大学物理

类目：公共基础课
书名：大学物理
主编：吴钰涵 杜艳丽 张海燕
出版社：电子科大出版社
开本：大 16 开
书号：978-7-5770-0498-3
使用层次：通用
出版时间：2023 年 10 月
定价：55.00 元
印刷方式：双色
是否有资源：是

大学物理

DAXUE WULI

策划编辑：万晓桐 李燕芩
责任编辑：唐祖琴
封面设计：旗语书装

扫描二维码
关注更多教材信息

ISBN 978-7-5770-0498-3
定价：55.00元

大学物理

主编◎吴钰涵 杜艳丽 张海燕

电子科技大学出版社

公共基础课创新融合教材
“互联网+”教育改革新理念教材

大学物理

主编 ◎ 吴钰涵 杜艳丽 张海燕

电子科技大学出版社
University of Electronic Science and Technology of China Press

公共基础课创新融合系列教材
“互联网+”教育改革新理念教材

大学物理

主　编 ◎ 吴钰涵　杜艳丽　张海燕
副主编 ◎ 郑晓丽　欧志强　潘彦铭
张　翌　陈晓洁　梁小冲
张文艳

电子科技大学出版社
University of Electronic Science and Technology of China Press
· 成都 ·

图书在版编目(CIP)数据

大学物理 / 吴钰涵，杜艳丽，张海燕主编. —成都：电子科技大学出版社，2023.10

公共基础课创新融合系列教材 “互联网＋”教育改革新理念教材

ISBN 978-7-5770-0498-3

Ⅰ. ①大… Ⅱ. ①吴… ②杜… ③张… Ⅲ. ①物理学-高等学校-教材 Ⅳ. ①O4

中国国家版本馆 CIP 数据核字(2023)第 160230 号

大学物理

DAXUE WULI

吴钰涵　杜艳丽　张海燕　主编

策划编辑　万晓桐　李燕芩
责任编辑　唐祖琴
助理编辑　黄杨杨　许　薇

出　　版　电子科技大学出版社
　　　　　成都市一环路东一段 159 号电子信息产业大厦九楼　邮编 610051
主　　页　www.uestcp.com.cn
服务电话　028-83203399
邮购电话　028-83201495

印　　刷　涿州汇美亿浓印刷有限公司
成品尺寸　210mm×285mm
印　　张　15.5
字　　数　485 千字
版　　次　2023 年 10 月第 1 版
印　　次　2023 年 10 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5770-0498-3
定　　价　55.00 元

前　言

物理学是研究物质的基本结构、基本运动形式和相互作用的科学，是自然科学的一门基础学科。它的基本理论渗透在自然科学的各个领域，应用于生产技术的许多部门，是其他自然科学和工程技术的基础。

以物理学基础为内容的大学物理课程，是高等学校理、工、农、医类各专业学生一门重要的通识性必修基础课。该课程所教授的基本概念、基本理论和基本方法是构成学生科学素养的重要组成部分，是一个科学工作者和工程技术人员所必须具备的知识。

本书涵盖了教育部新制定的《非物理类理工学科大学物理课程教学基础要求》中的核心内容，按照压缩经典、简化近代、突出重点的原则精选和组织内容。全书共分 12 章，涉及力学、热学、电磁学、振动和波动光学、近代物理。全书内容深浅适当，讲解正确清晰，叙述引人入胜，例题指导详尽，全书联系实际，特别是注意介绍物理知识和物理思想在实际中的应用。对于非物理专业的读者来说，我们相信在今后的工作与生活中，都将从所学到的物理学知识及其研究方法中得到益处、受到启迪，甚至激发出灵感。

在本书编写的过程中，得到了作者单位领导们的大力支持。同时，编者们还参阅和引用了国内外许多同类教材的有关资料，受益匪浅，在此一并表示诚挚的谢意。

由于编者才疏学浅，力不从心，加上编写时间较仓促，书中难免存在错漏和不当之处，衷心希望广大读者提出宝贵意见。

编　者

2023 年 5 月

目录

第一篇 力学

第二篇 热学

目录

目录

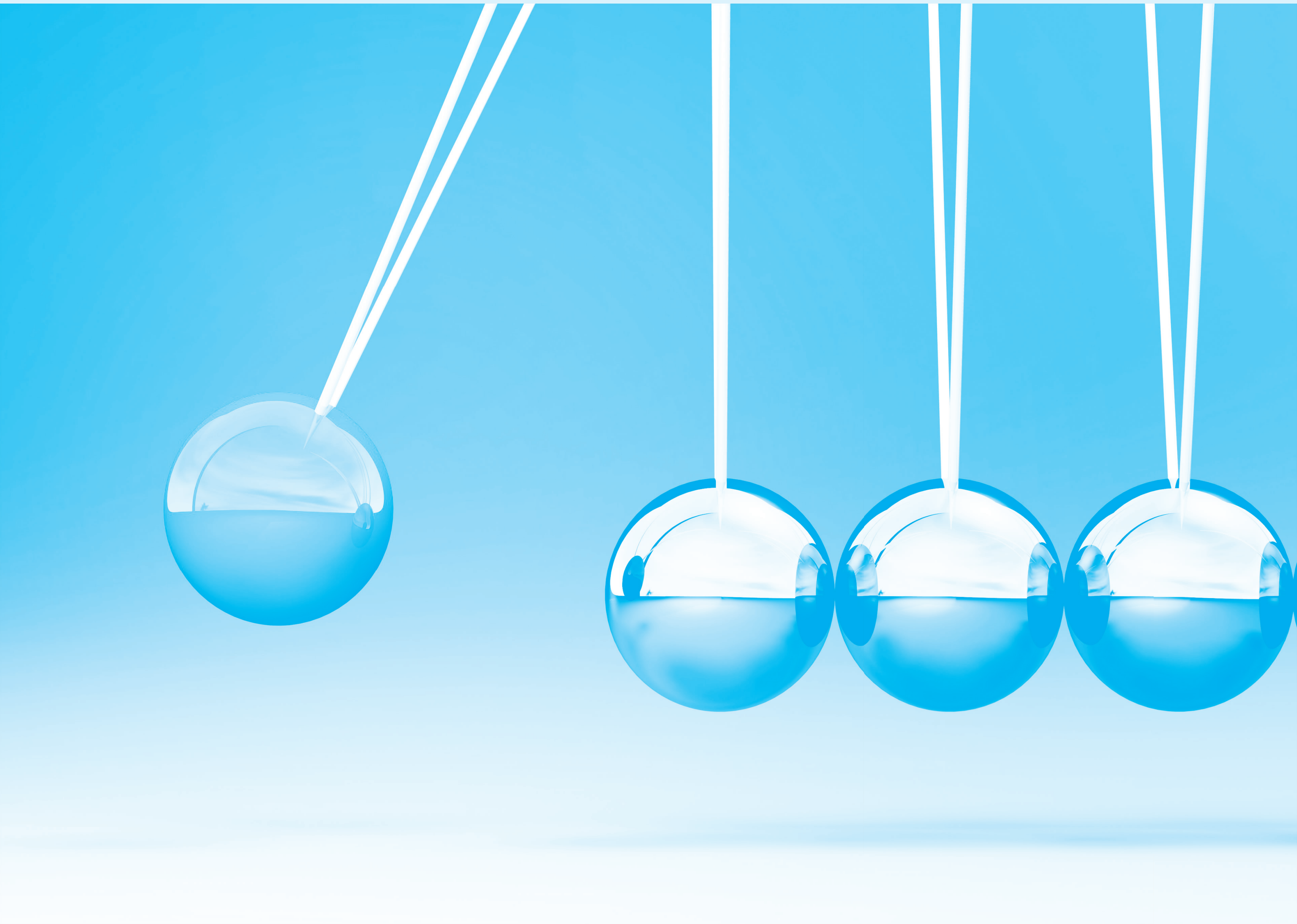
第四篇 振动和波动光学

第五篇 近代物理

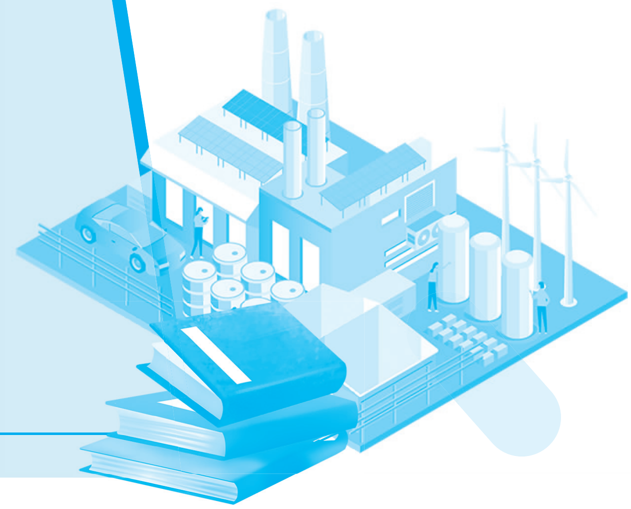
目录

附录

第一篇
力　学



第1章 质点运动学



物体的运动及其变化是与作用在物体上的力有关的.本章不考虑力和物体运动变化之间的因果关系,只着眼于物体的运动情况,研究物体空间位置随时间变化的数学描述,主要内容为位置矢量、位移、速度和加速度等基本概念及质点的曲线运动和相对运动等.

任何物体都有大小和内部结构.当物体运动时,一般来说,物体上各点的运动状态是各不相同的.如果在我们研究的问题中,物体上各点运动状态的区别只占次要地位,我们就可以忽略物体的大小,而把它看作一个有质量的几何点,称为质点.有些实际问题中虽不能把物体视为质点,但可以把它看作是大量质点的集合,通过研究质点的运动规律,就可以进一步研究整个物体的运动规律.因此,研究质点的运动规律是研究一般物体运动规律的基础.

实际物体总是有大小的,不是真正的质点.另外,物体受力总是要发生形变的.质点是对复杂的实际问题进行全面分析的基础上,在一定条件下建立的物理模型.它们保留了实际物体的主要特征,暂不考虑次要因素,这种科学抽象的研究问题的思维方法,在物理学中是常见的.

1.1 参考系 坐标系 物理模型

要研究质点的运动,首先必须做三点准备,即选择参考系、建立坐标系、提出物理模型.质点的绝对位置和绝对运动是没有意义的,我们所谈质点的位置和运动,都是相对于某个参照系而言的.

扫一扫

参考系

1.1.1 参考系

自然界中所有的物体都在不停地运动,运动是绝对的,绝对静止的物体是不存在的.例如在地面上相对静止的树木随地球一起以 3.0×10^{4} m/s 的速度绕太阳运转,而太阳又以 2.5×10^{5} m/s 的速度在银河系中运动.运动是物质的固有属性,运动和物质是不可分割的.这就是运动的绝对性.但是,对运动的描述却是相对的.在确定研究对象的位置时,必须选定另一个标准物体(或相对静止的几个物体)作为基准,然后再研究这个运动物体相对于参考物体是如何运动的.这个被选作标准的物体或物体群,称为参考系.

同一物体的运动,由于所选参考系不同,对其运动描述就会不同.例如在匀速直线运动的车厢中,物体的自由下落,相对于车厢是做直线运动;相对于地面,却是作抛物线运动;相对于太阳或其他天体,运动的描述则更为复杂.这一事实充分说明了运动的描述是相对的.

从运动学的角度讲,参考系的选取是任意的,通常以对问题的研究最方便、最简单为原则.研究地球上物体的运动,在大多数情况下,以地球为参考系最为方便(以后如不作特别说明,研究地面上物体的运动,都以地球为参考系).但是,当地球上发射人造“宇宙小天体”时,则应以太阳为参考系.

1.1.2 坐标系

要想定量地描述物体的运动,就必须在参考系上建立适当的坐标系.在力学中常用的有直角坐标系.根据需要,也可以选用极坐标系、自然坐标系、球面坐标系或柱面坐标系等.

总的来说,当参考系选定后,无论选择何种坐标系,物体的运动性质都不会改变.然而,坐标系选择得当,可使计算简化.

1.1.3 物理模型

任何一个真实的物理过程都是极为复杂的.为了寻找某过程中最本质、最基本的规律,总是根据所提问题(或所要回答的问题),对真实过程进行理想化的简化,然后经过抽象提出一个可供数学描述的物理模型.

例如绕太阳公转的地球和调度室中铁路运行图上的列车等;或当物体作平动时,物体上各部分的运动情况(轨迹、速度、加速度)完全相同.这时可以忽略物体的形状、大小,而把它看成一个具有一定质量的点,并称之为质点.若物体的运动在上述两种情况之外,还可以推出质点系的概念.即把这个物体看成是由许许多多满足第一种情况的质点所组成的系统.当把组成这个物体的各个质点的运动情况弄清楚了,也就描述了整个物体的运动.

理想化模型的引入,在物理学中是一种常见的、重要的科学分析方法.在力学中除质点模型外,在后续章节中还会遇到刚体、理想流体、谐振子及理想弹性介质等物理模型.

综上所述,选择合适的参考系,以方便确定物体的运动性质;建立恰当的坐标系,以定量地描述物体的运动;提出较准确的物理模型,以确定所提出问题最基本的运动规律.

1.2 质点运动的描述

1.2.1 位矢 位移

1.位矢

物体位置的变化称为机械运动.物体做机械运动时,若其体内任意一条直线在运动中始终保持与自身平行,此物体的机械运动叫作平动,平动物体中任意一点的运动状态都是完全相同的.所以,除了大小可以忽略不计的物体可以看作质点外,平动的物体也可视为质点.

对于一个运动的质点,其位置是时刻变化的,我们可以用一个矢量来确定.在选定的参考系上建立直角坐标系,空间任一质点 P 的位置,可以从原点 O 向 P 点作一矢量 $\boldsymbol{r}$,如图1-1所示,$\boldsymbol{r}$ 的端点就是质点的位置,$\boldsymbol{r}$ 的大小和方向完全确定了质点相对参考系的位置,$\boldsymbol{r}$ 称为位置矢量,简称位矢.

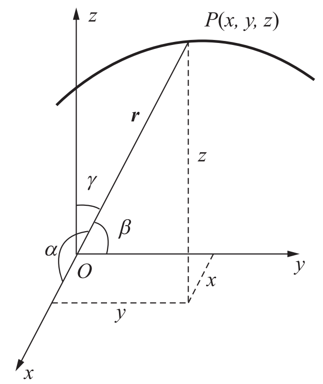


图 1-1 质点的位置矢量

P 点的直角坐标为位矢 $\boldsymbol{r}$ 沿 x,y,z 轴的投影,用 $\boldsymbol{i}$,$\boldsymbol{j}$,$\boldsymbol{k}$ 分别表示沿 x,y,z 三个坐标正方向的单位矢量,则位矢可表示为

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k} \tag{1-1}$$

位矢的大小为

$$|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

用 α,β,γ 分别表示与 x,y,z 三个坐标轴的夹角，则位矢的方向余弦可由下式确定

$$\cos\alpha=\frac{x}{|\boldsymbol{r}|}\qquad\cos\beta=\frac{y}{|\boldsymbol{r}|}\qquad\cos\gamma=\frac{z}{|\boldsymbol{r}|}$$

所谓运动，实际上就是位置随时间的变化，即位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 为时间 t 的函数

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}&=\boldsymbol{r}(t)\\&=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k}\end{aligned}\tag{1-2}$$

在直角坐标系中的分量式为

$$\left.\begin{aligned}x&=x(t)\\y&=y(t)\\z&=z(t)\end{aligned}\right\}\tag{1-3}$$

式(1-3)从数学上确定了在选定的参考系中质点相对于坐标系的位置随时间变化的关系，称为质点的运动方程.

知道了质点的运动方程，就能确定任意时刻质点的位置，从而确定质点的运动.从质点的运动方程中消去时间 t，即可得质点的轨迹方程.

例如，在直角坐标系中，质点从原点 O 开始，以速度 v_0 沿 x 轴做平抛运动，其运动方程为

$$x=v_0t,y=-\frac{1}{2}gt^2$$

从上两式中消去 t，可得到质点的轨迹方程为

$$y=-\frac{1}{2}g\frac{x^2}{v_0^2}$$

这是一条抛物线.

可见，确定质点的运动方程是研究质点运动的一个重要环节.

2.位移

质点运动时，其位置将随时间变化.如图 1-2 所示，设质点沿曲线$\overset{\frown}{AB}$运动，在 t 时刻，质点在 A 处，在 $t+\Delta t$时刻，质点运动到 B 处，A，B 两点的位矢分别由 $\boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{r}_2$ 表示，质点在 Δt 时间间隔内位矢的增量

$$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1\tag{1-4}$$

$\Delta\boldsymbol{r}$ 称为位移.它是描述物体位置变动大小和方向的物理量，在图上就是由起始位置 A 指向终止位置 B 的一个矢量.

位移是矢量，它的运算遵守矢量加法的平行四边形法则或三角形法则.如图 1-3 所示，位移的模只能记作$|\Delta\boldsymbol{r}|$，不能记作 Δr.Δr 通常表示位矢的模的增量，即 $\Delta r=|\boldsymbol{r}_2|-|\boldsymbol{r}_1|$，而$|\Delta\boldsymbol{r}|$则是位矢增量的模(即位移的模)，而且通常情况下$|\Delta\boldsymbol{r}|\neq\Delta r$.

需要注意的是，位移表示物体位置的变化，并非质点所经历的路程.例如在图 1-2 中，位移是有向线段 $\boldsymbol{AB}$，它的量值$|\Delta\boldsymbol{r}|$为割线 AB 的长度.路程是标量，即曲线$\overset{\frown}{AB}$的长度，通常记作 Δs.一般来说，$|\Delta\boldsymbol{r}|\neq\Delta s$.显然，只有 Δt 在趋近于零时，才有$|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|=\mathrm{d}s$.应当指出，即使在 $\Delta t\to0$ 时，$|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|=\mathrm{d}r$ 这个等式也不成立.

在直角坐标系中，位移的表达式为

$$\Delta\boldsymbol{r}=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}=\Delta x\boldsymbol{i}+\Delta y\boldsymbol{j}+\Delta z\boldsymbol{k}\tag{1-5}$$

位移的模为

$$|\Delta\boldsymbol{r}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}\tag{1-6}$$

位移和路程的单位均是长度的单位，国际单位制(SI)中为 m.

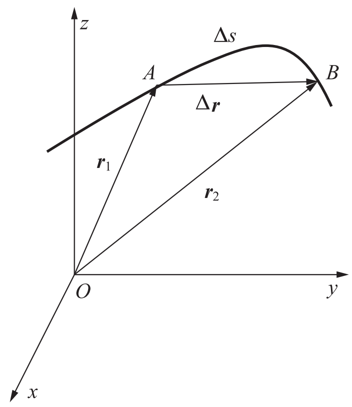


图 1-2　位移

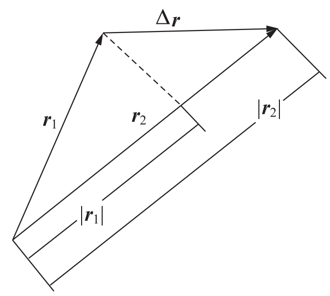


图 1-3　位移的大小

1.2.2　速度

速度是表示质点位置变化快慢和变化方向的物理量.

设质点按运动方程 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ 作一般曲线运动,从时刻 t(位置 A)开始,经过一段时间,发生的位移为 $\Delta\boldsymbol{r}$.我们把 $\Delta\boldsymbol{r}$ 和 Δt 的比值,称为质点在这一段时间内的平均速度.用 $\Delta\,\overline{\boldsymbol{v}}$表示,即

$$\Delta\,\overline{\boldsymbol{v}}=\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t} \tag{1-7}$$

平均速度$\overline{\boldsymbol{v}}$是矢量,它的方向与 $\Delta\,\overline{\boldsymbol{v}}$的方向相同,如图 1-4 所示.

平均速度只能粗略地描述在时间 Δt 内质点平均运动的快慢,它不仅与 t 有关,而且与 Δt 也有关.为了精确地描述质点在 t 时刻的运动快慢,令 $\Delta t\to 0$,这样,平均速度就会趋近于一个确定的极限矢量.这个极限矢量称为质点在时刻 t 的瞬时速度,简称速度,用 $\boldsymbol{v}$ 表示,即

$$\boldsymbol{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \tag{1-8}$$

按照导数的定义,这个极限就是 $\boldsymbol{r}$ 对时间 t 的一阶导数.

速度是矢量,具有大小和方向.它的大小等于单位时间内发生位移的大小,方向为当 $\Delta t\to 0$ 时,$\Delta\boldsymbol{r}$ 的极限方向,即轨迹曲线在 B 处的切线方向,如图 1-5 所示.

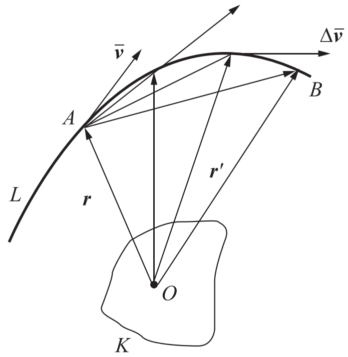


图 1-4　平均速度的方向

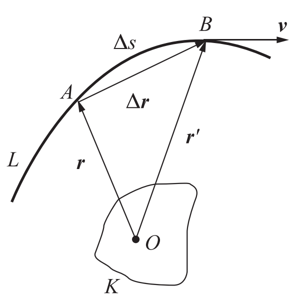


图 1-5　速度的方向

在直角坐标系中,由式(1-1)可知,速度可表示成

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}+v_z\boldsymbol{k} \tag{1-9}$$

式中，$v_x=\frac{dx}{dt}$，$v_y=\frac{dy}{dt}$，$v_z=\frac{dz}{dt}$叫作速度在 x，y，z 轴的分量.这时速度的模可表示成

$$|\boldsymbol{v}|=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2} \tag{1-10}$$

在描述质点的运动时，还有一个常用的物理量——速率.速率是标量，等于质点在单位时间内所行经的路程，而不考虑质点运动的方向.如图 1-4 所示，在时间 Δt 内质点所行经的路程为曲线，其长度为 Δs，那么 Δs 与 Δt 的比值就称为 t 时刻附近 Δt 时间内的平均速率，即

$$\bar{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t} \tag{1-11}$$

平均速率和平均速度不能等同看待.例如，在某一段时间内，质点环行了一个闭合路径，显然质点的位移等于零，平均速度也为零，而质点的平均速率则不为零.

但在 $\Delta t\to 0$ 的极限条件下，曲线$\overset{\frown}{AB}$的长度 Δs 与直线 AB 的长度 $|\Delta\boldsymbol{r}|$ 相等，即在 $\Delta t\to 0$ 时，$ds=|d\boldsymbol{r}|$，所以瞬时速率

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{ds}{dt}=\frac{|d\boldsymbol{r}|}{dt}=|\boldsymbol{v}| \tag{1-12}$$

即瞬时速率就是瞬时速度的模.

速度和速率在量值上都是长度与时间之比，国际单位制(SI)中为 m/s.

1.2.3 加速度

在力学中，位矢 $\boldsymbol{r}$ 和速度 $\boldsymbol{v}$ 都是描述物体机械运动的状态参量.为了描述质点速度的变化，还将引入加速度的概念.加速度是用来描述速度矢量随时间变化率的物理量.

在变速运动中，加速度反映了物体的速度随时间的变化.这个变化可以是运动快慢的变化，也可以是运动方向的变化，或者速度的大小和方向都在变化.如图 1-6 所示，$\boldsymbol{v}_1$ 表示质点在时刻 t、位置 A 处的速度，$\boldsymbol{v}_2$ 表示质点在时刻 $t+\Delta t$、位置 B 处的速度.从速度矢量图可以看出，在时间 Δt 内质点的速度增量为

$$\Delta\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1$$

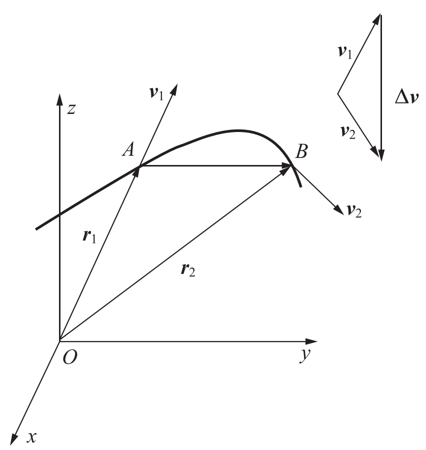


图 1-6 速度的增量

与平均速度的定义相类似，比值$\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}$称为 t 时刻附近 Δt 时间内的平均加速度，即

$$\Delta\bar{\boldsymbol{a}}=\frac{\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1}{\Delta t}=\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t} \tag{1-13}$$

平均加速度只反映在时间 Δt 内速度的平均变化率.为了准确地描述质点在某一时刻 t(或某一位置处)的速度变化率，必须引入瞬时加速度.

质点在某时刻或某位置处的瞬时加速度(简称加速度)等于该时刻附近 Δt 趋近于零时平均加速度的极限值,数学表述为

$$\boldsymbol{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} \tag{1-14}$$

即,加速度是速度对时间的一阶导数,或位矢对时间的二阶导数.

在直角坐标系中,加速度的表达式为

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{k}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k} \tag{1-15}$$

式中,$a_x=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$,$a_y=\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}$,$a_z=\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}$称为加速度在 x,y,z 轴的分量.加速度的模为

$$a=|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2} \tag{1-16}$$

其方向为 $\Delta t\to 0$ 时,平均加速度$\frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}$或速度增量的极限方向.

加速度在量值上是速度与时间之比,国际单位制(SI)中为 $\mathrm{m/s^2}$.

【例 1-1】 如图 1-7 所示,一人用绳子拉着小车前进,小车位于高出绳端 h 的平台上,人的速率 v_0 不变,求小车的速度和加速度的大小.

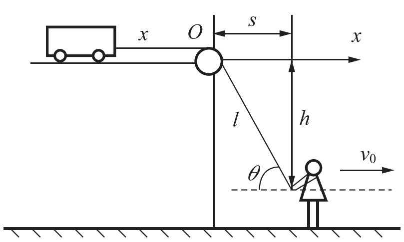


图 1-7　例 1-1 图

解　小车沿直线运动,以小车前进方向为 x 轴正方向,以滑轮为坐标原点,小车的坐标为 x,人的坐标为 s,由速度的定义,小车和人的速度大小应为

$$v_{车}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\qquad v_{人}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=v_0$$

由于定滑轮不改变绳长,所以小车坐标的变化率等于拉小车的绳长的变化率,即

$$v_{车}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}$$

又由图 1-7 可看出,$l^2=s^2+h^2$,两边对 t 求导得

$$2l\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}=2s\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

或

$$v_{车}=\frac{v_{人}s}{l}=v_{人}\frac{s}{\sqrt{s^2+h^2}}=\frac{v_0 s}{\sqrt{s^2+h^2}}$$

同理可得小车的加速度大小为

$$a=\frac{\mathrm{d}v_{车}}{\mathrm{d}t}=\frac{v_0^2h^2}{(s^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}$$

1.3 平面曲线运动

若物体的运动轨迹为曲线，则称为曲线运动.为了描述曲线运动的弯曲程度，通常用曲率和曲率半径来表示.本节仅讨论二维曲线运动，即平面曲线运动.

从曲线上邻近的两点 A、B 各引一条切线，这两条切线间的夹角为 $\Delta\theta$，A、B 两点间的弧长为 Δs，则 A 点的曲率定义为

$$k=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta s}=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} \tag{1-17}$$

若曲线上无限邻近的两点上的两条切线的夹角 $\mathrm{d}\theta$ 称为邻切角，则上式表明，曲线上某点的曲率等于邻切角 $\mathrm{d}\theta$ 与所对应的圆弧 $\mathrm{d}s$ 之比.

一般情况下，曲线上不同的点有不同的曲率，曲率越大则曲线弯得越厉害.很明显，同一圆周上各点的曲率都相同.

过曲线上某一点作圆，若该圆的曲率与曲线在该点的曲率相等，则称它为该点的曲率圆，而其圆心 O 和半径分别称为曲线上该点的曲率中心和曲率半径(如图 1-8 所示)，且有

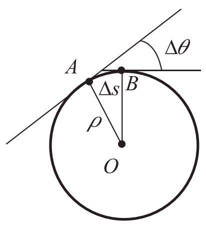


图 1-8　曲率、曲率圆、曲率半径

$$\rho=\frac{1}{k}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta} \tag{1-18}$$

1.3.1　圆周运动

做曲线运动的物体，若其运动轨迹是一个圆，这样的曲线运动就叫圆周运动.质点沿着圆周运动有两种情况：匀速圆周运动与非匀速圆周运动.

质点做圆周运动时，若任意相等的时间内质点经过的弧长都相等，这样的圆周运动叫作匀速圆周运动，否则为非匀速圆周运动.质点做匀速圆周运动时，其速度的方向是时刻变化的，因此匀速圆周运动并不是匀速运动.

对于圆周运动，由于其轨道的曲率和曲率半径处处相等，而速度的方向始终在圆周的切线上，因此，对圆周运动的描述，常常采用以平面自然坐标系为基础的线量描述和以平面极坐标系为基础的角量描述，如图 1-9 所示.

在自然坐标系中，位矢 $\boldsymbol{r}$ 是轨道 s 的函数，即

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$$

O' 为自然坐标系原点，$\boldsymbol{\tau}_0$ 和 $\boldsymbol{n}_0$ 分别是切向单位矢量和法向单位矢量.由 $|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|=\mathrm{d}s$，在自然坐标系中位移、速度可分别表示为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\mathrm{d}s\boldsymbol{\tau}_0$$

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau}_0=v\boldsymbol{\tau}_0 \tag{1-19}$$

根据式(1-19)，圆周运动的切向加速度和法向加速度为

$$\boldsymbol{a}_\tau=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau}_0=\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{\tau}_0 \qquad \boldsymbol{a}_n=\frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{n}_0=\frac{v^2}{R}\boldsymbol{n}_0 \tag{1-20}$$

式中，R 是圆半径.

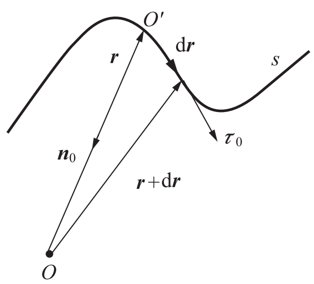


图 1-9　用自然坐标表示质点的位置

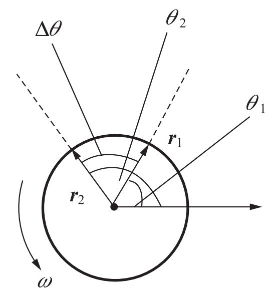


图 1-10　角位移

由上面可知，所谓的匀速圆周运动，就是切向加速度为零的圆周运动，即匀速率圆周运动.

如果以圆心为极点，任意引一条射线为极轴，那么质点位置对极点的矢径 $\boldsymbol{r}$ 与极轴的夹角 θ 就叫质点的角位置，用 $\mathrm{d}\theta$ 表示位矢在 $\mathrm{d}t$ 时间内转过的角位移.角位移既有大小又有方向，其方向规定为：用右手四指表示质点的旋转方向，与四指垂直的大拇指则表示角位移的方向，即角位移的方向是按右手螺旋法则规定的.如图 1-10 所示，质点逆时针转动，这时角位移的方向垂直于纸面向外.但有限大小的角位移不是矢量，因为它不符合交换律；只有在 $\Delta t\to 0$ 时的角位移才是矢量.

质点做圆周运动时，其角位移只有两种可能的方向，因此，可以在标量前加正、负号来表示角位移的方向.如果过圆心作一条垂直于圆面的直线，任选一个方向为坐标轴的正方向，则上述规定的角位移，其方向与坐标轴正向相同则为正号，反之则为负号.

类比速度、加速度的引入方法，可以引入角速度和角加速度.

即

$$\omega=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \tag{1-21}$$

$$\beta=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\omega}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} \tag{1-22}$$

当质点做圆周运动时，R 为常数，只有角位置是 t 的函数，这样只需一个坐标（角位置 θ）就可以描述质点的位置.比照匀变速直线运动的方法，还可以建立起描述匀角加速圆周运动的公式，即在匀角加速圆周运动中有

$$\begin{aligned}&\omega=\omega_0+\beta t\\&\theta=\theta_0+\omega_0 t+\frac{1}{2}\beta t^2\\&\omega^2-\omega_0^2=2\beta(\theta-\theta_0)\end{aligned} \tag{1-23}$$

由此可得，在圆周运动中，线量和角量之间存在如下关系，即

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}s=R\,\mathrm{d}\theta\\&v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=R\,\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=R\omega\\&a_\tau=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=R\,\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=R\beta\\&a_n=\frac{v^2}{R}=R\omega^2\end{aligned} \tag{1-24}$$

角速度的方向就是角位移矢量的方向，如图 1-11 所示.按照矢量的矢积法则，角速度矢量与线速度矢量的关系为

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r} \tag{1-25}$$

如图 1-12 所示.

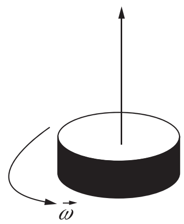


图 1-11　角速度方向

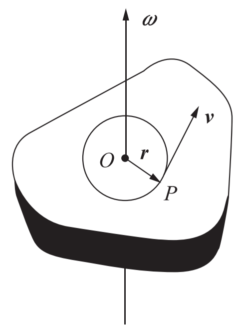


图 1-12　角速度矢量与线速度矢量的关系

【例 1-2】　一飞轮以转速 $n=1\ 500$ 转每分(rev/min)转动,受制动后匀速减慢,经过 $t=50$ s 后静止.(1)求角加速度和从制动开始到静止飞轮的转数 N;(2)求制动开始 $t=25$ s 时飞轮的角速度;(3)设飞轮的半径为 $R=1$ m,求 $t=25$ s 时飞轮边上任一点的速度和加速度.

解　(1)由题知,当 $t=50$ s 时,$\omega=0$,

故由式(1-23)可得

$$\omega_0=2\pi n=2\pi\times\frac{1\ 500}{60}=50\pi(\mathrm{rad/s})$$

$$\beta=\frac{\omega-\omega_0}{t}=\frac{-50\pi}{50}=-\pi(\mathrm{rad/s})$$

从开始制动到静止,飞轮的角位移及转数分别为

$$\theta-\theta_0=\omega_0 t+\frac{1}{2}\beta t^2=50\pi\times 50-\frac{\pi}{2}\times(50)^2=1\ 250\pi(\mathrm{rad})$$

$$N=\frac{1\ 250\pi}{2\pi}=625(\mathrm{rev})$$

(2)$t=25$ s 时飞轮的角速度为

$$\omega=\omega_0+\beta t=50\pi-25\pi=25\pi(\mathrm{rad/s})$$

(3)$t=25$ s 时飞轮边上任一点的速度为

$$v=R\omega=1\times 25\pi=78.5(\mathrm{m/s})$$

相应的切向加速度和向心加速度分别为

$$a_\tau=R\beta=-\pi=-3.14(\mathrm{m/s^2})$$

$$a_n=R\omega^2=1\times(25\pi)^2=6.16\times 10^3(\mathrm{m/s^2})$$

1.3.2　一般曲线运动

如图 1-13 所示,质点沿轨迹 L 做一般平面曲线运动,不难证明,质点在任一位置 A 点的加速度也可分解为两个分量:法向加速度和切向加速度,且有

$$\boldsymbol{a}_n=\frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{n}_0$$

$$\boldsymbol{a}_\tau=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau}_0 \tag{1-26}$$

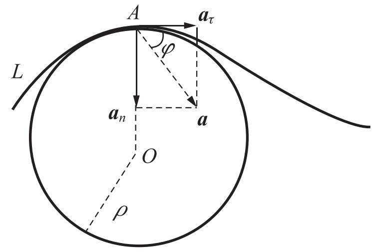


图 1-13　一般曲线运动的加速度

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_n+\boldsymbol{a}_\tau=\frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{n}_0+\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau}_0$$

式中，$\boldsymbol{n}_0$ 和 $\boldsymbol{\tau}_0$ 仍为沿轨迹曲线上 A 点法线方向和切线方向的单位矢量，ρ 为轨迹曲线在 A 点的曲率半径.

与圆周运动不同，一般平面曲线上不同点处的曲率半径和曲率中心是不同的，质点在任一点处法向加速度的大小与质点在该处的速率平方成正比，与该处的曲率半径成反比，方向沿该处曲率圆的半径指向曲率中心.

一般平面曲线运动加速度的大小和方向可表示为

$$a=\sqrt{a_n^2+a_\tau^2}=\sqrt{\left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2}$$

$$\tan\varphi=\frac{a_n}{a_\tau} \tag{1-27}$$

一般曲线运动中，法向加速度和圆周运动中的法向加速度相似，只反映速度方向的变化；切向加速度则和直线运动中的加速度相似，只反映速度大小的变化.质点做圆周运动时，曲率半径不变，曲率中心为圆心，可见圆周运动是一般曲线运动的特殊情况.

【例 1-3】 以速度 $\boldsymbol{v}_0$ 平抛一小球，不计空气阻力，求 t 时刻小球的切向加速度量值 a_τ、法向加速度量值 a_n 和轨道的曲率半径 ρ.

解　由图 1-14 可知

$$a_\tau=g\sin\theta=g\,\frac{v_y}{v}=g\,\frac{gt}{\sqrt{v_0^2+g^2t^2}}=\frac{g^2t}{\sqrt{v_0^2+g^2t^2}}$$

$$a_n=g\cos\theta=g\,\frac{v_x}{v}=\frac{gv_0}{\sqrt{v_0^2+g^2t^2}}$$

$$\rho=\frac{v^2}{a_n}=\frac{v_x^2+v_y^2}{a_n}=\frac{(v_0^2+g^2t^2)^{3/2}}{gv_0}$$

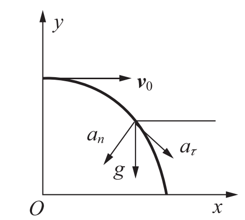


图 1-14　例 1-3 图

1.4 相对运动

在运动学中，参照系的选取可以是任意的.我们知道选取不同的参照系，同一质点的运动状态是不同的，这称为运动描述的相对性.在实际问题中，常常需要把物体从一个参照系转换到另一个参照系中去.那么，在不同的参照系中，质点的运动应怎么变换呢？

扫一扫

相对运动

运动学的物理量都是从空间和时间导出的，因此，要解决运动的相对性问题，首先要明确不同参照系之间的时间和空间关系.下面我们将对同一质点在相对运动的两个参考系中的位移、速度、加速度之间的变换关系进行研究.

由于两个参照系是相对运动的，为了转换的方便，常选定其中一个参照系为静止参照系，另一个为运动参照系.例如，当研究运动列车上物体的运动时，一般选列车为运动参照系，而选地面(地球)为静止参照系.但是，如果研究宇宙飞船的发射，则只能把太阳作为静止参照系，而把地球作为运动参照系.也就是说，静止参照系和运动参照系的选取都是相对而言的.处于运动参照系中的物体，其相对于静止参照系的运动称为绝对运动，相对于运动参照系的运动称为相对运动；运动参照系相对于静止参照系的运动则叫牵连运动.显然，

这些运动也是相对的.

在研究列车上的物体时,假设观察者在地面上,把地面定为静止参照系 S,把列车定为运动参照系 S',S' 相对于 S 沿 x 轴做直线运动.两参照系间的运动情况,可用 S' 系中 O' 点相对于 S 系中 O 点的运动来表示.设物体 P 位于 S' 系(即列车)中,它对 S 的绝对位矢为 $\boldsymbol{r}$,对 S' 的相对位矢为 $\boldsymbol{r}'$,而 O' 点对 O 点的位矢为 $\boldsymbol{r}_0$,如图 1-15 所示.

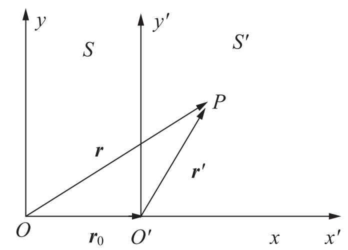


图 1-15　运动描述的相对性

由矢量加法的三角形法则可知 $\boldsymbol{r}$,$\boldsymbol{r}'$,$\boldsymbol{r}_0$ 之间有如下关系

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{r}' \tag{1-28}$$

即牵连位矢与相对位矢之和等于绝对位矢.

将式(1-28)等号两边同时对时间求导,可得

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{v}' \tag{1-29}$$

式中,$\boldsymbol{v}$ 为绝对速度,$\boldsymbol{v}_0$ 为牵连速度,$\boldsymbol{v}'$ 为相对速度.

将式(1-29)两边再次对时间求导,得

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_0+\boldsymbol{a}' \tag{1-30}$$

式中,$\boldsymbol{a}$ 为绝对加速度,$\boldsymbol{a}_0$ 为牵连加速度,$\boldsymbol{a}'$ 为相对加速度.

需要注意的是,式(1-28)、式(1-29)、式(1-30)只适用于物体速度远远小于光速的相对论时空.当物体速度可与光速相比时,参照系间的坐标、速度、加速度的矢量合成法就不再成立.

【例 1-4】 如图 1-16 所示,一人能在静水中以 1.1 m/s 的速率划船前进,今欲横渡一宽度为 4 000 m、水流速度为 0.55 m/s 的大河.

(1)若要到达河正对岸的一点,应如何确定划行方向?需要多少时间?

(2)如希望用最短的时间过河,应如何确定划行方向?船到达对岸的位置在何处?

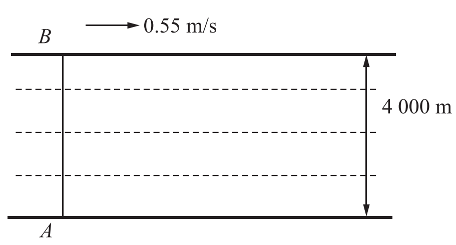


图 1-16　例 1-4 图 1

解　(1)相对运动的问题,以船 A 为研究对象,选择岸 K 为静止参照系、水 K' 为运动参照系,如图 1-17 所示.

根据分析:船对水的速度方向应垂直于河岸

$$\boldsymbol{v}_{AK}=\boldsymbol{v}_{AK'}-\boldsymbol{v}_{K'K}$$

$$\cos\alpha=\frac{|\boldsymbol{v}_{K'K}|}{|\boldsymbol{v}_{AK}|}=\frac{0.55}{1.1}=0.5$$

$$\alpha=\arccos 0.5=60^\circ$$

$$|\boldsymbol{v}_{AK'}|=|\boldsymbol{v}_{AK}|\sin 60^\circ=1.1\times\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 0.952\ 6(\text{m/s})$$

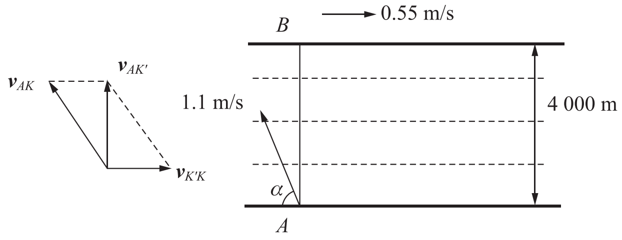


图 1-17　例 1-4 图 2

需要的时间为

$$t=\frac{4\ 000}{0.952\ 6}\approx 4\ 199(\mathrm{s})\approx 70(\mathrm{min})$$

(2)分析(1)的速度合成图,需要的时间最短,在垂直于河岸的方向投影量最大,$\alpha=90°$,这时

$$t=\frac{4\ 000}{|\boldsymbol{v}_{AK}|}=\frac{4\ 000}{1.1}\approx 3\ 636.36(\mathrm{s})\approx 60.6(min)$$

根据相对运动的速度关系,有

$$\boldsymbol{v}_{AK'}=\boldsymbol{v}_{AK}+\boldsymbol{v}_{K'K}$$

利用几何关系得

$$BC=\frac{\boldsymbol{v}_{K'K}}{\boldsymbol{v}_{AK}}AB=\frac{0.55}{1.1}\times 4\ 000=2\ 000(\mathrm{m})$$

本章习题

1-1　质点运动时,位矢为 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{i}+vt^2\boldsymbol{j}-t\boldsymbol{k}$(SI),求:(1)质点第 3 秒的平均速度;(2)质点在 3 秒的瞬时速度.

1-2　质点的位矢为 $\boldsymbol{r}=R\cos\omega t\boldsymbol{i}+R\sin\omega t\boldsymbol{j}$,求质点的速度和加速度.

1-3　一质点的运动方程为 $\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{i}+4t^2\boldsymbol{j}+t\boldsymbol{k}$,试求:(1)它的速度和加速度;(2)它的轨迹方程.

1-4　质点沿 x 轴运动,坐标与时间的关系为 $x=4t-2t^3$,式中 x、t 分别以 m、s 为单位.试求:(1)在最初 2 s 内的平均速度,2 s 末的瞬时速度;(2)1 s 末到 3 s 末的位移、平均速度;(3)1 s 末到 3 s 末的平均加速度;此平均加速度是否可用$\bar{a}=\frac{a_1+a_2}{2}$来计算?(4)3 s 末的瞬时速度.

1-5　一货车在行驶过程中,遇到 5 m/s 竖直下落的大雨,车上紧靠挡板平放有一个长为 $l=1$ m 的木板.如果木板上表面距挡板最高端的距离 $h=1$ m,问货车以多大的速度行驶,才能使木板不致淋雨?

1-6　一质点沿半径 $R=1$ m 的圆周运动.$t=0$ 时,质点位于 A 点,如图 1-18所示.然后沿顺时针方向运动,运动方程为 $s=\pi t^2+\pi t$,式中 s、t 分别以 m、s 为单位.试求:(1)质点绕行一周所经历的路程、位移、平均速度和平均速率;(2)质点在第 1 秒末的速度和加速度大小.

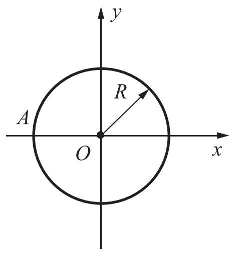


图 1-18　题 1-7 图

1-7　一物体从静止开始做圆周运动,经过 5 s 后角速度增加到 $\omega=\pi$rad/s,

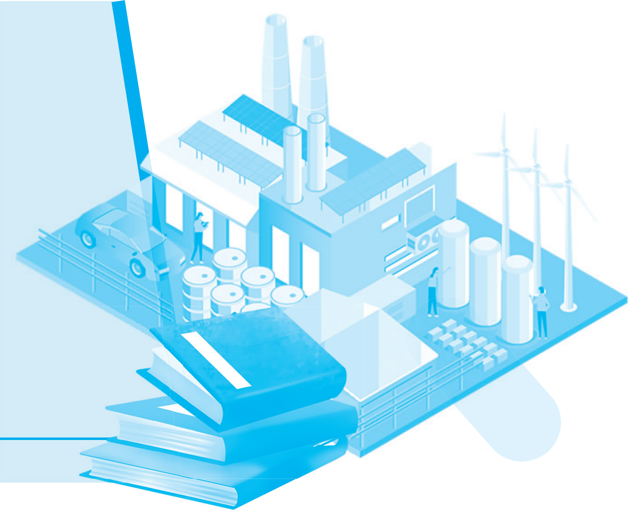
此时物体已转过 3 圈.试求在这段时间内物体的平均角速度和平均角加速度.

1-8　一圆盘半径为 3 m,它的角速度在 $t=0$ 时为 3.33π rad/s,以后均匀减小,到 $t=4$ s 时角速度变为零.试计算圆盘边缘上一点在 $t=2$ s 时的切向加速度和法向加速度的大小,并在图上画出它们的方向.

1-9　某人骑摩托车向东前进,其速率为 10 m/s 时觉得有南风,当其速率为 15 m/s 时,又觉得有东南风,试求此时的风速度.

1-10　路灯高度为 h,人高度为 l,步行速度为 v_0.试求:(1)人影中头顶的移动速度;(2)影子长度增长的速率.

1-11　已知,一飞轮的角速度在 5 s 内由 900 rev/min 均匀减到 800 rev/min.求:(1)角速度;(2)在此5 s 内的总转数;(3)再经过几秒飞轮将停止转动.



第 2 章
质点动力学

上一章中我们主要介绍了有关质点运动的内容，解决了如何描述质点机械运动的问题.本章我们将研究物体间的相互作用及其对运动的影响，即质点的动力学问题.

运动是物体的固有属性，物体运动状态的不同，既与自身的内在因素有关，又取决于物质间的相互作用.牛顿运动三定律成功地解决了物体在力的作用下运动状态变化的规律，因此，牛顿运动三定律就成了整个动力学的基础，也是整个物理学的基础.

在动力学中，除了描述力的瞬时效应的牛顿三定律外，还有描述力积累效应的动量定理、功能原理，以及动量守恒定律和机械能守恒定律，这些定律和定理共同构成了质点动力学的基本框架.

2.1 牛顿运动定律　相对性原理

牛顿运动定律是经典力学的基础，它不但适用于质点的运动，还具有很强的广泛适用性，因为复杂的物体在原则上可看作质点的组合.从牛顿运动定律出发，可以导出刚体、流体、弹性体等物体的运动定律，从而建立起经典力学体系.

牛顿在伽利略等人对力学研究的基础上，进行了深入的研究和分析，总结出了三条定律，于 1686 年在他的著作《自然哲学的数学原理》一书中发表，这三条定律统称为牛顿运动定律.

扫一扫

牛顿第一定律

2.1.1　牛顿第一定律

牛顿第一定律：任何物体都将保持静止或匀速直线运动状态，直到其他物体所作用的力迫使它改变这种状态为止.

牛顿第一定律指出，任何物体都具有保持原来的运动状态不变的性质.这种性质称为惯性，因此，牛顿第一定律又称为“惯性定律”.例如，运动的列车在刹车后，会继续行走一段距离；踢出的足球在空中继续飞行.这些都是有关惯性的现象.

牛顿第一定律还指出，只有当物体受到其他物体对它的作用时，该物体的运动状态才会发生改变.可见，其他物体的作用是物体运动状态发生改变的原因.我们把这些使物体运动状态发生改变的相互作用叫做力.也就是说，力是改变物体运动状态的原因.如，用球拍用力击球，乒乓球的运动方向会发生改变；地面上行驶的小车受到阻力作用逐渐停止.而且，早在我国春秋末期，就有记载说：“力，形之所以奋也”.“形”，指有形的物体，这句话指出力是使物体由静到动（奋）的原因，对力的作用做了很好的概括，其思想和牛顿不谋而合，定性地阐明了力的定义.然而，在实际生活中，完全不受其他物体作用力的物体是不存在的.但如果这些作用力恰好完全抵消，则物体所受的外力之和为零，它的速度就保持不变，静止的仍然静止，运动的做匀速直线运动.可以说，牛顿第一定律所描述的是物体处于平衡力的作用下，它的运动变化规律.

由于运动描述的相对性，一个物体的运动只有相对于一定的参照系才有意义.牛顿第一定律还确定了一个参照系.只有在这种参照系中，不受力的物体或处于平衡力作用下的物体，将保持其静止或匀速直线运动的状态不变.这样的参照系叫惯性参照系，简称惯性系.并不是所有的参照系都是惯性系，对于一般的力学现象来说，地面参照系是一个足够精确的惯性系；对于天体运动现象来说，地球就不再是惯性系，这时就要选太阳作为基准.需要说明的是，凡相对于某惯性系静止或匀速直线运动的其他参照系都是惯性系.牛顿运动定律只在惯性参照系中才适用，在以后的学习和练习中，如无特殊说明，都是指惯性参照系.

2.1.2 牛顿第二定律

牛顿第二定律：物体在受到外力作用时，它获得的加速度 $\boldsymbol{a}$ 的大小与合外力的大小成正比，与物体的质量成反比；加速度 $\boldsymbol{a}$ 的方向与合外力的方向相同.

数学表达式为

$$\boldsymbol{F}=km\boldsymbol{a} \tag{2-1}$$

比例系数 k 与单位制有关.在国际单位制(SI)中，质量的单位是 kg，加速度的单位是$\mathrm{m/s^2}$，力的单位是 N，这时 $k=1$.

与牛顿第一定律相比，牛顿第二定律不但说明了物体的运动与力有关系，还对力与运动的关系作了定量阐述，即物体获得的加速度 $\boldsymbol{a}$ 的大小与它所受合外力的大小成正比，与物体的质量成反比；加速度 $\boldsymbol{a}$ 的方向与合外力的方向相同.显然，同一个外力作用在不同的物体上，质量大的物体获得的加速度较小，质量小的物体获得的加速度则较大.这就意味着质量大的物体要改变原有的运动状态比较困难，质量小的物体要改变原有的运动状态则较容易.为了加深对牛顿第二定律的认识和理解，牛顿率先采用了质量这个概念，质量是物体惯性大小的量度.质量大的物体惯性也大，质量小的物体惯性也小，因此，质量也常被称为惯性质量.

然而，牛顿在《自然哲学的数学原理》一书中并没有提到 $\boldsymbol{F}=km\boldsymbol{a}$ 一式，他的原意为：运动的改变与力成正比并发生在力的作用方向上.牛顿在定律中所说的“运动”并非我们泛泛而谈的运动，而是指物体运动的动量；“运动的变化”就是指动量的变化.那么，在选择了合适的单位后，牛顿第二定律可表示为微分形式

$$\boldsymbol{F}=\frac{\mathrm{d}(m\boldsymbol{v})}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} \tag{2-2}$$

需要注意的是，牛顿运动定律的两种数学表达式有各自适用的范围.式(2-1)只适用于质量恒定不变的物体运动；而微分形式即式(2-2)是一种基本的普遍适用的形式.它不但适用于质量恒定的物体运动，还可以应用于变质量物体的运动，如发射的火箭等.

2.1.3 牛顿第三定律

牛顿第三定律：当物体 A 以力 $\boldsymbol{F}_1$ 作用在物体 B 上时，物体 B 也必定同时以力 $\boldsymbol{F}_2$ 作用在物体 A 上，$\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$ 的大小相等，方向相反且沿同一条直线.即

$$\boldsymbol{F}_1=-\boldsymbol{F}_2 \tag{2-3}$$

力 $\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$ 中，一个叫作用力，另一个叫反作用力.如图 2-1 所示.

在理解和应用牛顿第三定律时，应注意以下几点.

(1)作用力与反作用力总是成对出现的，且二者是一一对应关系.

(2)作用力与反作用力分别作用在两个物体上，因此它们不是平衡力.

(3)作用力与反作用力性质总是相同的，总是属于同一类型的力.如果作用力是弹性力，那么反作用力也一定是弹性力；如果作用力是万有引力，反作用力也一定是万有引力；如果作用力是摩擦力，反作用力也一定是摩擦力.

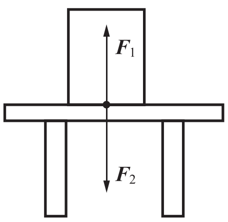


图 2-1 作用力与反作用力

(4)作用力与反作用力是同时出现、同时消失的.有作用力，就会有反作用

力,它们是同生共失的一对,不会单独存在.

(5)力是物体与物体间的相互作用,如果存在某一力,就一定能找到它的施力物体和受力物体,否则这个力就不存在.

(6)作用力与反作用力等大、反向、在同一直线上的情况,只在物体的运动速度远小于光速时才适用.也就是说,牛顿第三定律只适用于经典力学中.

2.1.4　力学相对性原理

在第1章中,我们讨论了运动的相对性及不同参照系中运动的转换关系.可知,在相互做匀速直线运动的两个参照系中,观察同一质点的运动,所测得的加速度是相等的.如 S 是惯性系,S'系是以恒定速度 $\boldsymbol{u}$ 相对 S 系做匀速直线运动,则 S'系也是惯性系.也就是说,质点在这两个惯性系中的加速度是相同的.又因为在经典力学中,物体的质量是一个与参照系无关的不变量,所以有

$$F=ma=ma'=F'$$

这就是说,在这两个惯性系中,牛顿运动定律具有相同的表达形式.即

$$F=ma$$

依此可以进一步推断牛顿第一、第三定律在惯性系中也有同样的表达形式,并且还可以推断建立在牛顿运动定律基础上的其他力学规律,如动量定理、动量守恒定律、功能原理、机械能守恒定律等在不同的惯性系中也有相同的表达形式.这一事实可以概括为力学相对性原理:在一切惯性系中,力学定律具有完全相同的表达形式.这一原理,也称为“伽利略相对性原理”.

由力学相对性原理可知,在研究力学规律时,所有的惯性系都是等价的.在一切惯性系中,力学现象都是按同样的方式进行的,我们在惯性系中所做的任何力学实验,都不能确定该惯性系相对于其他惯性系是否在运动.

2.2　几种常见的力

力是物体之间的相互作用.世间万物,任何物体都受到力的作用,完全不受力的物体是不存在的.而且在应用牛顿定律解决实际问题时,首先就要正确地分析物体的受力情况.到底都有哪些力呢? 下面,我们对日常生活和工程技术中常见的力作一些简单介绍.

2.2.1　万有引力

自然界中物体之间相互吸引的力,称为万有引力.它的规律是由牛顿和胡克等人共同发现的.设两个质点间的距离为 $\boldsymbol{r}$,质量分别为 m_1、m_2,如图2-2所示.则有:两质点间的万有引力 $\boldsymbol{F}$ 的大小与两质点的质量乘积(m_1m_2)成正比,与它们之间距离的平方(r^2)成反比,方向沿着两质点的连线.这就是万有引力定律.

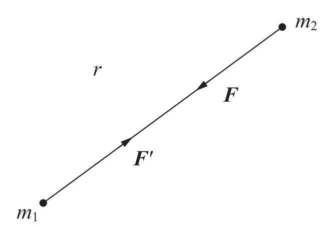


图2-2　万有引力

即

$$F=G\frac{m_1m_2}{r^2} \tag{2-4}$$

式中:G 为万有引力常量,量值为 $G=6.67\times10^{-11}\,\mathrm{N\cdot m^2/kg^2}$;$r$ 为两质点间的距离;m_1、m_2 反映了物体的

引力性质，叫作引力质量.实验证明，引力质量和惯性质量在数值上相等.两个质量虽然大小一样，但意义却是不一样的.我们可以把它们看作是同一质量的两种表现.

习惯上，我们把地球表面附近的物体由于地球吸引而受到的力叫作重力.显然，重力也是一种引力，它是万有引力的一种.忽略地球自转的影响，物体所受的重力就等于地球对它的万有引力.设地球的质量为 M，半径为 R，物体的质量为 m，即有

$$mg=\frac{GMm}{R^2}$$

由此得重力加速度为

$$g=\frac{GM}{R^2}$$

把地球的质量、半径及引力常量代入上式，可得

$$g=9.8\ \mathrm{m/s^2}$$

扫一扫

摩擦力

2.2.2 摩擦力

两个相互接触的物体在沿接触面相对运动时，或者有相对运动的趋势时，在接触面之间会产生一对阻止相对运动的力，叫作摩擦力.如果两个物体之间有相对运动趋势，但并没有产生相对运动，这时的摩擦力叫作静摩擦力.如果两个物体之间有相对运动，这时的摩擦力叫作滑动摩擦力.

所谓的相对运动的趋势是指假如没有静摩擦，物体之间将发生相对运动.也就是说，正是由于静摩擦的存在，才阻止了物体的相对运动.从摩擦力的定义可知产生摩擦力的条件是两物体相互接触、紧压，并且有相对运动或相对运动趋势.摩擦力的方向是沿接触面的切线方向而且与相对运动或相对运动趋势的方向相反.

静摩擦力的大小与外力的大小有关.静摩擦力的大小，介于 0 和最大静摩擦力之间.当物体处于由相对静止转为相对滑动的临界情况时，静摩擦力达到最大值，称为最大静摩擦力.实验表明，最大静摩擦力正比于正压力 N.

$$f_s=\mu_s N \tag{2-5}$$

式中，μ_s 称为静摩擦力系数，它与相互接触物体的材料及表面状况(粗糙程度、温度、湿度等)有关.

当外力超过最大静摩擦力时，物体间就产生了相对运动，这时的摩擦力就是滑动摩擦力.滑动摩擦力也与正压力成正比.

$$f_k=\mu_k N \tag{2-6}$$

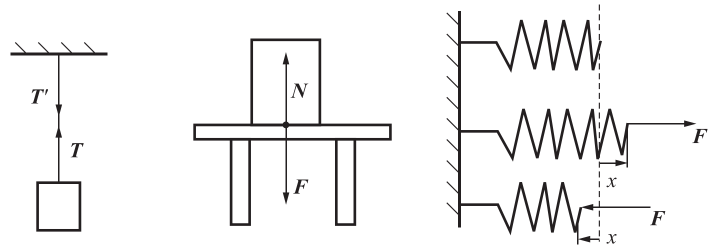
式中，μ_k 称为滑动摩擦力系数，它不仅与相互接触物体的材料及表面状况有关，还与相对滑动速度的大小有关.一般情况下，滑动摩擦力随速度的增加而减小.

2.2.3 弹性力

当两个物体相互接触并发生形变时，发生形变的物体由于要恢复原状，对与它接触的物体产生力的作用，这种力叫作弹性力，简称弹力.可见，弹力产生的条件是物体直接接触并产生形变.它的大小取决于物体形变的程度.弹力的表现形式是多种多样的，常见的有：绳索被拉紧时产生的拉力；重物放在桌面上，桌面受到挤压而发生形变，并产生一个向上的弹力；弹簧被拉伸或被压缩时产生的弹力等(图 2-3).下面我们对它们分别做以下简单讨论.

第一种弹力是拉力，即被拉紧的绳索形状产生变化，由于要恢复原状而产生的力，如图 2-3(a)所示.拉力的大小与绳索的收紧程度有关，方向总是沿着被拉方向的反向且指向绳索.绳索产生拉力时，其内部各段之间也有相互作用的弹力.这种内部弹力叫作张力.在处理实际问题时，往往忽略绳索的质量，近似认为绳上各点的张力都是相等的，都等于外力.

另一种弹力是正压力(或支持力).这种弹力是两个物体相互挤压发生形变,因而产生作用于对方的弹力作用.如图 2-3(b)所示,重物放在桌面上,桌面受到挤压而发生形变,并产生一个向上的力(支持力);物体受到桌面的支持产生一个向下的力(正压力).它们的大小取决于相互挤压的程度,方向总是垂直于接触面而指向被作用的物体.



(a) 绳的弹力　(b) 正压力和支持力　(c) 弹簧的弹力

图 2-3　弹力

还有一种弹力是弹簧在被拉伸或被压缩时产生的,叫作弹簧的弹力(图 2-3(c)).这种弹力总是力图使弹簧恢复原状,所以又叫"恢复力".在弹簧的恢复限度内,弹簧力的大小和它的形变成正比,这就是胡克定律.

如果用 F 表示弹力,以 x 表示弹簧变化的长度,则胡克定律可用数学式来表示.

$$F=-kx \tag{2-7}$$

式中:k 为弹簧的劲度系数,与弹簧的性质有关;负号表示弹力的方向总是和弹簧形变的方向相反.

2.2.4　电磁力

电磁力是电场力和磁场力的统称.静止的电荷之间存在电场力;运动的电荷之间除了电场力外,还有磁场力.按照相对论理论,磁场力实际上是电场力的一种表现.也就是说,电场力和磁场力具有同一本源,因此,把它们统称为电磁力.

由于分子和原子都是由电荷组成的,它们之间的作用力就是电磁力.中性分子或原子虽然正负电荷数量相等,但它们之间也有相互作用力,这是因为它们内部正负电荷有一定的分布,对外部电荷的作用并没有完全抵消,所以仍有电磁力的作用.之前介绍的摩擦力、弹性力,以及气体压力、浮力、黏滞力等都是原子或分子之间作用力的宏观表现,从根本上说都是电磁力.

除了宏观作用的万有引力、摩擦力、弹性力及电磁力外,还有微观作用的力:强力和弱力.这两种力都是微观粒子间的相互作用,它们的作用范围(力程)很小,属于短程力.强力是存在于质子、中子、介子等强子之间的将原子核内的质子、中子紧紧束缚在一起的作用力.弱力仅在粒子间的某些反应中(如 β 衰变)才显出它的重要性.

2.3　牛顿运动定律的应用

在学习了牛顿运动定律和各种常见的力之后,我们认识到牛顿运动三定律是一个有机整体,第一定律是牛顿力学的思想基础,第二定律解决了力和运动的定量问题,第三定律指出了力的相互性.因此,在应用牛顿定律解题时,不能只顾其一而置另外两个于不顾.

应用牛顿运动定律求解的问题,一般可以分为两类:一是已知作用在物体上的力,求物体的速度、加速度和运动方程;另一类是已知物体的运动方程,求它所受到的力.当然,也有两个问题兼有的情况.虽然问题

不同，但分析方法都是一样的，基本步骤如下：

(1)确定研究对象；

(2)分析物体的受力情况并画出图示；

(3)建立坐标系，列出运动方程；

(4)联立求解，得出答案.

【例 2-1】 质量为 m 的物体沿斜面向下滑动.当斜面的倾角为 α 时，物体正好匀速下滑.问：当斜面的倾角增大到 β 时，物体从高为 h 处由静止沿斜面到底部需要多少时间？

解 当倾角为 α 时，物体 m 正好匀速下滑.此时，物体的受力情况如图 2-4 所示

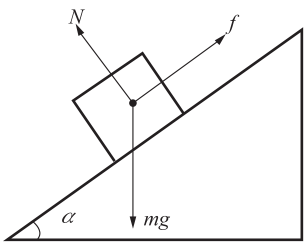


图 2-4 例 2-1 图

$$mg\sin\alpha - f = 0$$
$$N - mg\cos\alpha = 0$$
$$f = \mu N$$

将 3 个式子联立，可得：$\mu = \tan\alpha$

当倾角为 β 时，

$$mg\sin\beta - f = ma$$
$$a = (\sin\beta - \tan\alpha\cos\beta)g$$

斜面长为

$$L = \frac{h}{\sin\beta} = \frac{1}{2}at^2$$

可得

$$t^2 = \frac{2h}{a\sin\beta} = \frac{2h}{\sin\beta}\frac{1}{(\sin\beta - \tan\alpha\cos\beta)g}$$
$$= \frac{2h\cos\alpha}{\sin\beta(\sin\beta\cos\alpha - \sin\alpha\cos\beta)g}$$
$$= \frac{2h\cos\alpha}{g\sin\beta\sin(\beta - \alpha)}$$

则物体下滑所需时间为

$$t = \sqrt{\frac{2h\cos\alpha}{g\sin\beta\sin(\beta - \alpha)}}$$

【例 2-2】 设电梯中有一质量可以忽略的滑轮，在滑轮两侧用轻绳悬挂着质量分别为 m_1 和 m_2 的重物 A 和 B，如图 2-5 所示，已知 $m_1 > m_2$.当电梯(1)匀速上升，(2)加速上升时，求绳中的张力和物体 A 相对于电梯的加速度 a_r.

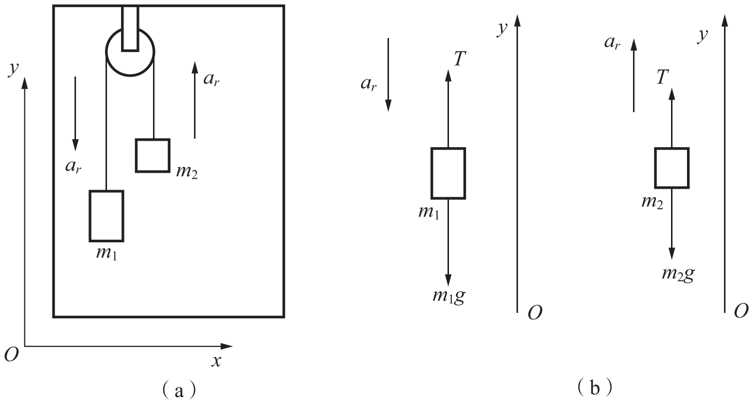


图 2-5 例 2-2 图

解　以地面为参考系，物体 A 和 B 为研究对象，分别进行受力分析，物体在竖直方向运动，建立坐标系 Oy，见图(b).

(1)电梯匀速上升，物体相对电梯的加速度等于它们相对地面的加速度.A 的加速度为负，B 的加速度为正，根据牛顿第二定律，对 A 和 B 分别得到

$$T-m_1g=-m_1a_r$$
$$T-m_2g=m_2a_r$$

上两式消去 T，得到

$$a_r=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}g$$

将 a_r 代入上面任一式，得到

$$T=\frac{2m_1m_2}{m_1+m_2}g$$

(2)电梯以加速度 a 上升时，A 对地的加速度为 $a_1=a-a_r$，B 对地的加速度为 $a_2=a+a_r$，根据牛顿第二定律，对 A 和 B 分别得到

$$T-m_1g=m_1(a-a_r)$$
$$T-m_2g=m_2(a+a_r)$$

解此方程组得到

$$a_r=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}(a+g)$$
$$T=\frac{2m_1m_2}{m_1+m_2}(a+g)$$

讨　论

由(2)的结果，令 $a=0$，即得到(1)的结果

$$a_r=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}g$$
$$T=\frac{2m_1m_2}{m_1+m_2}g$$

由(2)的结果，电梯加速下降时，又可得到

$$a_r=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}(g-a)$$
$$T=\frac{2m_1m_2}{m_1+m_2}(g-a)$$

【例 2-3】　一重物 m 用绳悬起，绳的另一端系在天花板上，绳长 $l=0.5$ m，重物经推动后，在一水平面内做匀速率圆周运动，转速 $n=1$ r/s.这种装置叫作圆锥摆.求这时绳和竖直方向所成的角度.

解　以小球为研究对象，对其进行受力分析：

小球的运动情况，竖直方向平衡，水平方向做匀速圆周运动，建立坐标系如图 2-6 所示.

拉力沿两轴进行分解，竖直方向的分量与重力平衡，水平方向的分量提供向心力.利用牛顿定律，列方程

x 方向　$$T\sin\theta=m\omega^2r=m\omega^2l\sin\theta$$

y 方向　$$T\cos\theta=mg$$

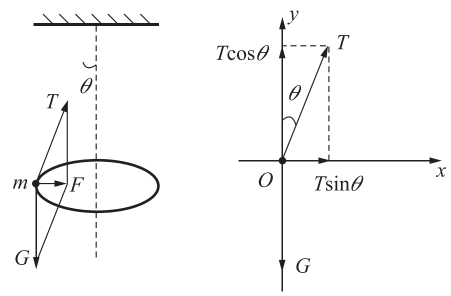


图 2-6　例 2-3 图

由转速可求出角速度
$$\omega=2\pi n$$
求出拉力
$$T=m\omega^2 l=4\pi^2 n^2 ml$$
可得
$$\cos\theta=\frac{g}{4\pi^2 n^2 l}=\frac{9.8}{4\pi^2\times 0.5}=0.497$$
$$\theta=60°13'$$
由此可以看出，物体的转速 n 愈大，θ 也愈大，而与重物的质量 m 无关.

【例 2-4】　如图 2-7 所示，有一摆长 l 为 1 m 的圆锥摆，如果摆角为 30°，摆的周期是多少？

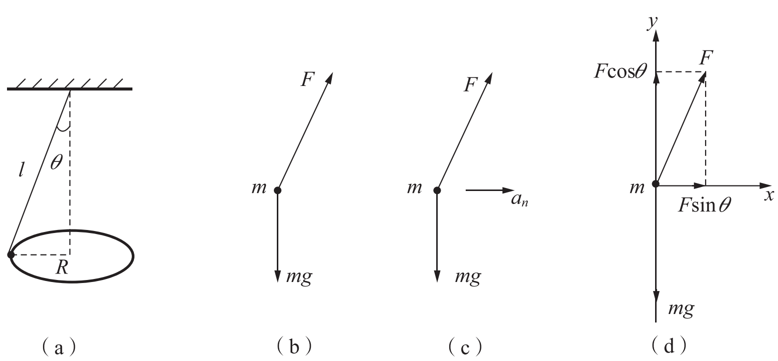


图 2-7　例 2-4 图

解　设球的质量为 m，运动轨迹的半径为 R，对小球进行受力分析(图 b)，其运动情况如图(c)，建立如图(d)所示的直角坐标系，并列出方程
$$F_n=ma_n\Rightarrow F\sin\theta=ma_n=mR\omega^2$$
$$F_y=ma_y\Rightarrow F\cos\theta-mg=0$$
根据图示，有 $R=l\sin\theta$，且 $\omega=\frac{2\pi}{T}$，将这两式代入上式，化简得
$$F\sin\theta=ml\sin\theta\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$$
$$F\cos\theta=mg$$
从而得到周期的计算式
$$T=2\pi\sqrt{\frac{l\cos\theta}{g}}$$
又知 $l=1$ m，$g=9.8$ m/s^2，$\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$

所以

$$T=1.87(\mathrm{s})$$

【例 2-5】 雨滴落下时受空气阻力，若阻力与速度成正比，求雨滴的速度，并讨论雨滴的最后速度.

解 雨滴向下加速时，受到两个力的作用：重力 G 和阻力 f，且 $f=-kv$，则雨滴的牛顿定律式为

$$mg-kv=ma=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

分离变量

$$-\frac{m}{k}\cdot\frac{\mathrm{d}\left(g-\frac{k}{m}v\right)}{\left(g-\frac{k}{m}v\right)}=\mathrm{d}t$$

两边积分

$$-\frac{m}{k}\ln\left(g-\frac{k}{m}v\right)=t+c$$

$$\ln\left(g-\frac{k}{m}v\right)=-\frac{k}{m}t+c$$

$$g-\frac{k}{m}v=c\,\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}$$

由初始条件 $v(0)=0,c=g$ 得

雨滴的速度为

$$v=\frac{mg}{k}(1-\mathrm{e}^{-\frac{kt}{m}})$$

加速度为

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=g\,\mathrm{e}^{-\frac{kt}{m}}$$

当 t 增大时，$a\to0,v\to\frac{mg}{k}=$恒量，雨滴匀速下落.

【例 2-6】 有一密度为 ρ 的细棒，长度为 l，其上端用细线悬着，下端紧贴着密度为 ρ' 的液体表面. 现悬线剪断，求细棒在恰好全部没入水中时的沉降速度(设液体没有黏性).

解 以棒为研究对象，在下落的过程中，受力如图 2-8 所示：

棒的运动在竖直向下的方向，取竖直向下建立坐标系.

当棒的最下端距水面距离为 x 时，浮力大小为

$$B=\rho' xg$$

此时棒受到的合外力为

$$F=mg-\rho' xg=g(\rho l-\rho' x)$$

利用牛顿第二定律建立运动方程

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=g(\rho l-\rho' x)$$

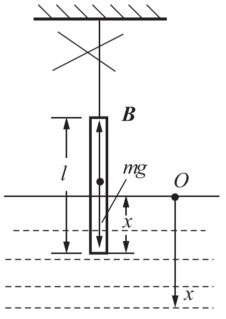


图 2-8 例 2-6 图

要求速度与位置的关系式，利用速度定义式消去时间

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}v=g(\rho l-\rho' x)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

积分得

$$\rho lv\,\mathrm{d}v=g(\rho l-\rho' x)\mathrm{d}x$$

$$\rho lv^2=2\rho gl^2-\rho' gl^2$$

$$v=\sqrt{\frac{2\rho gl-\rho' gl}{\rho}}$$

即细棒在恰好全部没入水中时的沉降速度为

$$v=\sqrt{\frac{2\rho gl-\rho' gl}{\rho}}$$

2.4 功与能　动能定理

“功”这个字来自生活中的工作，但它又不同于生活中工作的意义.例如：你帮别人提着一件重物站在原地不动，你做了一件工作，但是并没有做功.因为虽然你费力气提它了，但是你在原地没有移动位置.本节我们讨论力在空间的积累效应——功，并进一步讨论功与能的关系.

2.4.1　功和功率

在力学中，功的最基本的定义是恒力的功.如图 2-9 所示，一物体做匀速直线运动，在恒力 $\boldsymbol{F}$ 的作用下物体发生位移 $\Delta\boldsymbol{r}$，$\boldsymbol{F}$ 与 $\Delta\boldsymbol{r}$ 的夹角为 α，则恒力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功定义为：力在位移方向上的投影与该物体位移大小的乘积.若用 A 表示功，则有

$$A=F|\Delta r|\cos\alpha \tag{2-8}$$

按照矢量标积的定义，上式可写为

$$A=\boldsymbol{F}\cdot\Delta\boldsymbol{r} \tag{2-9}$$

即恒力的功等于力与质点位移的标积.

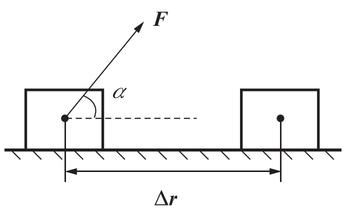


图 2-9　恒力的功

由式(2-9)可以看出，功是一个标量，只有大小，没有方向.功的正负由 α 角决定.当 $\alpha>\frac{\pi}{2}$ 时，功为负值，说明某力做负功；当 $\alpha<\frac{\pi}{2}$ 时，功为正值，说明某力做正功；当 $\alpha=\frac{\pi}{2}$ 时，功值为零，则说某力不做功.例如，物体做圆周运动时，法向力就不做功.

很明显，当物体受到变力的作用或者物体做曲线运动时，式(2-8)、式(2-9)就不再适用.这时，我们需要将运动的轨迹曲线分割成许多足够小的元位移 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$，从而使质点在每段元位移 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 中所受的力 $\boldsymbol{F}$ 都能看成恒力，如图 2-10 所示，则力 $\boldsymbol{F}$ 在这段元位移上所做的元功为

$$\mathrm{d}A=\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

力 $\boldsymbol{F}$ 在轨道 ab 上所做的总功就等于所有各段上元功的代数和，即

$$A=\int_a^b\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_a^b F\cos\alpha\ |\mathrm{d}\boldsymbol{r}|=\int_a^b F_\tau\,\mathrm{d}s \tag{2-10}$$

式中，$\mathrm{d}s=|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|$，$F_\tau$ 是力 $\boldsymbol{F}$ 在元位移 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 方向上的投影.式(2-10)就是计算变力做功的一般方法.如果建立一个直角坐标系，则有

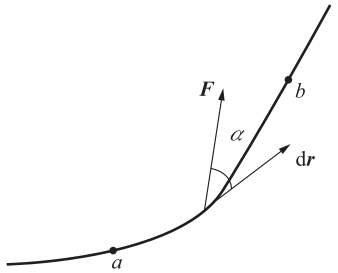


图 2-10　变力的功

$$\boldsymbol{F}=F_x\boldsymbol{i}+F_y\boldsymbol{j}+F_z\boldsymbol{k}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\mathrm{d}x\boldsymbol{i}+\mathrm{d}y\boldsymbol{j}+\mathrm{d}z\boldsymbol{k}$$

那么，式(2-10)就可表示为

$$A=\int_a^b (F_x\mathrm{d}x+F_y\mathrm{d}y+F_z\mathrm{d}z)=\int_{x_0}^{x} F_x\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y} F_y\mathrm{d}y+\int_{z_0}^{z} F_z\mathrm{d}z \tag{2-11}$$

力在单位时间内所做的功叫作功率,用 P 表示

$$P=\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}=\frac{\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v} \tag{2-12}$$

物理量功率是用来表示力做功的快慢程度的.功率越大,做同样的功所花费的时间就越少,做功的效率也越高.

在国际单位制(SI)中,力的单位是牛(N),位移的单位是米(m),因此,功的单位是牛顿·米(N·m)叫作焦耳(J),功率的单位是瓦(W).

2.4.2 保守力的功 势能

扫一扫

保守力的功 势能

下面通过分析重力、弹簧弹性力、万有引力做功的特点,引入保守力的概念.

1.重力的功

这里讨论的重力是指地面附近几百米高度范围内的重力,就是说这里所指的重力可视为恒力.

设质量为 m 的质点在重力 G 的作用下由 A 点沿任意路径到 B 点,如图 2-11 所示,选取地面为坐标原点,z 轴垂直于地面,向上为正.重力 G 只有 z 方向的分量,即 $F_z=-mg$,应用式(2-11),有

$$A=\int_{z_0}^{z} F_z\mathrm{d}z=\int_{z_0}^{z} -mg\,\mathrm{d}z=-(mgz-mgz_0) \tag{2-13}$$

式(2-13)表明,重力的功只由质点相对于地面的始末位置 z_0 和 z 来决定,而与所通过的路径无关.

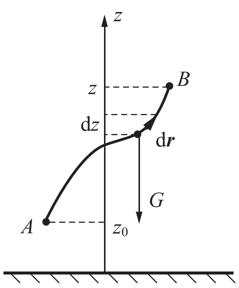


图 2-11 重力的功

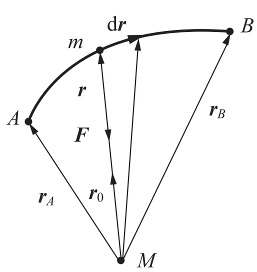


图 2-12 引力的功

2.万有引力的功

设两质点的质量分别为 M 和 m,且 m 相对于 M 的初位置为 $\boldsymbol{r}_A$,末位置为 $\boldsymbol{r}_B$,如图 2-12 所示.质点 m 受到 M 的引力为

$$\boldsymbol{F}=-G\frac{mM}{r^2}\boldsymbol{r}_0$$

式中,$\boldsymbol{r}_0$ 表示 m 相对 M 位移的单位矢量.则引力的元功为

$$\mathrm{d}A=\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=-G\frac{mM}{r^2}\boldsymbol{r}_0\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

因为矢量模的平方等于矢量自身点积,即 $|\boldsymbol{A}|^2=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}$,所以

$$\mathrm{d}(A^2)=\mathrm{d}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A})=2\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{A}$$

而

$$\mathrm{d}(A^2)=2A\,\mathrm{d}A$$

故有

$$\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{A}=A\,\mathrm{d}A \tag{2-14}$$

同理,有
$$\boldsymbol{r}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}=r\mathrm{d}r$$
又知 $\boldsymbol{r}_0=\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$,所以
$$\mathrm{d}A=-G\frac{mM}{r^2}\mathrm{d}r$$
于是质点由 A 点移到 B 点引力的功为
$$A=\int_{r_A}^{r_B}-G\frac{mM}{r^2}\mathrm{d}r=-\left[\left(-G\frac{mM}{r_B}\right)-\left(-G\frac{mM}{r_A}\right)\right] \tag{2-15}$$
这说明引力做的功也只与始末位置有关,而与具体的路径无关.

3.弹性力的功

如图 2-13 所示,选取弹簧自然伸长处为 x 坐标的原点,则当弹簧形变量为 x 时,弹簧对质点的弹性力为 $F=-kx$.

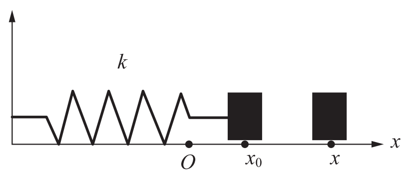


图 2-13　弹性力的功

因为作用力 F 只有 x 分量,故由式(2-11)可得
$$A=\int_{x_0}^{x}F_x\mathrm{d}x=\int_{x_0}^{x}-kx\mathrm{d}x=-\left(\frac{1}{2}kx^2-\frac{1}{2}kx_0^2\right) \tag{2-16}$$
这说明弹簧弹性力做的功只与始末位置有关,而与弹簧的中间形变过程无关.

综上可知,重力、万有引力、弹性力做功的特点是,它们的功值只与物体的始末位置有关,而与做功的具体路径无关.或者说,受这些力作用的物体沿任意闭合路径运动一周时,它们所做的功为零.除了重力、万有引力、弹性力之外,静电力、分子力等也具有这种特性.物理学中把具有这种特性的力统称为保守力.其数学定义式为
$$\oint_l \boldsymbol{F}_{\text{保}}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}=0 \tag{2-17}$$
如果某力的功与路径有关,或者沿任意闭合路径的功不为零,则称这种力为非保守力.例如爆炸力、摩擦力等.

4.势能

通过对重力、万有引力、弹性力做功的讨论,我们知道保守力做功只与物体的始末位置有关.据此,可以引入势能的概念.我们把与物体位置有关的能量称为物体的势能.对于非保守力,不存在势能的概念.

势能的量值与物体的始末位置有关,具有相对意义,只有选定了势能零点,才能确定某一点的势能值.我们规定,物体在某点所具有的势能等于将物体从该点移动到势能零点保守力所做的功.势能零点可以根据需要任意选取,但一旦物体的始末位置确定,它的势能是一定的,与势能零点的选取无关.

常见的势能有引力势能、重力势能、弹性势能,对应三种力所做的功可知,三种势能的大小分别为

重力势能:$E_{\mathrm{P}}=-\dfrac{GmM}{r}$(势能零点为 $r=\infty$ 处)

引力势能:$E_{\mathrm{P}}=mgy$(势能零点为 $y=0$ 处)

弹性势能:$E_{\mathrm{P}}=\dfrac{1}{2}kx^2$(势能零点为 $x=0$ 处)

显然，

$$A=-\Delta E_{\mathrm{P}} \tag{2-18}$$

也就是说保守力做的功等于相应势能增量的负值.

【例 2-7】 装有货物的木箱，重 $G=980$ N，要把它运上汽车.现将长 $l=3$ m 的木板搁在汽车后部，构成一斜面，然后把木箱沿斜面拉上汽车.斜面与地面成 30°角，木箱与斜面间的滑动摩擦系数 $\mu=0.20$，绳的拉力 F 与斜面成 10°角，大小为 700 N，如图 2-14 所示.

求：(1)木箱所受各力所做的功；(2)合外力对木箱所做的功；(3)如改用起重机把木箱直接吊上汽车，能不能少做些功？

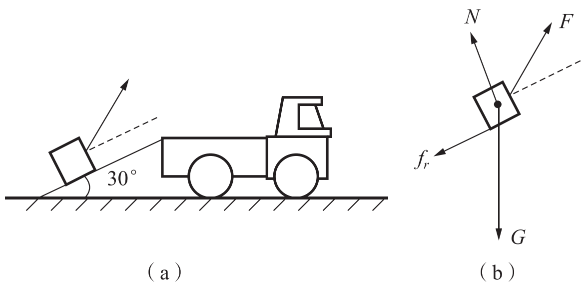


图 2-14　例 2-7 图

解　木箱所受的力为：拉力 F，方向与斜面成 10°角向上；重力 G，方向竖直向下；斜面对木箱的支持力 N，方向垂直于斜面向上；斜面对木箱的摩擦力 f_r，方向和斜面平行，与木箱运动方向相反，如图(b).

已知 $l=3$ m，每个力所做的功可计算如下：

(1)拉力 F 所做的功 A_1

$$A_1=Fl\cos 10°=700\times 3\times 0.985\ \mathrm{J}=2.07\times 10^3\ \mathrm{J}$$

重力 G 所做的功 A_2

$$A_2=Gl\cos(180°-60°)=980\times 3\times(-0.5)\ \mathrm{J}=-1.47\times 10^3\ \mathrm{J}$$

正压力 N 所做的功 A_3

$$A_3=Nl\cos 90°=0$$

摩擦力 f_r 所做的功 A_4：分析木箱的受力，由于木箱在垂直于斜面方向上没有运动，根据牛顿第二定律得

$$N+F\sin 10°-G\cos 30°=0$$

$$N=G\cos 30°-F\sin 10°=727\ \mathrm{N}$$

由此可求得摩擦力 f_r 为

$$f_r=\mu N=0.20\times 727\ \mathrm{N}=145\ \mathrm{N}$$

$$A_4=f_r l\cos 180°=-145\times 3\ \mathrm{J}=-435\ \mathrm{J}$$

因为重力和摩擦力在这里是阻碍物体运动的力，所以它们对物体所做的功都是负值.

(2)根据合力所做功等于各分力所做功的代数和，算出合力所做的功

$$A=A_1+A_2+A_3+A_4=165(\mathrm{J})$$

(3)如改用起重机把木箱吊上汽车，这时所用拉力 F' 至少要等于重力 G.在这个拉力($F'=980$ N)的作用下，木箱移动的竖直距离是 $l\sin 30°$.因此拉力所做的功为

$$A'=F'l\sin 30°=980\times 3\times 0.5\ \mathrm{J}=1.47\times 10^3\mathrm{J}$$

它等于重力所做的功，而符号相反(因为这时合外力所做的功为零).与(1)中 F 所做的功相比较，用起重机能够少做功.我们还发现，虽然 F' 比 F 大，但所做的功 A' 却比 A_1 还小，这是因为功的大小不完全取决于力的大小，还和位移的大小及位移与力之间的夹角有关.为了把木箱装上汽车，我们所需要做的最小功等

于克服重力所做的功，其大小为 1.47×10^3 J，这对于斜面或是利用起重机或其他机械都是一样的.机械不能省功，但能省力或省时间，正是这些场合，使我们对功的概念的重要性加深了认识.现在，在(1)中拉力 F 所多做的功：$2.07\times10^3\,\text{J}-1.47\times10^3\,\text{J}=0.6\times10^3\,\text{J}$ 起的是什么作用呢？第一，为了克服摩擦力，用去 435 J 的功，它最后转变成热量；第二，余下的 165 J 的功将使木箱的动能增加.

2.4.3 动能和动能定理

上面我们讨论了力对物体做功的定义及其数学表述.力对物体做功，物体的运动状态就会发生变化，它们之间存在什么关系呢？

如图 2-15 所示，质量为 m 的物体在合外力 $\boldsymbol{F}$ 的作用下，沿曲线自 A 点运动到 B 点，速度由 $\boldsymbol{v}_1$ 变为 $\boldsymbol{v}_2$，在曲线上任一点，力 $\boldsymbol{F}$ 在元位移 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 上所做的元功为

$$\mathrm{d}A=\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=F\cos\theta\,\mathrm{d}r$$

由牛顿第二定律及切向加速度的定义，有

$$F\cos\theta=ma_\tau=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

所以

$$\mathrm{d}A=F\cos\theta\,\mathrm{d}r=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}r=mv\,\mathrm{d}v$$

故质点从 A 点运动到 B 点，合外力所做的总功为

$$A=\int\mathrm{d}A=\int_{v_1}^{v_2}mv\,\mathrm{d}v$$

积分得

$$A=\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{1}{2}mv_1^2 \tag{2-19}$$

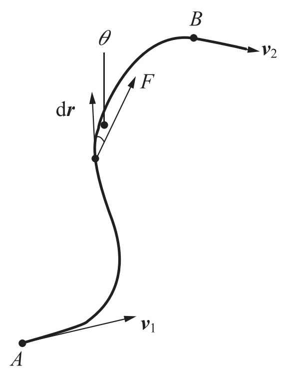


图 2-15　动能定理

可见，合外力对质点做功的结果，使得 $\frac{1}{2}mv^2$ 这个量获得了增量，该量是由各时刻质点的运动状态决定的.我们把该量叫作质点的动能，用 E_K 表示.上式表明，合外力对质点所做的功等于质点动能的增量.这就是质点的动能定理.

动能定理是在牛顿运动定律的基础上得出的，所以它只适用于惯性系.由于质点的位移和速度与惯性系的选取有关，因此，功和动能也依赖于惯性系的选取.

若讨论对象是质点系，我们可以把它看作是若干个质点组成的集合.这时质点系的动能定理为，质点系总动能的增量等于作用在质点系上的所有力在这一过程中做功的总和.若用 $\sum A_{外}$ 表示质点系所有外力做功的总和，$\sum A_{内}$ 表示质点系所有内力做功的总和，则质点系的动能定理可表示为

$$\sum A_{外}+\sum A_{内}=E_K-E_{K0} \tag{2-20}$$

【例 2-8】 利用动能定理重做例题 2-6.

解 如图 2-16 所示，细棒下落过程中，合外力对它做的功为

$$A=\int_0^l(G-B)\mathrm{d}x=\int_0^l(\rho l-\rho' x)g\,\mathrm{d}x=\rho l^2g-\frac{1}{2}\rho' l^2 g$$

应用动能定理，因初速度为 0，末速度 v 可求得如下

$$\rho l^2g-\frac{1}{2}\rho' l^2g=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}\rho l v^2$$

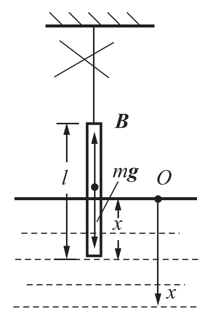


图 2-16　例 2-8 图

$$v=\sqrt{\frac{2\rho gl-\rho' gl}{\rho}}$$

两种方法所得结果相同，而现在的算法无疑大为简便.

2.5 功能原理　机械能守恒定律

2.5.1　功能原理

由质点系的动能定理

$$\sum A_{外}+\sum A_{内}=E_{K}-E_{K0}$$

质点系的内力既有保守力，也有非保守力，因此内力做的功 $A_{内}$ 可以分为保守内力做的功 $A_{保内}$ 和非保守内力做的功 $A_{非保内}$ 两部分.

$$A_{外}+A_{保内}+A_{非保内}=E_{K}-E_{K0}$$

由式(2-18)，保守力的功等于相应势能增量的负值，所以

$$A_{保内}=-(E_{P}-E_{P0})$$

代入上式得

$$A_{外}+A_{非保内}=(E_{K}+E_{P})-(E_{K0}+E_{P0})$$

系统的动能和势能之和统称为系统的机械能，用 E 表示，即 $E=E_{K}+E_{P}$.

以 E_0、E 分别表示系统的初态和末态时的机械能，则有

$$A_{外}+A_{非保内}=E-E_{0} \tag{2-21}$$

也就是说，外力和非保守内力做功的总和等于系统机械能的增量.这一结论就是系统的功能原理.

功能原理全面概括和体现了力学中功与能的关系，它涵盖了力学中所有类型力的功以及所有类型的能量，质点和质点系的动能定理只是它的特殊情形，功能原理是普遍的功与能的关系.由于动能定理的基础是牛顿运动定律，故功能原理也只适用于惯性系.

扫一扫

机械能守恒定律

2.5.2　机械能守恒定律

在物理学中常讨论的一种重要情况是：质点系运动过程中，只有保守内力做功，外力做的功和非保守内力做的功都是零或可以忽略不计，即 $A_{外}+A_{非保内}=0$，由式(2-21)可得

$$E=E_{0}$$

或

$$E=E_{K}+E_{P}=恒量 \tag{2-22}$$

这就是说，当外力和非保守内力都不做功或所做的总功为零时，系统内各物体的动能和势能可以相互转换，但系统的机械能保持不变.这就是机械能守恒定律.

在机械能守恒定律中，外力和非保守内力都不做功或所做的总功为零.然而自然界中能量的形式是多样的，除机械能之外，还有热能、电磁能、化学能、核能等；如果系统内有非保守力做功或外力做的功不为零，则系统的机械能必将发生变化.实际上，就是系统机械能与其他形式的能量发生了等值转换.例如，质点系内的摩擦力做了多少功，就会有多少的机械能转化为热能.大量的实验和观测都表明，自然界的能量既不能消失，也不能创造，只能从一个物体传递给另一个物体，或者从一种形式转换为另一种形式.这就是能量转换与守恒定律，它是自然界普遍的规律之一.

【例 2-9】 小车沿图 2-17 所示的光滑弯曲轨道，自 A 点无初速地滑下，轨道的圆环部分有一缺口 BC.已知圆环的半径为 R，缺口的张角$\angle BOC=2\alpha$.问 A 点的高度 h 应等于多少，方能使小车恰好越过缺口而走完整个圆环？(小车所受的摩擦可忽略不计)

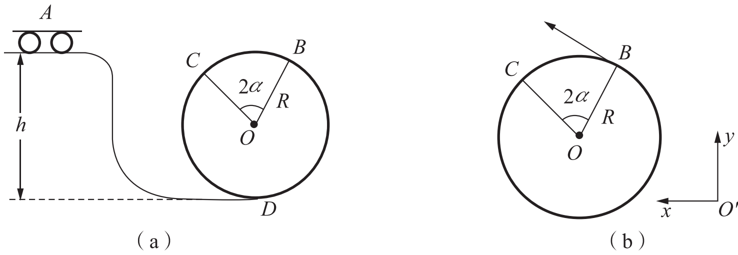


图 2-17　例 2-9 图

解　设小车恰好越过缺口而走完整个圆环.这时小车的运动需经过两个物理过程：由 A 点运动到 B 点，再由 B 点运动到 C 点.

小车由 A 点运动到 B 点，取小车、圆环和地球组成的质点组为研究对象.小车只受重力和轨道对小车的压力(变力)作用，重力为保守力，轨道对小车的压力处处与运动方向垂直，不做功.满足机械能守恒条件.

小车到达 B 点时的速度 $\boldsymbol{v}_B$ 沿圆环轨道的切线方向，如图例 2-9 图(b)所示.小车在 BC 之间做斜抛运动.欲使小车恰好越过缺口而走完整个圆环，就必须要求在水平方向的速度分量 $v_{xB}=v_B\cos\alpha$ 通过缺口的距离$\overline{BC}=2R\sin\alpha$ 所需的时间是小车由 B 点到达最大高度所需时间 t 的 2 倍.

设 D 点为重力势能零点，根据以上分析得

$$mgh=mg(R+R\cos\alpha)+\frac{1}{2}mv_B^2 \tag{①}$$

$$2R\sin\alpha=2v_Bt\cos\alpha \tag{②}$$

$$0=v_B\sin\alpha-gt \tag{③}$$

将方程①～方程③联立求解得

$$h=R\left(1+\cos\alpha+\frac{1}{2\cos\alpha}\right) \tag{④}$$

即 A 点 $h=R\left(1+\cos\alpha+\dfrac{1}{2\cos\alpha}\right)$的高度方能使小车恰好越过缺口而走完整个圆环.

讨　论

(1)当 α 一定时：若小车在 A 点的高度 $h>R\left(1+\cos\alpha+\dfrac{1}{2\cos\alpha}\right)$时，小车要越过缺口 BC；若小车在 A 点的高度$h<R\left(1+\cos\alpha+\dfrac{1}{2\cos\alpha}\right)$时，小车到不了 C 点.

(2)由式④可以看出：$\alpha=0$ 时，亦即缺口 BC 封闭时，$h=\dfrac{5}{2}R$，这就是小车走完整个封闭圆环时，A 点的最小高度.此时小车在圆环最高点只受重力作用，而轨道对小车的压力恰好为零.当 $h>\dfrac{5}{2}R$ 时，小车在无缺口圆环的最高点要受到竖直向下的重力和轨道对小车压力的作用.

(3)当 $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$时，由式④可知：$h>\dfrac{5}{2}R$，此时的小车在 B 点做竖直向上运动.

【例 2-10】 如图 2-18 所示，A、B 两弹簧的劲度系数分别为 k_1 和 k_2，其质量可忽略不计，弹簧 A 的上端固定，在弹簧 B 的下端挂一质量为 m 的物体，先用手托住，使弹簧不伸长.求：(1)如果将物体 m 托住慢慢放下达静止(平衡位置)时，A、B 两弹簧的最大伸长、弹性力、弹性势能；(2)如将物体 m 突然释放，物体到达最大位置时，A、B 两弹簧的最大伸长、弹性力、弹性势能.

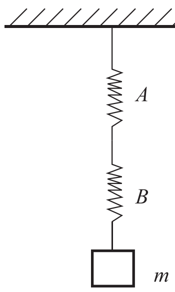


图 2-18　例 2-10 图

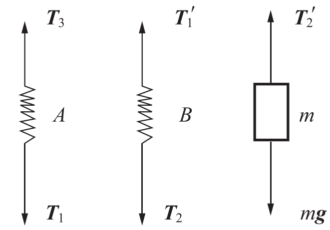


图 2-19　受力分析

解　(1)分别将弹簧 A、B 和物体 m 选为研究对象，作受力分析图，如图 2-19 所示.物体在平衡位置时，设弹簧 A、B 的最大伸长分别为 Δx_{10}，Δx_{20}.选取竖直向下为正方向.并选取弹簧 A、B 未伸长时为其各自的弹性势能零点，由此可得物体在平衡时有

$T_1-T_3=0，T_2-T_1'=0，T_1=T_1'，mg-T_2'=0，T_2=T_2'，T_1=k_1\Delta x_{10}，T_2=k_2\Delta x_{20}$

即 A、B 两弹簧的弹性力

$$T_1=T_2=mg$$

A、B 两弹簧的最大伸长分别是

$$\Delta x_{10}=\frac{mg}{k_1},\Delta x_{20}=\frac{mg}{k_2}$$

A、B 两弹簧的弹性势能分别是

$$E_{10}=\frac{1}{2}k_1(\Delta x_{10})^2=\frac{m^2g^2}{2k_1}$$

$$E_{20}=\frac{1}{2}k_2(\Delta x_{20})^2=\frac{m^2g^2}{2k_2}$$

(2)选取物体 m，弹簧 A、B 和地球组成的质点组为研究对象，将物体突然释放，运动到最大位置的过程中，只受重力、弹性力作用，且均为保守力，满足机械能守恒条件.仍然选取弹簧 A、B 未伸长时为其各自的弹性势能零点，又选取物体到达最大位置时为重力势能零点.设物体到达最大位置时，弹簧 A、B 的最大伸长分别为 Δx_1，Δx_2，由机械能守恒定律得

$$mg(\Delta x_1+\Delta x_2)=\frac{1}{2}k_1(\Delta x_1)^2+\frac{1}{2}k_2(\Delta x_2)^2$$

又因

$$k_1\Delta x_1=k_2\Delta x_2$$

联立求解得：

弹簧 A、B 的弹性力分别为

$$T_1=k_1\Delta x_1=2mg$$

$$T_2=k_2\Delta x_2=2mg$$

弹簧 A、B 的最大伸长分别为

$$\Delta x_1=\frac{2mg}{k_1}$$

$$\Delta x_2 = \frac{2mg}{k_2}$$

物体到达最大位置时，弹簧 A、B 的弹性势能分别为

$$E_A = \frac{1}{2}k_1(\Delta x_1)^2 = \frac{2m^2g^2}{k_1}$$

$$E_B = \frac{1}{2}k_2(\Delta x_2)^2 = \frac{2m^2g^2}{k_2}$$

2.6 动量定理与动量守恒定律

力在空间的积累引入了功和动能的概念，本节主要讨论力在时间上的持续作用效果，从而引入冲量和动量的物理概念，并在此基础上研究质点和质点系的动量定理及动量守恒定律.

2.6.1 冲量和质点的动量定理

如果一个质量为 m 的质点，受到力 $\boldsymbol{F}$ 的作用，作用时间为 Δt，$\boldsymbol{F}$ 关于时间 t 的积分 $\int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{F}\mathrm{d}t$ 叫作在 $\Delta t = t_2 - t_1$ 时间内力 F 对质点的冲量，记作 $\boldsymbol{I}$.

$$\boldsymbol{I} = \int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{F}\mathrm{d}t \tag{2-23}$$

冲量是矢量，若 $\boldsymbol{F}$ 是恒力，则 $\boldsymbol{I}$ 与 $\boldsymbol{F}$ 方向相同；若 $\boldsymbol{F}$ 的方向是变化的，则 $\boldsymbol{I}$ 与 $\boldsymbol{F}$ 方向不相同.

用 $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$ 对时间积分，可得

$$\boldsymbol{I} = \int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{F}\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2}m\boldsymbol{a}\mathrm{d}t = \int_{v_1}^{v_2}m\mathrm{d}\boldsymbol{v} = m(\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1)$$

记 $m\boldsymbol{v}$ 为 $\boldsymbol{P}$，叫作质量为 m 的物体的动量.则上式可写成

$$\boldsymbol{I} = \Delta\boldsymbol{P} \tag{2-24}$$

这就是质点的动量定理，即质点在运动过程中所受合外力的冲量，等于该质点动量的增量.

需要注意的是，式(2-23)可求任意力的冲量，而式(2-24)中的 $\boldsymbol{I}$ 是合外力的冲量.当合外力是恒力时，合外力的冲量与合外力的方向相同；合外力不是恒力时，可用动量的增量求合外力的冲量方向.

【例 2-11】 质量为 m 的小球在水平面内以速率 v 做匀速圆周运动.试求：

(1)小球经过 $\frac{1}{4}$ 圆周的过程中小球所受到的冲量.

(2)小球经过 $\frac{1}{2}$ 圆周的过程中小球所受到的冲量.

解 解法一：根据动量定理求解

取小球为研究对象，因小球在水平面内做匀速圆周运动，小球所受的合外力不为零，其方向始终指向圆心，在数值上等于向心力 $\frac{mv^2}{R}$，是变力(因方向不断改变).现求小球由 A 点运动到 B 点(即 $\frac{1}{4}$ 圆周)和由 A 点运动到 C 点(即 $\frac{1}{2}$ 圆周)的过程中所受到的冲量，

建立如图 2-20 所示的坐标系.