}=-1,\quad x_4=\frac{D_4}{D}=\frac{27}{27}=1.$$

一般来说，用克莱姆法则求线性方程组的解时，计算量是比较大的.对具体的数字线性方程组，当未知数较多时往往可用计算机来求解.目前用计算机解线性方程组已经有了一套成熟的方法.

克莱姆法则在一定条件下给出了线性方程组解的存在性、唯一性，与其在计算方面的作用相比，克莱姆法则更具有重大的理论价值.除求解公式(1.11)，克莱姆法则还可叙述为下面的定理.

定理 2　如果线性方程组(1.9)的系数行列式 $D\neq 0$，则线性方程组(1.9)一定有解，且解是唯一的.

在解题或证明中，常用到定理 2 的逆否定理.

定理 2′　如果线性方程组(1.9)无解或解不是唯一的，则它的系数行列式必为零.

对齐次线性方程组(1.10)，易见 $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$ 一定是该方程组的解，称其为齐次线性方程组(1.10)的**零解**.把定理 2 应用于齐次线性方程组(1.10)，可得到下列结论.

定理 3　如果齐次线性方程组(1.10)的系数行列式 $D\neq 0$，则齐次线性方程组(1.10)只有零解.

定理 3′　如果齐次线性方程组(1.10)有非零解，则它的系数行列式 $D=0$.

注　意

今后还将进一步证明，如果齐次线性方程组的系数行列式 $D=0$，则齐次线性方程组(1.10)有非零解.

例 2　判断齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3+3x_4=0\\ x_1+2x_2+3x_3-x_4=0\\ 3x_1-x_2-x_3-2x_4=0\\ 2x_1+3x_2-x_3-x_4=0\end{cases}$$

是否有非零解.

解 因为系数行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \end{vmatrix}=-153\neq 0$，所以该方程组只有零解.

例 3 λ 为何值时，齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1- 2x_2+ 4x_3=0 \\ (1-\lambda)2x_1+(3-\lambda)x_2+ x_3=0 \\ x_1+ x_2+(1-\lambda)x_3=0 \end{cases}$$

有非零解？

解 由定理 3′知，若所给齐次线性方程组有非零解，则其系数行列式 $D=0$.

$$D=\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 4 \\ 2 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \xlongequal{c_2-c_1} \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3+\lambda & 4 \\ 2 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-3)(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}+(1-\lambda)(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-3)[-2(1-\lambda)+1]+(1-\lambda)[(1-\lambda)^2-4]$$

$$=(1-\lambda)^3+2(1-\lambda)^2+\lambda-3$$

$$=\lambda(\lambda-2)(3-\lambda).$$

如果齐次线性方程组有非零解，则 $D=0$，即 $\lambda=0$ 或 $\lambda=2$ 或 $\lambda=3$ 时，齐次线性方程组有非零解.

习题 1.3

1. 用克莱姆法则解下列线性方程组.

(1) $\begin{cases} 2x+ y+3z=9 \\ 3x-5y+ z=-4 \\ 4x-7y+ z=5 \end{cases}$；

(2) $\begin{cases} 2x+ 5y+4z=10 \\ x+ 3y+2z=6 \\ 2x+10y+9z=20 \end{cases}$；

(3) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 5 \\ 3x_1 - 7x_2 + 3x_3 - x_4 = -1 \\ 5x_1 - 9x_2 + 6x_3 + 2x_4 = 7 \\ 4x_1 - 6x_2 + 3x_3 + x_4 = 8 \end{cases}$;

(4) $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 7 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 3 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 8x_4 = -7 \end{cases}$.

2. 判断齐次线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ 5x_1 + 8x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

是否仅有零解.

3. λ, μ 取何值时,齐次线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + \mu x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2\mu x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

有非零解?

本章小结

一、基本概念

n 阶行列式,余子式,代数余子式,转置行列式,对角行列式,上(下)三角行列式.

二、基本内容

1. n 阶行列式的展开式

n 阶行列式等于它的任意一行(列)所有元素与其对应代数余子式的乘积之和.

2. 行列式的性质

性质 1　行列式与它的转置行列式相等.

性质 2　交换行列式的两行(列),行列式变号.

推论 1　若行列式中有两行(列)的对应元素相同,则此行列式为零.

性质 3　用数 k 乘行列式的某一行(列),等于用数 k 乘此行列式.

推论 2　行列式的某一行(列)中所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面.

推论 3　行列式中若有两行(列)元素成正比例,则此行列式为零.

性质 4　若行列式的某一行(列)的元素都是两数之和,则此行列式可以写成两个行列式之和.这两个行列式是分别以这两个数为所在行(列)对应位置的元素,其他位置的元素与原行列式相同.

性质 5　将行列式的某一行(列)的所有元素都乘以数 k 后加到另一行(列)对应位置的元素上,行列式的值不变.

3. 克莱姆法则

若线性方程组的系数行列式 $D\neq 0$,则线性方程组有唯一解,其解为

$$x_j=\frac{D_j}{D}(j=1,2,\cdots,n),$$

其中 $D_j(j=1,2,\cdots,n)$是把 D 中第 j 列元素 $a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{nj}$ 相应地换成常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$,而其余各列保持不变所得到的行列式.

三、基本方法

计算行列式的方法有两种:一是按一行(列)展开法,二是化上(下)三角行列式法.

复习题 1

1. 用二、三阶行列式解下列方程组.

(1) $\begin{cases}7x+8y=6\\3x-5y=11\end{cases}$;　　(2) $\begin{cases}6x_1-4x_2=10\\5x_1+7x_2=29\end{cases}$;

(3) $\begin{cases}2x+3y-z=-4\\x-y+z=5\\7x-6y-4z=1\end{cases}$;　　(4) $\begin{cases}x_1+2x_2+4x_3=31\\5x_1+x_2+2x_3=29.\\3x_1-x_2+x_3=10\end{cases}$

2. 求出行列式 $\begin{vmatrix}5x & 1 & 3x\\x & x & 1\\1 & 2 & x\end{vmatrix}$ 中包含 x^2 和 x^3 的项.

3. 在一个 n 阶行列式中,等于零的元素如果比 n^2-n 还多,那么这个行列式的值等于多少?试说明理由.

4. 计算下列行列式.

(1) $\begin{vmatrix}1 & -1 & 2\\3 & 2 & 1\\0 & 1 & 4\end{vmatrix}$;　　(2) $\begin{vmatrix}2 & 0 & 3\\7 & 1 & 6\\6 & 0 & 5\end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} a+x & x & x \\ x & b+x & x \\ x & x & c+x \end{vmatrix}$；　　(4) $\begin{vmatrix} \alpha^2+1 & \alpha\beta & \alpha\gamma \\ \alpha\beta & \beta^2+1 & \beta\gamma \\ \alpha\gamma & \beta\gamma & \gamma^2+1 \end{vmatrix}$；

(5) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$；　　(6) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 3 \end{vmatrix}$；

(7) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$；　(8) $\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \cdots & a_{n-1}^{n-1} \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$；

(9) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$　$(a_i \neq 0, i=1, 2, \cdots, n)$.

5. 证明下列恒等式.

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (ab+ac+bc)(b-a)(c-a)(c-b)$；

(2) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ c_{11} & c_{12} & b_{11} & b_{12} \\ c_{21} & c_{22} & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$.

6. 用克莱姆法则解下列线性方程组.

(1) $\begin{cases} 3x_1+2x_2+2x_3=1 \\ x_1+x_2+2x_3=2 \\ x_1+x_2+x_3=3 \end{cases}$；

(2) $\begin{cases} 2x_1+x_2-5x_3+x_4=8 \\ x_1-3x_2-6x_4=9 \\ 2x_2-x_3+2x_4=-5 \\ x_1+4x_2-7x_3+6x_4=0 \end{cases}$.

7. 判断下列齐次线性方程组是否有唯一解.

(1) $\begin{cases} 3x-2y+z=0 \\ x-z=0 \\ 2x+y+z=0 \end{cases}$;

(2) $\begin{cases} x+4y-2z+3t=0 \\ 5x-y+z+2t=0 \\ 7x+7y-3z+8t=0 \\ 4y+5z-t=0 \end{cases}$.

第2章 矩阵

矩阵是线性代数的一个主要研究对象,也是数学及其他科学技术的一个重要工具.在本课程中,矩阵是研究线性变换、向量的线性相关性及线性方程组的解法等的有力工具,在线性代数中占有重要地位.

本章主要介绍矩阵及其运算、逆矩阵、分块矩阵和初等矩阵等基本概念.

2.1 矩阵及其运算

2.1.1 矩阵的概念

矩阵这一概念亦如行列式一样，是从研究线性方程组的问题中引出来的.不过行列式是从未知数个数与方程个数相同这种特殊的线性方程组引出的，而矩阵则是从线性方程组的一般形式引出的，所以矩阵的应用比行列式的应用广泛得多.线性方程组的一般形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}, \tag{2.1}$$

其中未知数的个数 n 与方程的个数 m 未必相同.

我们知道，线性方程组是完全由未知数前面的系数及其常数项所决定的，未知数的记号在线性方程组中是不起什么实质性作用的.因此，为方便起见，从每一个线性方程中把未知数分离出来，剩下的系数及其常数项按它们在式(2.1)中的相对位置排成矩形形状的数表，即

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

从而，我们可把对线性方程组(2.1)的研究转化为对矩形数表(2.2)的研究.这个矩形数表可以简洁并且明确地把线性方程组的特征表示出来，矩形数表(2.2)中的每一个元素不能随意变动，它们都有各自的意义.

这种矩形数表在实际生活中的应用非常广泛，如商店中的商品价目表、工厂中产品原材料的消耗表、物资调运方案等.一般地，我们可把类似于(2.2)的这种矩形数表作为一个研究对象，这就是矩阵的概念.

定义 1 由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$排成的 m 行 n 列并用方括号括起来的矩形数表，称为 $m\times n$ **矩阵**，记作

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

横的各排称为矩阵的**行**，纵的各排称为矩阵的**列**，a_{ij} 称为此矩阵的第 i 行第 j 列的**元素**.通常

用大写黑体字母 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{C}$ 等表示矩阵,有时为了标明一个矩阵的行数和列数,用 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 或 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 表示一个 m 行 n 列的矩阵.其中有以下 7 种特例:

(1) 当 $m=n$ 时,矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为 **n 阶矩阵**或(**n 阶方阵**);

(2) 当 $m=1$ 时,矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为**行矩阵**,此时

$$\boldsymbol{A}=(a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n});$$

(3) 当 $n=1$ 时,矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为**列矩阵**,此时

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix};$$

(4) 当所有的 $a_{ij}=0(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 时,称 $\boldsymbol{A}$ 为**零矩阵**,一般记为 $\boldsymbol{O}_{m\times n}$ 或 $\boldsymbol{O}$.

(5) n 阶矩阵中,主对角线(从左上角到右下角)以外元素皆为零的方阵:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

称为 **n 阶对角矩阵.**

(6) 主对角线上元素皆为 1 的 n 阶对角矩阵:

$$\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

称为 **n 阶单位矩阵**,简记为 $\boldsymbol{E}$ 或 $\boldsymbol{E}_n$.

(7) 主对角线下(上)方元素皆为零的矩阵:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

称为**上(下)三角矩阵.**

定义 2　若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行数、列数分别相等,则称 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ 为**同型矩阵.**

定义 3　若矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 和矩阵 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ 为同型矩阵,并且对应的元素相等,即 $a_{ij}=b_{ij}$ $(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$,则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ **相等**,记为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

2.1.2 矩阵的加法

定义 4 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$ 为同型矩阵，把矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 对应元素相加得到新的矩阵 $\boldsymbol{C}$，则称矩阵 $\boldsymbol{C}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的**和**，记为 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，即

矩阵的加法

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

这样就引进了矩阵的加法运算.由定义知，只有同型矩阵才可以相加，不难验证，矩阵加法具有和实数加法相同的性质.

矩阵的加法具有以下运算律（设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ 都是 $m\times n$ 矩阵）：

（1）交换律：$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$；

（2）结合律：$\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}$.

其特例为

$$\boldsymbol{O}+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A}.$$

定义 5 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，则 $(-a_{ij})$ 称作 $\boldsymbol{A}$ 的**负矩阵**，记为 $-\boldsymbol{A}$，即

$$-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \cdots & -a_{mn} \end{pmatrix}.$$

定义 6 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})$，且 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为同型矩阵，则

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -b_{11} & -b_{12} & \cdots & -b_{1n} \\ -b_{21} & -b_{22} & \cdots & -b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -b_{m1} & -b_{m2} & \cdots & -b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & \cdots & a_{1n}-b_{1n} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & \cdots & a_{2n}-b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}-b_{m1} & a_{m2}-b_{m2} & \cdots & a_{mn}-b_{mn} \end{pmatrix}.$$

显然

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}.$$

例 1　设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & 2 & 4\\ 5 & 1 & -2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\ -5 & 1 & 3\end{pmatrix},$$

求 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$.

解

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3+0 & 2+(-1) & 4+2\\ 5+(-5) & 1+1 & (-2)+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 1 & 6\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}.$$

2.1.3　数与矩阵的乘法

定义 7　记数 k 乘矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 是一个矩阵 $\boldsymbol{C}_{m\times n}$，其定义为

$$\boldsymbol{C}=k\boldsymbol{A}=k\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n}\\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn}\end{pmatrix}.$$

它是用数 k 乘矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 的每一个元素所得的矩阵，称为数 k 与矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 的**乘法**，简称**数乘**.

数乘矩阵具有以下运算律(设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 $m\times n$ 矩阵，k,l 是任意常数)：

(1) 分配律：$k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$，$(k+l)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{A}$；

(2) 结合律：$(kl)\boldsymbol{A}=k(l\boldsymbol{A})=l(k\boldsymbol{A})$；

(3) $0\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，$1\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$，$(-1)\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{A}$.

例 2　设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 4 & 3\\ -2 & 5 & 7\end{pmatrix},$$

求 $3\boldsymbol{A}$.

解

$$3\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3\times 1 & 3\times 4 & 3\times 3\\ 3\times(-2) & 3\times 5 & 3\times 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 12 & 9\\ -6 & 15 & 21\end{pmatrix}.$$

2.1.4 矩阵的乘法

定义 8 设

$$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times s}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ms} \end{pmatrix},\ \boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s\times n}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{sn} \end{pmatrix},$$

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的**乘积**记作 $\boldsymbol{AB}$，规定为

$$\boldsymbol{AB}=(c_{ij})_{m\times n}=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix},$$

其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}\ (i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n).$$

记号 $\boldsymbol{AB}$ 常读作 $\boldsymbol{A}$ 左乘 $\boldsymbol{B}$ 或 $\boldsymbol{B}$ 右乘 $\boldsymbol{A}$.

注 意

只有当左边矩阵的列数等于右边矩阵的行数时，两个矩阵才能进行乘法运算.

若 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$，则矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的元素 c_{ij} 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行元素与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 列对应元素乘积的和，即

$$c_{ij}=(a_{i1}\quad a_{i2}\quad \cdots \quad a_{is})\begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{sj} \end{pmatrix}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}.$$

例 3 若 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{AB}$.

解

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 2\times1+3\times2 & 2\times(-2)+3\times(-1) & 2\times(-3)+3\times0 \\ 1\times1+(-2)\times2 & 1\times(-2)+(-2)\times(-1) & 1\times(-3)+(-2)\times0 \\ 3\times1+1\times2 & 3\times(-2)+1\times(-1) & 3\times(-3)+1\times0 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 8 & -7 & -6 \\ -3 & 0 & -3 \\ 5 & -7 & -9 \end{pmatrix}.$$

矩阵的乘法满足下列运算规律(假定运算都是可行的)：

(1) $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$；　　(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BC}$；

(3) $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\boldsymbol{CA}+\boldsymbol{CB}$；　　(4) $k(\boldsymbol{AB})=(k\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{B})$.

注　意

矩阵的乘法一般不满足交换律，即 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$.

假如，设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{pmatrix},$$

则

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -16 & -32 \\ 8 & 16 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

于是，$\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$，且 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{O}$.

从上例还可看出：两个非零矩阵相乘，结果可能是零矩阵，故不能从 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 必然推出 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$.

不过，也要注意并非所有矩阵的乘法都不能交换.例如，设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

则

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\boldsymbol{BA}.$$

此外，矩阵乘法一般也不满足消元法，即不能从 $\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{BC}$ 必然推出 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.例如，设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

则

$$\boldsymbol{AC}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\boldsymbol{BC}.$$

但

$$A \neq B.$$

定义 9 如果两矩阵相乘,有 $AB=BA$,则称矩阵 A 与矩阵 B **可交换**,简称 A 与 B **可换**.

注 意

对于单位矩阵 E,容易证明 $E_m A_{m\times n}=A_{m\times n}E_n=A_{m\times n}$,或简写成 $EA=AE=A$.可见单位矩阵 E 在矩阵的乘法中的作用类似于数 1.

2.1.5 矩阵的转置

定义 10 把矩阵 A 的行换成同序数的列得到的新矩阵,称为 A 的**转置矩阵**,记作 A^{T}(或 A').即若

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

则

$$A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

矩阵的转置满足以下运算规律(假设运算都是可行的):

(1) $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=A$;　　(2) $(A+B)^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}+B^{\mathrm{T}}$;

(3) $(kA)^{\mathrm{T}}=kA^{\mathrm{T}}$;　　(4) $(AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$.

例 4 已知 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 求 $(AB)^{\mathrm{T}}$.

解 方法一 因为

$$AB=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 14 & -3 \\ 17 & 13 & 10 \end{pmatrix},$$

所以

$$(AB)^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} 0 & 17 \\ 14 & 13 \\ -3 & 10 \end{pmatrix}.$$

方法二 $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1&4&2\\7&2&0\\-1&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\0&3\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&17\\14&13\\-3&10\end{pmatrix}.$

2.1.6 方阵的幂

定义 11 设方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$，规定

$$\boldsymbol{A}^0=\boldsymbol{E},\boldsymbol{A}^k=\underbrace{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}\cdot\cdots\cdot\boldsymbol{A}}_{\text{共}k\text{个}}(k\text{ 为正整数}),$$

$\boldsymbol{A}^k$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的 **k 次幂**.

方阵的幂满足以下运算规律：

(1) $\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{A}^{m+n}$($m,n$ 为非负整数)； (2)$(\boldsymbol{A}^m)^n=\boldsymbol{A}^{mn}$.

注 意

一般地，$(\boldsymbol{AB})^m\neq\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{B}^m$，$m$ 为自然数.但如果 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶矩阵，$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，则可证明$(\boldsymbol{AB})^m=\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{B}^m$，其中 m 为自然数，反之不然.

例 5 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda&1&0\\0&\lambda&1\\0&0&\lambda\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^3$.

解

$$\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}\lambda&1&0\\0&\lambda&1\\0&0&\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda&1&0\\0&\lambda&1\\0&0&\lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda^2&2\lambda&1\\0&\lambda^2&2\lambda\\0&0&\lambda^2\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda^2&2\lambda&1\\0&\lambda^2&2\lambda\\0&0&\lambda^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda&1&0\\0&\lambda&1\\0&0&\lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda^3&3\lambda^2&3\lambda\\0&\lambda^3&3\lambda^2\\0&0&\lambda^3\end{pmatrix}.$$

2.1.7 方阵的行列式

定义 12 由 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素所构成的行列式(各元素的位置不变)，称为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的**行列式**，记作 $|\boldsymbol{A}|$ 或 $\det\boldsymbol{A}$.

注 意

方阵与行列式是两个不同的概念，n 阶方阵是 n^2 个数按一定方式排成的数表，而 n 阶行列式则是这些数按一定的运算法则所确定的一个数值（实数或复数）.

方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 满足以下运算规律（设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵，k 为常数）：

（1）$|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}|$；（2）$|k\boldsymbol{A}|=k^n|\boldsymbol{A}|$；（3）$|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$.

注 意

由运算规律（3）知，对于 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$，虽然一般 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$，但

$$|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{B}||\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{BA}|.$$

2.1.8 对称矩阵

定义 13 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，如果 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$，即 $a_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为**对称矩阵.** 显然，对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素关于主对角线对称.

例如，$\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}8&6&1\\6&9&0\\1&0&5\end{pmatrix}$均为对称矩阵.

如果 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为**反对称矩阵.**

2.1.9 共轭矩阵

定义 14 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$为复（数）矩阵，记$\overline{\boldsymbol{A}}=(\overline{a_{ij}})$，其中$\overline{a_{ij}}$为 a_{ij} 的共轭复数，称$\overline{\boldsymbol{A}}$为 $\boldsymbol{A}$ 的**共轭矩阵.**

共轭矩阵满足以下运算规律（设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为复矩阵，λ 为复数，且运算都是可行的）：

（1）$\overline{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}}=\overline{\boldsymbol{A}}+\overline{\boldsymbol{B}}$；（2）$\overline{\lambda\boldsymbol{A}}=\overline{\lambda}\ \overline{\boldsymbol{A}}$；（3）$\overline{\boldsymbol{AB}}=\overline{\boldsymbol{A}}\ \overline{\boldsymbol{B}}$；（4）$\overline{(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})}=(\overline{\boldsymbol{A}})^{\mathrm{T}}$.

习题 2.1

1. 已知

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}6&3&8\\x_1-x_2&0&5\end{pmatrix},\ \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}6&3&x_1+x_2\\4&0&5\end{pmatrix},$$

若 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$，求 x_1,x_2.