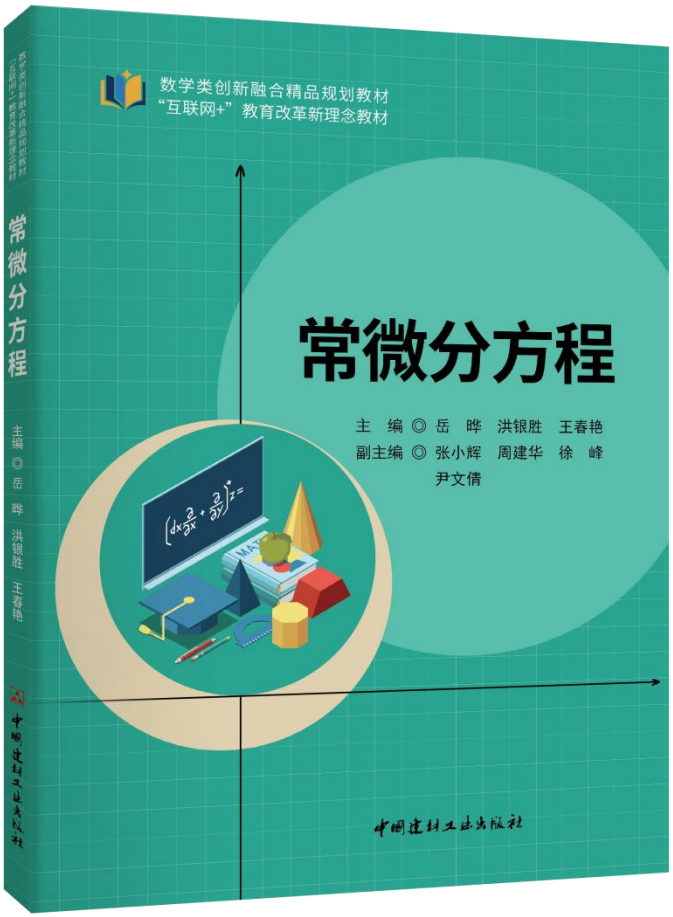
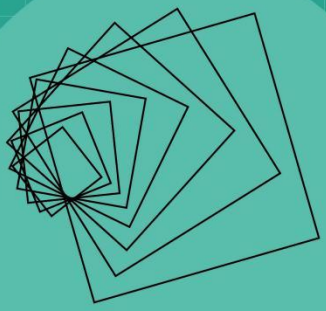
常微分方程



类目：数学类
书名：常微分方程
主编：岳 晔 洪银胜 王春艳
出版社： 中国建材工业出版社
开本：大 16 开
书号：978-7-5160-4073-7
使用层次：通用
出版时间：2024/7/1
定价：48.00
印刷方式：双色
是否有资源：是

策划编辑：李亚博
责任编辑：汪永涛
封面设计：旗语书装



常微分方程

专·精·志·远
为您提供专业服务
编 辑 部：010-63567692
读者服务：010-63567692
网上书店：www.jccbs.com

ISBN 978-7-5160-4073-7
9 787516 040737 >
定价：48.00元

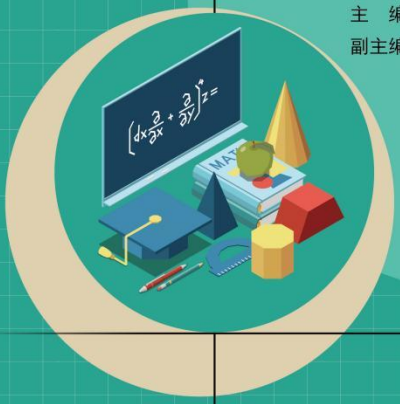
数学类创新融合精品规划教材
“互联网+”教育改革新理念教材
常微分方程
主编◎岳 晔 洪银胜 王春艳

中国建材工业出版社

数学类创新融合精品规划教材
“互联网+”教育改革新理念教材

常微分方程

主 编◎岳 晔 洪银胜 王春艳
副主编◎张小辉 周建华 徐 峰
尹文倩



中国建材工业出版社

数学类创新融合精品规划教材
“互联网+”教育改革新理念教材

常微分方程

主　编◎岳　晔　洪银胜　王春艳

中国建材工业出版社
北　京

图书在版编目(CIP)数据

常微分方程 / 岳晔, 洪银胜, 王春艳主编. -- 北京：中国建材工业出版社, 2024.7

ISBN 978-7-5160-4073-7

Ⅰ. ①常… Ⅱ. ①岳… ②洪… ③王… Ⅲ. ①常微分方程 Ⅳ. ①O175.1

中国国家版本馆 CIP 数据核字（2024）第 050861 号

常微分方程

CHANGWEIFEN FANGCHENG

岳　晔　洪银胜　王春艳　主编

出版发行：中国建材工业出版社

地　　址：北京市西城区白纸坊东街 2 号院 6 号楼

邮政编码：100054

经　　销：全国各地新华书店

印　　刷：涿州汇美亿浓印刷有限公司

开　　本：880mm×1230mm　1/16

印　　张：12

字　　数：370 千字

版　　次：2024 年 7 月第 1 版

印　　次：2024 年 7 月第 1 次

定　　价：48.00 元

本社网址：www.jccbs.com，微信公众号：zgjcgycbs

请选用正版图书，采购、销售盗版图书属违法行为

版权专有，盗版必究。本社法律顾问：北京天驰君泰律师事务所，张杰律师

举报信箱：zhangjie@tiantailaw.com　举报电话：（010）63567684

编　委　会

主　编　岳　晔　洪银胜　王春艳

副主编　张小辉　周建华　徐　峰

尹文倩

前言

PREFACE

本教材以“统筹职业教育、高等教育、继续教育协同创新，推进职普融通、产教融合、科教融汇，优化职业教育类型定位”为指导思想，以人才培养目标为依据，以“必需、够用”为原则，由从事常微分方程教学多年的教师进行编写。教材内容共分七章：常微分方程的基础知识、一阶微分方程解的存在性和唯一性、高阶微分方程、线性微分方程组和高阶线性微分方程的基本理论和解法、一阶线性偏微分方程、边值问题、微分方程稳定性和稳定性理论。

本教材特点是以循序渐进、深入浅出的方式介绍常微分方程的各个知识点；结合案例进行教学，简明扼要、通俗易懂；针对学生的专业要求，做到难易适当，针对性强，在每个知识点讲解后均设有对应练习，做到及时复习、及时掌握。

本教材在编写过程中参考和引用了一些专家、学者的研究成果和文献资料，同时也查阅了大量媒体的有关内容，在此一并致谢。鉴于编者水平有限以及资料收集的局限性，书中难免有不足之处，敬请广大读者批评指正。编者将在今后的修订过程中，进一步梳理与完善。

编　者

2024 年 4 月

CONTENTS
目录

第一章　常微分方程的基础知识 …… 1
第一节　常微分方程的基本概念 …… 1
第二节　初等积分法 …… 7
第二章　一阶微分方程解的存在性和唯一性 …… 22
第一节　预备知识 …… 22
第二节　解的存在性：皮卡德定理 …… 26
第三节　解的存在性：皮亚诺定理 …… 33
第四节　解的延伸 …… 37
第三章　高阶微分方程 …… 42
第一节　线性微分方程的一般理论 …… 42
第二节　常系数线性微分方程的解法 …… 50
第三节　高阶微分方程的降阶和幂级数解法 …… 64
第四章　线性微分方程组和高阶线性微分方程的基本理论和解法 …… 74
第一节　线性微分方程组解的基本理论 …… 74
第二节　常系数线性微分方程组 …… 88
第三节　高阶线性微分方程 …… 100
第五章　一阶线性偏微分方程 …… 114
第一节　首次积分 …… 114
第二节　一阶齐次线性偏微分方程 …… 125
第三节　柯西问题 …… 128
第六章　边值问题 …… 134
第一节　边值问题与周期边值问题 …… 134
第二节　格林函数 …… 149
第三节　本征值和本征函数 …… 152
第七章　微分方程稳定性和稳定性理论 …… 160
第一节　李雅普诺夫稳定性 …… 160
第二节　平面奇点和极限环 …… 168
参考答案 …… 178
参考文献 …… 184

第一章　常微分方程的基础知识

学习目标

1. 理解常微分方程的相关概念 .
2. 认识到学习常微分方程的重要性 .
3. 掌握初等积分法 .

素质目标

通过学习常微分方程的基础知识，启发学生学习数学知识的兴趣，培养学生的逻辑思维能力 .

第一节　常微分方程的基本概念

一、常微分方程基本概念

自变量、未知函数均为实值的微分方程称为**实值微分方程** . 如未知函数取复值或自变量及未知函数均取复值时称为**复值微分方程** . 在本书中只讨论实值微分方程，若无特别声明，均指实变量的实值微分方程 .

（1）常微分方程和偏微分方程

微分方程就是自变量、未知函数及其导数之间的关系 . 如果在微分方程中，自变量的个数只有

一个，通常称这种微分方程为**常微分方程**；自变量的个数为两个或两个以上的微分方程称为**偏微分方程**.

方程

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+b\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+cy=f(t) \tag{1.1}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2+t\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+y=0 \tag{1.2}$$

就是常微分方程，这里 y 为未知函数，t 为自变量.

方程

$$\frac{\partial^2T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2T}{\partial z^2}=0, \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial^2T}{\partial x^2}=4\frac{\partial T}{\partial t} \tag{1.4}$$

就是偏微分方程，这里 T 为未知函数，x，y，z，t 为自变量. 方程(1.3)有三个自变量，而方程(1.4)含有两个自变量.

微分方程中出现的未知函数最高阶导数的阶数称为微分方程的**阶数**. 例如，方程(1.1)是二阶常微分方程，而方程(1.3)和(1.4)都是二阶偏微分方程. 一般的 n 阶常微分方程具有形式

$$F\left(x,\ y,\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\ \cdots,\ \frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}\right)=0, \tag{1.5}$$

这里，$F\left(x,\ y,\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\ \cdots,\ \frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}\right)$ 为 x，y，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，$\cdots$，$\frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}$ 的已知函数，而且一定含有 $\frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}$，$y$ 为未知函数，x 为自变量.

(2) 线性和非线性

如果方程(1.5)的左端为 y，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，$\cdots$，$\frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}$ 的一次有理整式，则称其为 n 阶线性微分方程. n 阶线性微分方程的一般形式为

$$\frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}+a_1(x)\frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}x^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+a_n(x)y=f(x), \tag{1.6}$$

其中，$a_1(x)$，$\cdots$，$a_n(x)$，$f(x)$ 为 x 的已知函数.

不是线性微分方程的微分方程称为**非线性微分方程**.

(3) 解和隐式解

使微分方程(1.5)变为恒等式的函数 $y=\varphi(x)$ 称为方程的(显式)**解**. 如微分方程(1.5)的解 $y=\varphi(x)$ 由关系式 $\Phi(x,\ y)=0$ 决定，则称 $\Phi(x,\ y)=0$ 为微分方程(1.5)的**隐式解**. 隐式解也称为“积分”. 例如，一阶微分方程

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \tag{1.7}$$

有解 $y=\sqrt{1-x^2}$ 和 $y=-\sqrt{1-x^2}$，而关系式 $x^2+y^2=1$ 就是方程(1.7)的隐式解．为了简单起见，不把(显式)解和隐式解加以区别，统称为方程的解．

(4) 通解和特解

n 阶微分方程(1.5)含有 n 个独立的任意常数 c_1，c_2，…，c_n 的解

$$y=\varphi(x, c_1, c_2, \cdots, c_n)$$

称为 n 阶方程(1.5)的**通解**．解对常数的独立性是指，对 φ 及其 $n-1$ 阶偏导数关于 n 个常数 c_1，c_2，…，c_n 的雅可比(Jacobi)行列式不为 0. 同样可以定义方程(1.5)的隐式通解，隐式通解也被称为“通积分”．为了简单起见，不将通解和隐式通解加以区别，统称为方程的通解．为了确定微分方程一个特定的解，通常给出这个解所必需的条件，这就是所谓的**定解条件**．常见的定解条件是初值条件和边值条件．所谓 n 阶微分方程(1.5)的**初值条件**是指如下的 n 个条件：

$$\text{当 } x=x_0 \text{ 时，} y=y_0, \frac{dy}{dx}=y_0^{(1)}, \cdots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}=y_0^{(n-1)}, \tag{1.8}$$

这里，x_0，y_0，$y_0^{(1)}$，…，$y_0^{(n-1)}$ 是给定的 $n-1$ 个常数．初值条件(1.8)有时写为

$$y(x_0)=y_0, \frac{dy(x_0)}{dx}=y_0^{(1)}, \cdots, \frac{d^{n-1}y(x_0)}{dx^{n-1}}=y_0^{(n-1)}. \tag{1.9}$$

求微分方程满足定解条件的解，就是所谓**定解问题**．当定解条件为初值条件时，相应的定解问题就称为**初值问题**．

把满足初值条件的解称为微分方程的**特解**．初值条件不同，对应的特解也不同．一般来说，特解可以通过初值条件的限制，在通解中确定任意常数的值而得到．例如，含任意常数 c 的解 $N=ce^{rt}$ 为方程 $\frac{dN}{dt}=rN$ 的通解；而满足初值条件 $t=t_0$ 时，$N(t)=N_0$ 的解 $N(t)=N_0e^{r(t-t_0)}$ 为方程的特解．特解可在通解中令 $c=N_0e^{-t_0}$ 而得．

容易验证，二阶微分方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}+5\frac{dy}{dx}+4y=0 \tag{1.10}$$

的通解为

$$y=c_1e^{-x}+c_2e^{-4x}, \tag{1.11}$$

其中，c_1，c_2 为任意常数；满足初值条件

$$y(0)=2, \frac{dy(0)}{dx}=1 \tag{1.12}$$

的特解为 $y=3e^{-x}-e^{-4x}$，可以通过在通解(1.11)中利用初值条件求得 $c_1=3$，$c_2=-1$ 而得到．

(5) 积分曲线和向量场

一阶微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,\ y) \tag{1.13}$$

的解 $y=\varphi(x)$ 表示 Oxy 平面上的一条曲线，称为微分方程的积分曲线，而通解 $y=\varphi(x,\ c)$ 表示平面上的一族曲线，特解 $\varphi(x_0)=y_0$ 则为过点 $(x_0,\ y_0)$ 的一条积分曲线．积分曲线上过每一点的切线斜率 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 为方程右端 $f(x,\ y)$ 在该点处的值．反之，如有一条曲线，其上每一点的切线斜率为 $f(x,\ y)$，则此曲线为积分曲线．

用 $f(x,\ y)$ 在 Oxy 平面某区域 D 上定义过各点的小线段的斜率方向，这样的区域 D 称为方程(1.13)所定义的方向场，又称**向量场**．用方向场定义或代表相应的微分方程(1.13)．

方向场中方向相同的曲线 $f(x,\ y)=k$ 称为**等倾斜线**或**等斜线**．利用取不同 k 值的等倾斜线来判别积分曲线的走向．

(6) 微分方程组

用两个以上的关系式表示的微分方程称为**微分方程组**．

习惯将一般 n 阶常微分方程写成解出最高阶导数的形式：

$$z^{(n)}=g(t,\ z,\ z',\ \cdots,\ z^{(n-1)}), \tag{1.14}$$

其中，$z^{(n)}=\frac{\mathrm{d}^n z}{\mathrm{d}t^n}$，$z'=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$，$\cdots$，$z^{(n-1)}=\frac{\mathrm{d}^{n-1}z}{\mathrm{d}t^{n-1}}$．如果把 z，z'，$\cdots$，$z^{(n-1)}$，$z^{(n)}$ 都理解为未知函数，取变换 $y_1=z$，$y_2=z'$，$\cdots$，$y_n=z^{(n-1)}$，则 n 阶方程(1.14)可以用一阶方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t}=y_2,\\ \vdots\\ \dfrac{\mathrm{d}y_{n-1}}{\mathrm{d}t}=y_n,\\ \dfrac{\mathrm{d}y_n}{\mathrm{d}t}=g(t,\ y_1,\ \cdots,\ y_n)\end{cases}$$

代替，即可以将高阶方程或高阶方程组变换为一般的一阶方程组

$$\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}t}=f_i(t,\ y_1,\ \cdots,\ y_n),\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n,$$

或更简单地写成向量形式

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{f}(t,\ \boldsymbol{y}),\ \boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^n, \tag{1.15}$$

其中

$$\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{bmatrix},\ \boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{y})=\begin{bmatrix}f_1(t,y_1,\cdots,y_n)\\f_2(t,y_1,\cdots,y_n)\\\vdots\\f_n(t,y_1,\cdots,y_n)\end{bmatrix}.$$

前面提到的线性和非线性，解和隐式解，通解和特解以及积分曲线和方向场等概念同样适合微分方程组．例如，如果存在向量函数 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\varphi}(t)$ 或 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\varphi}(t,c)$ 代入方程组(1.15)后变成恒等式，则称它们为方程组(1.15)的解，这里 $c=(c_1,\cdots,c_n)$ 为向量常数．一般把向量形式的方程组同样称为方程，不严格区分方程和方程组．

(7) 驻定与非驻定，动力系统

如果方程组右端不含自变量 t：

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{f}(y),\ \boldsymbol{y}\in D\subseteq\mathbf{R}^n,\tag{1.16}$$

则称其为驻定(自治)的，右端含 t 的微分方程组(1.15)称为**非驻定(非自治)**的．

对非驻定微分方程组(1.15)，可以引进新的时间 τ，方程组(1.15)可化为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}\tau}=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{y}),\\[2ex]\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}=1,\end{cases}$$

成为 $n+1$ 维空间 $(t,\boldsymbol{y})$ 驻定方程．

驻定微分方程组(1.16)的过 $\boldsymbol{y}$ 的解 $\boldsymbol{\varphi}(t;\boldsymbol{y})$ 可以视 t 为参数，有非常好的性质：可看成 D 到 D 的**单参数变换群**，也就是：如记 $\boldsymbol{\Phi}_t(\boldsymbol{y})=\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{y})$，令 $\boldsymbol{\Phi}_t(\boldsymbol{y})$ 是参数为 t 的 $\boldsymbol{y}\in D$ 的映射(变换)，则映射在 D 上满足恒同性 $\boldsymbol{\Phi}_0(\boldsymbol{y})=\boldsymbol{y}$ 和可加性 $\boldsymbol{\Phi}_{t_1+t_2}(\boldsymbol{y})=\boldsymbol{\Phi}_{t_1}(\boldsymbol{\Phi}_{t_2}(y))=\boldsymbol{\Phi}_{t_2}(\boldsymbol{\Phi}_{t_1}(\boldsymbol{y}))$．

将满足上述性质的映射称为**动力系统**．驻定微分方程组称为**连续**动力系统 $\{\boldsymbol{\Phi}_t\mid t\in\mathbf{R}\}$，或称连续动力系统 $\{\boldsymbol{\Phi}_t\mid t\in\mathbf{R}\}$ 为由常微分方程定义的动力系统．也可以定义**离散**动力系统：$\{\boldsymbol{\Phi}_n\mid n\in\mathbf{Z}\}$，这里 $\mathbf{Z}$ 为整数集，例如驻定差分方程 $y_{n+1}=f(y_n)$ 或驻定微分方程组(1.16)的解 $\boldsymbol{\Phi}_n=\boldsymbol{\varphi}(n;\boldsymbol{y})$ 便构成离散动力系统．

(8) 相空间和轨线

不含自变量，仅由未知函数组成的空间称为**相空间**．积分曲线在相空间中的投影称为**轨线**．对驻定微分方程组(1.16)，方程组 $f(y)=0$ 的解 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}^*$ 表示相空间中的点，它满足微分方程组，故称为**平衡解(驻定解、常数解)**，又称为**奇点**．

对平面一阶驻定微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f(x,y),\\[2ex]\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=g(x,y),\end{cases}\tag{1.17}$$

其相空间 (x, y) 又称为相平面. 驻定方程的积分曲线有特殊的性质：时间轴 t 的平移不影响方向场，即可以在空间 (x, y, t) 将方程的积分曲线投影到 (x, y) 平面上，方程组(1.17)变为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{g(x, y)}{f(x, y)} \text{ 或} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{f(x, y)}{g(x, y)} \tag{1.18}$$

其在相平面上的积分曲线即为轨线. 同样可用相平面上方程(1.18)的方向场进行研究，直接在相平面上进行讨论.

应用等倾斜线方法确定轨线的方向，其中相平面上满足 $f(x, y)=0$ 的曲线表示轨线的 x 方向变化为 0，称为**垂直等倾斜线**，过曲线的点其轨线的切线垂直于 x 坐标轴；而 $g(x, y)=0$ 的曲线称为**水平等倾斜线**，过曲线上的点其轨线的切线平行于 x 坐标轴. 垂直等倾斜线与水平等倾斜线的交点 (x_0, y_0) 为奇点，方程有解 $x(t)=x_0$，$y(t)=y_0$. 通过垂直等倾斜线与水平等倾斜线在相平面上划分的区域可以判断轨线的走向.

二、学习常微分方程的重要性

G. F. 塞蒙斯曾评价微分方程在数学中的地位："300 年来分析是数学里首要的分支，而微分方程又是分析的心脏. 这是初等微积分的天然后继课，又是为了解物理科学的一门最重要的数学，而且在它所产生的较深的问题中，它又是高等分析里大部分思想和理论的根源."

在大学数学基础课程的学习中往往把微分方程分为常微分方程和数学物理方程或偏微分方程两门课程进行学习，常微分方程是更为基本的课程.

有些人认为常微分方程这一学科(只)是求解的技巧和提示的汇集，之所以重要是因为它能解决物理学、工程学等方面的问题. 实际上，常微分方程这一学科是统一、完整而连贯的. 当代数学大师、菲尔兹数学奖获得者 S. 斯梅尔(S. Smale)和 V. I. 阿诺尔德(V. I. Arnol'd)都出版过用现代观点阐述的常微分方程教材. S. 斯梅尔还认为"常微分方程对其他学科领域的重要性在于它能启发、统一并推动这些学科领域". 了解微分方程与其他学科之间是如何联系的，对于学生及数学工作者来说，是获得洞察和启示的一种主要源泉. 这些正是学习常微分方程应该遵循的方法. 除了学习常微分方程基本理论，掌握求解技巧，学习如何建立模型、解决实际问题外，还要体会常微分方程如何启发、统一并推动其他学科领域，了解微分方程与其他学科之间是如何联系的，从而得到启示，提高洞察力.

习　题

1. 指出下面微分方程的阶数，并回答方程是否是线性的：

(1) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=4x^2-y$；

(2) $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2+12xy=0$；

(3) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + x\frac{dy}{dx} - 3y^2 = 0$;

(4) $x\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 3xy = \sin x$;

(5) $\frac{dy}{dx} + \cos y + 2x = 0$;

(6) $\sin\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + e^y = x$.

2. 给定一阶微分方程 $\frac{dy}{dx} = 2x$,

(1) 求出它的通解;

(2) 求通过点 (1, 4) 的特解;

(3) 求出与直线 $y = 2x + 3$ 相切的解;

(4) 求出满足条件 $\int_0^1 y dx = 2$ 的解.

3. 求下列两个微分方程的公共解:

$$y' = y^2 + 2x - x^4,\ y' = 2x + x^2 + x^4 - y - y^2.$$

4. 求微分方程 $y' + xy'^2 - y = 0$ 的直线积分曲线.

第二节　初等积分法

初等积分法, 就是运用各种技巧, 通过初等函数及其有限次积分来表示微分方程的解的方法. 经过众多数学家长期的努力, 在微分方程发展的早期, 主要是 17—18 世纪, 人们利用一系列的技巧, 找到了一些特殊类型微分方程的解法. 这些方法和技巧, 构成本章的主要内容. 尽管刘维尔后来证明了绝大部分的微分方程不能利用初等积分法来进行求解, 但是这些方法无论在理论上还是在实际应用中仍然有其重要性.

一、恰当方程

定义 1.1　称形如

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \tag{1.19}$$

的式子为一阶微分方程的对称形式.

注 1.1 需要指出的是, 严格来说, (1.19) 式并不是微分方程. 将一阶微分方程写成 (1.19) 式的形式时, 会为研究带来很大的便利. 既可以讨论形如

$$\frac{dy}{dx}=\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$$

的微分方程，也可以讨论形如

$$\frac{dx}{dy}=\frac{Q(x,y)}{P(x,y)}$$

的微分方程，即不拘于一定要求 y 作为 x 的函数．为了叙述方便，称对称形式(1.19)为微分方程．

定义 1.2 如果存在一个连续可微函数 $\Phi(x,y)$，使得

$$d\Phi(x,y)=P(x,y)dx+Q(x,y)dy,$$

则称方程(1.19)为**恰当方程**或**全微分方程**．

由定义 1.2 可知，当方程(1.19)为恰当方程时，方程(1.19)可以写成

$$d\Phi(x,y)=0,$$

从而

$$\Phi(x,y)=c, \tag{1.20}$$

其中，c 为任意常数．称(1.20)式为方程(1.19)的**通积分**．

当取定常数 c 之后，可以证明由 $\Phi(x,y)=c$ 确定的隐函数 $y=u(x)$ 或 $x=v(y)$ 是方程(1.19)的解，即 $u'(x)=-\dfrac{P(x,u(x))}{Q(x,u(x))}$ 或 $v'(y)=-\dfrac{Q(v(y),y)}{P(v(y),y)}$．事实上，假设 $y=u(x)$ 满足

$$\Phi(x,u(x))\equiv c,$$

且 $\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}\neq 0$，则有

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,u(x))+\frac{\partial\Phi}{\partial y}(x,u(x))u'(x)=0.$$

于是

$$u'(x)=-\frac{\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}(x,u(x))}{\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}(x,u(x))}=-\frac{P(x,u(x))}{Q(x,u(x))}.$$

反之，假如 $y=u(x)$ 是方程(1.19)的解，则

$$\frac{d\Phi}{dx}(x,u(x))=\frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,u(x))+\frac{\partial\Phi}{\partial y}(x,u(x))u'(x)=0.$$

因此，$\Phi(x,y)\equiv c$，其中 $c=\Phi(x_0,y(x_0))$．

例 1.1 求解微分方程

$$ydx+xdy=0.$$

解 由观察得到 $d(xy)=ydx+xdy$，于是

$$xy = c$$

是该方程的通积分，其中 c 为任意常数．

例 1.2　求解微分方程

$$x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y = 0\,.$$

解　注意到

$$\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}(x^2 + y^2)\right) = x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y\,,$$

于是，该方程的通积分为

$$x^2 + y^2 = c\,,$$

其中，c 为任意非负常数．

一般来说，在对方程(1.19)进行求解时，需要处理的问题是：

(1)如何判断方程(1.19)是恰当的？

(2)如果方程(1.19)是恰当的，如何找到 $\Phi(x, y)$？

(3)如果方程(1.19)不是恰当的，是否可以将其转化成一个恰当方程？

本章的主要内容就是对这三个问题的处理．本节主要讨论前两个问题，而第三个问题是本章后面几节讨论的重点．

定理 1.1　设函数 $P(x, y)$ 和 $Q(x, y)$ 在单连通区域 $D \subset \mathbf{R}^2$ 上连续，且具有连续的一阶偏导数 $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ 和 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，则方程(1.19)是恰当的充要条件为

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \tag{1.21}$$

在 D 内成立；而当上式成立时，对于 (x_0, y_0)，$(x, y) \in D$ 方程(1.19)的通积分为

$$\int_{\gamma} P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y = c\,, \tag{1.22}$$

其中，γ 为任意连接 (x_0, y_0) 与 (x, y) 并在 D 内的由有限多条光滑曲线段组成的曲线，c 为任意常数．

证明　假设方程(1.19)是恰当的．由定义可知，存在可微函数 $\Phi(x, y)$，使得

$$\mathrm{d}\Phi(x, y) = P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y\,,$$

因此

$$P(x, y) = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\,, \quad Q(x, y) = \frac{\partial \Phi}{\partial y}\,.$$

再由 $P(x, y)$，$Q(x, y)$ 的可微性可知

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x}\,.$$

由于 $\frac{\partial P}{\partial y}$ 和 $\frac{\partial Q}{\partial x}$ 是连续的，因此

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x}.$$

于是

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

反之，假设(1.21)式成立．由曲线积分的 Green 公式可知，对于 D 内连接 (x_0, y_0) 与 (x, y) 的逐段光滑的曲线 γ（图 1.1），

$$\Phi(x, y) = \int_{\gamma} P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y$$

不依赖于路径 γ 的选择，且满足

$$\mathrm{d}\Phi(x, y) = P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y,$$

即方程(1.19)是恰当的．

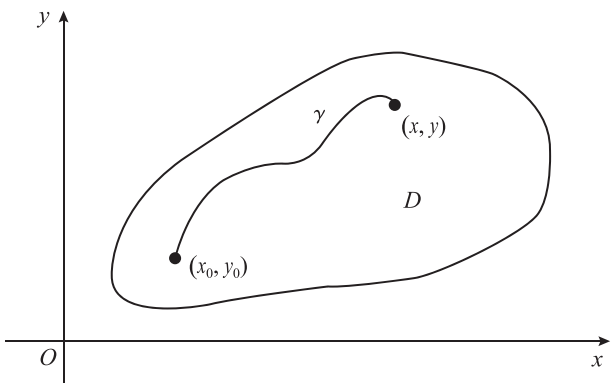


图 1.1

注 1.2 当单连通区域 D 为矩形区域

$$\{(x, y) \mid \alpha < x < \beta, a < y < b\}$$

时(图 1.2)，(1.22)式中的积分可以取成

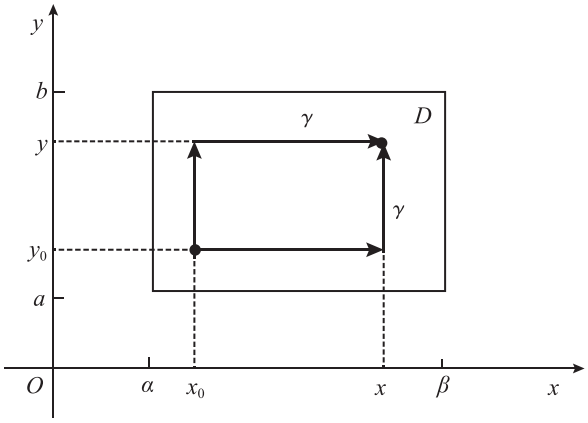


图 1.2

$$\int_{x_0}^{x} P(t, y_0)\,\mathrm{d}t + \int_{y_0}^{y} Q(x, s)\,\mathrm{d}s \tag{1.23}$$

或者

$$\int_{x_0}^{x} P(t, y)\,\mathrm{d}t + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, s)\,\mathrm{d}s \tag{1.24}$$

注 1.3 尽管(1.23)式或(1.24)式给出了恰当方程(1.19)的通积分，但常用下面的方法找到函数 $\Phi(x, y)$，进而得到恰当方程的通积分：

由条件 $\mathrm{d}\Phi(x, y) = P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y$ 可知

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = P(x, y) ,$$

于是

$$\Phi(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(t, y)\,\mathrm{d}t + \phi(y) ,$$

其中，可微函数 $\phi(y)$ 待定．再由 $\frac{\partial \Phi}{\partial y} = Q(x, y)$ ，可以得到

$$\frac{\partial}{\partial y}\int_{x_0}^{x} P(t, y)\,\mathrm{d}t + \phi'(y) = Q(x, y) .$$

利用条件 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ ，得到

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\partial Q}{\partial t}(t, y)\,\mathrm{d}t + \phi'(y) = Q(x, y) .$$

由此可知

$$\phi'(y) = Q(x_0, y) .$$

因此，可以选择

$$\phi(y) = \int_{y_0}^{y} Q(x_0, s)\,\mathrm{d}s .$$

于是

$$\Phi(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(t, y)\,\mathrm{d}t + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, s)\,\mathrm{d}s .$$

例 1.3　求解微分方程

$$(y\mathrm{e}^{x} + 2\mathrm{e}^{x} + y^{2})\,\mathrm{d}x + (\mathrm{e}^{x} + 2xy)\,\mathrm{d}y = 0 .$$

解　这里 $P(x, y) = y\mathrm{e}^{x} + 2\mathrm{e}^{x} + y^{2}$，$Q(x, y) = \mathrm{e}^{x} + 2xy$．因为

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \mathrm{e}^{x} + 2y = \frac{\partial Q}{\partial x} ,$$

所以所给方程是恰当的．于是，存在可微函数 $\Phi(x, y)$ ，使得

$$\mathrm{d}\Phi(x, y) = (y\mathrm{e}^{x} + 2\mathrm{e}^{x} + y^{2})\,\mathrm{d}x + (\mathrm{e}^{x} + 2xy)\,\mathrm{d}y .$$

由此可知

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = P(x, y) = y\mathrm{e}^{x} + 2\mathrm{e}^{x} + y^{2} ,$$

即

$$\Phi(x, y) = y\mathrm{e}^{x} + 2\mathrm{e}^{x} + xy^{2} + \phi(y) ,$$

其中，$\phi(y)$ 为待定的可微函数．再利用

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = Q(x, y) = \mathrm{e}^{x} + 2xy ,$$

得到

$$\phi'(y) = 0 .$$

选择 $\phi(y) \equiv 0$，即 $\Phi(x, y) = ye^x + 2e^x + xy^2$，因此所给方程的通积分为

$$ye^x + 2e^x + xy^2 = c ,$$

其中，c 为任意常数 .

注 1.4　考虑一阶微分形式

$$\omega^1 = P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y .$$

称 ω^1 是闭的 . 如果 $\mathrm{d}\omega^1 = 0$，称 ω^1 是恰当的；如果存在函数 $\Phi(x, y)$，使得 $\omega^1 = \mathrm{d}\Phi(x, y)$. 由 Poincaré 引理可知，在 $\mathbf{R}^2$ 上，一阶微分形式是恰当的当且仅当它是闭的 . 注意到

$$\mathrm{d}\omega^1 = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\hat{}\mathrm{d}y .$$

显然，$\mathrm{d}\omega^1 = 0$ 当且仅当

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} .$$

而此时函数 $\Phi(x, y)$ 的表达式为

$$\Phi(x, y) = \int \omega^1 .$$

Poincaré 引理成立是有条件的，它与函数 $P(x, y)$，$Q(x, y)$ 的定义域的拓扑有关 . 关于这一点，建议有兴趣的读者阅读有关的拓扑学教材 .

二、变量分离方程

当讨论方程(1.19)不是恰当方程时，它的解法基本想法是通过变换，将其化成一个恰当方程求解 . 在本节中，将讨论变量分离方程的解法 . 而在随后的几节中，将利用变换或者积分因子求解方程(1.19).

定义 1.3　如果方程(1.19)中的函数 $P(x, y)$，$Q(x, y)$ 均可写成 x 的函数和 y 的函数的乘积，即

$$P(x, y) = P_1(x)P_2(y) , \quad Q(x, y) = Q_1(x)Q_2(y) ,$$

则称方程(1.19)是变量分离方程 .

当方程(1.19)是变量分离方程时，它可以写成

$$P_1(x)P_2(y)\mathrm{d}x + Q_1(x)Q_2(y)\mathrm{d}y = 0 . \tag{1.25}$$

一般来讲，由于

$$\frac{\partial}{\partial y}(P_1(x)P_2(y)) \neq \frac{\partial}{\partial x}(Q_1(x)Q_2(y)) ,$$

方程(1.25)不是恰当方程，因此上一节的方法不能用来求解该方程 . 然而，当 $P_2(y) \equiv Q_1(x) \equiv 1$

时，方程(1.25)是恰当的．此时，方程(1.25)的通积分为

$$\int_{x_0}^{x} P_1(t)\,\mathrm{d}t + \int_{y_0}^{y} Q_2(s)\,\mathrm{d}s = c\ ,$$

其中，c 为任意常数．由此可以将方程(1.25)两端乘以 $\dfrac{1}{P_2(y)Q_1(x)}$，得

$$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}\mathrm{d}x + \frac{Q_2(y)}{P_2(y)}\mathrm{d}y = 0\ , \tag{1.26}$$

其通积分为

$$\int_{x_0}^{x} \frac{P_1(t)}{Q_1(t)}\mathrm{d}t + \int_{y_0}^{y} \frac{Q_2(s)}{P_2(s)}\mathrm{d}s = c\ , \tag{1.27}$$

其中，c 为任意常数．

容易看出，当 $P_2(y)Q_1(x) \neq 0$ 时，方程(1.26)与方程(1.25)是同解的，因此(1.27)式也是方程(1.25)的通积分．

假设 $P_2(b_i) = 0(i = 1, 2, \cdots, m)$，直接观察可知方程(1.25)有解

$$y \equiv b_i\ , i = 1, 2, \cdots, m\ .$$

而当 $Q_1(a_j) = 0(j = 1, 2, \cdots, n)$ 时，方程(1.25)有解

$$x \equiv a_j\ , j = 1, 2, \cdots, n\ .$$

由上面的讨论，可以得到下面的结论．

定理 1.2　方程(1.25)的所有解为

$$\int_{x_0}^{x} \frac{P_1(t)}{Q_1(t)}\mathrm{d}t + \int_{y_0}^{y} \frac{Q_2(s)}{P_2(s)}\mathrm{d}s = c\ .$$

和

$$y \equiv b_i\ , i = 1, 2, \cdots, m\ ,$$

$$x \equiv a_j\ , j = 1, 2, \cdots, n\ ,$$

其中，$P_2(b_i) = 0(i = 1, 2, \cdots, m)$ 和 $Q_1(a_j) = 0(j = 1, 2, \cdots, n)$，c 为任意常数．

例 1.4　求解微分方程

$$x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \sqrt{1 - y^2}\ .$$

解　将该方程写成对称形式

$$\sqrt{1 - y^2}\,\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y = 0\ .$$

显然，这不是恰当方程，但是由于

$$P(x, y) = \sqrt{1 - y^2}\ , Q(x, y) = -x\ ,$$

它是变量分离方程．按照上面的讨论可知，原方程的解由通积分

$$\int_{x_0}^{x} \frac{1}{t}\mathrm{d}t - \int_{y_0}^{y} \frac{1}{\sqrt{1 - s^2}}\mathrm{d}s = c$$

(c 为任意常数)及

$$y \equiv \pm 1 , x \equiv 0$$

组成. 显然, $x \equiv 0$ 不是原方程的解. 而对上述的通积分进行整理可得到

$$x = ce^{\arcsin y} ,$$

故原方程的解为

$$y \equiv \pm 1$$

和

$$x = ce^{\arcsin y} ,$$

其中, c 为任意非零常数.

例 1.5　求解微分方程

$$y' = (y - 1)(y - 2) ,$$

并画出积分曲线的草图.

解　显然, $y \equiv 1$ 及 $y \equiv 2$ 均为该方程的解. 现在假设 $y \neq 1, 2$, 于是有

$$\frac{dy}{(y - 1)(y - 2)} = dx,$$

积分后得到

$$y = \frac{2 - ce^{x}}{1 - ce^{x}} ,$$

其中, c 为任意常数. 所以, 该方程的所有解为 $y \equiv 1$, $y \equiv 2$ 以及由上式给出的通解. 积分曲线的草图如图 1.3 所示.

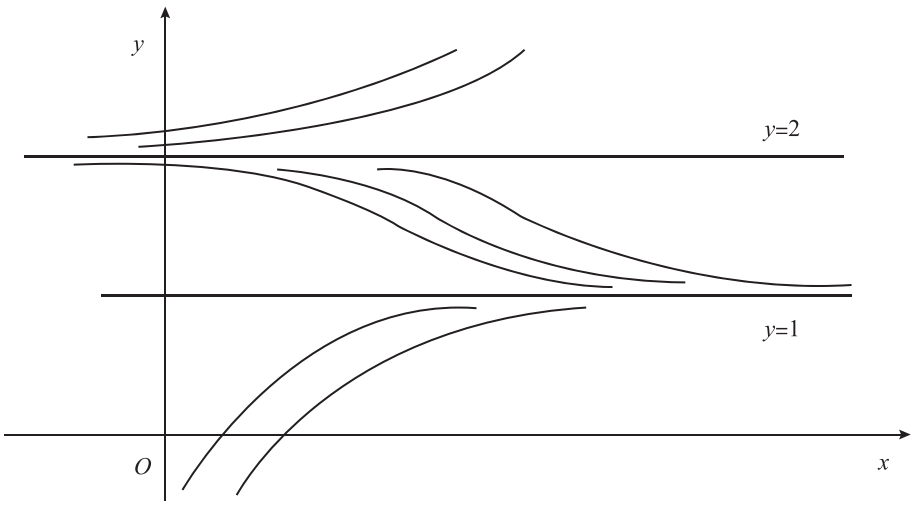


图 1.3

注 1.5　这个例子表明, 并不是对于任意的初值 (x_0, y_0) 都能通过确定通解中的常数得到满足初始条件 $y(x_0) = y_0$ 的解. 例如, 满足 $y(x_0) = 1$ 的解 $y \equiv 1$ 就不可能通过选择通解中的常数 c 来得到, 除非让 $c = \infty$.

例 1.6　求解微分方程

$$y' = y^{\frac{1}{3}}.$$

解　将该方程写成对称形式

$$y^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}x - \mathrm{d}y = 0.$$

上式两端除以 $y^{\frac{1}{3}}$，得到

$$\mathrm{d}x - y^{-\frac{1}{3}}\mathrm{d}y = 0,$$

积分后得到

$$x + c - \frac{3}{2}y^{\frac{2}{3}} = 0,$$

其中，c 为任意常数，于是

$$y = \pm\left[\frac{2}{3}(x + c)\right]^{\frac{3}{2}}, x \geqslant -c.$$

又 $y \equiv 0$ 是原方程的解，所以原方程的所有解为

$$y = \pm\left[\frac{2}{3}(x + c)\right]^{\frac{3}{2}}, x - c,$$

和

$$y \equiv 0.$$

注 1.6　观察上面微分方程的解，可以得到如下的结论：对于任意不在 x 轴上的点 P，过点 P 存在唯一的解．这个解可以通过确定通解 $y = \pm\left[\frac{2}{3}(x + c)\right]^{\frac{3}{2}}$ 中的任意常数 c 来得到．然而，当点 P 落在 x 轴上时，设其坐标为 $(x_0, 0)$，则过点 P 的解既有

$$y = \begin{cases} \pm\left[\frac{2}{3}(x - x_0)\right]^{\frac{3}{2}}, & x \geqslant x_0, \\ 0, & x < x_0, \end{cases}$$

也有 $y \equiv 0$. 换句话说，过点 P 的解不是唯一的(图 1.4).

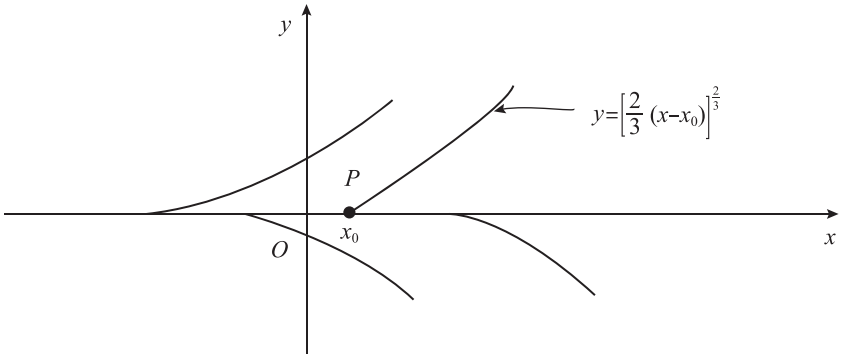


图 1.4

事实上，对于任意的 $x_1 > x_0$，解

$$y = \begin{cases} \pm\left[\frac{2}{3}(x - x_1)\right]^{\frac{3}{2}}, & x \geqslant x_1, \\ 0, & x < x_1 \end{cases}$$

都经过点 P，即过点 P 有无穷多个解.

例 1.7(跟踪问题)　设 A 从 (x, y) 一平面的原点出发，沿 x 轴正向前进；同时，B 从点 $(0, b)(b > 0)$ 开始跟踪 A，即 B 的运动方向永远指向 A 并与 A 保持等距 b. 试求 B 的运动轨迹.

解　设在 t 时刻 A 的坐标为 $(x_A(t), 0)$，B 的坐标为 $(x_B(t), y_B(t))$，则由 B 的运动方向永远指向 A 可得到

$$\frac{\mathrm{d}y_B(t)/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x_B(t)/\mathrm{d}t} = \frac{y_B(t)}{x_B(t) - x_A(t)},$$

再由它们保持等距 b 可知

$$(x_B(t) - x_A(t))^2 + y_B^2(t) = b^2.$$

由此得到

$$\frac{\mathrm{d}y_B}{\mathrm{d}x_B} = -\frac{y_B}{\sqrt{b^2 - y_B^2}},$$

即

$$\frac{\sqrt{b^2 - y_B^2}}{y_B}\mathrm{d}y_B = -\mathrm{d}x_B.$$

上式两端积分，得到

$$-(x_B + c) = -b\ln\frac{b + \sqrt{b^2 - y_B^2}}{y_B} + \sqrt{b^2 - y_B^2},$$

其中，c 为任意常数. 再由已知条件可知，当 $x_B = 0$ 时，$y_B = b$. 由此得到常数 $c = 0$，因此 B 的运动轨迹为曲线

$$x = b\ln\frac{b + \sqrt{b^2 - y^2}}{y} - \sqrt{b^2 - y^2}.$$

例 1.8　称函数 $f(x, y)$ 是 n 次齐次函数，如果

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y).$$

称方程

$$M(x, y)\mathrm{d}x + N(x, y)\mathrm{d}y = 0 \tag{1.28}$$

为 n 次齐次方程，其中 $M(x, y)$，$N(x, y)$ 均为 n 次齐次函数. 求解该齐次方程.

解　一般来说，方程(1.28)既不是恰当方程，也不是变量分离方程，例如 $M(x, y) = x^2 + y^2$，$N(x, y) = xy$ 时. 然而，当做变换

$$y = ux$$

后，可以将方程(1.28)转化成变量分离方程．事实上，在上面的变换之下，原方程写成

$$M(x, ux)\mathrm{d}x + N(x, ux)(x\mathrm{d}u + u\mathrm{d}x) = 0.$$

利用 n 次齐次函数的定义，整理后得到

$$x^n(M(1, u) + uN(1, u))\mathrm{d}x + x^{n+1}N(1, u)\mathrm{d}u = 0. \tag{1.29}$$

这是一个变量分离方程. 当 $x^{n+1}(M(1, u)+uN(1, u)) \neq 0$ 时，这个方程两端乘以 $\dfrac{1}{x^{n+1}(M(1, u)+uN(1, u))}$，立即得到

$$\frac{1}{x}\mathrm{d}x + \frac{N(1, u)}{M(1, u) + uN(1, u)}\mathrm{d}u = 0.$$

余下来要做的就是直接写出它的通积分．注意，还需要讨论

$$x^{n+1}(M(1, u) + uN(1, u)) = 0$$

对应的根是否为原方程的解．

例 1.9　求解微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x + y}{x - y}.$$

解　当将这个方程写成对称形式时，显然其对称形式既不是恰当方程，也不是变量分离方程，但是它是一次齐次方程．因此，令 $y = ux$，得到

$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + u = \frac{1 + u}{1 - u},$$

即

$$\frac{1 - u}{1 + u^2}\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

这个式子两端积分，得到

$$\arctan u - \ln\sqrt{1 + u^2} = \ln|x| - \tilde{c},$$

其中，$\tilde{c}$ 为任意常数．整理后得到

$$\sqrt{x^2 + y^2} = ce^{\arctan\frac{y}{x}},$$

其中，c 为任意非负常数．采用极坐标 $x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$，则可将上面的式子化成更简单的形式：

$$r = ce^{\theta}.$$

这是以原点为焦点的螺线族．

例 1.10　求解微分方程

$$2x^3y' = (2x^2 - y^2)y,\ x > 0.$$

解　令 $y = ux$，则

$$2x^3\left(x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u\right)=x^3(2-u^2)u\,.$$

于是

$$2x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=-u^3\,.$$

这是变量分离方程. 解这个方程, 得到

$$u^{-2}=\ln x+c$$

(c 为任意常数) 和 $u\equiv 0$. 将 $y=ux$ 代入, 得到原方程的解为

$$(\ln x+c)y^2=x^2$$

和

$$y\equiv 0\,.$$

三、一阶线性微分方程

本节讨论非常重要的一阶线性微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+p(x)y=q(x)\,,\tag{1.30}$$

其中 $p(x)$, $q(x)$ 为区间 (a,b) 上的连续函数. 现将要给出方程(1.30)的解的表达式、结构、大范围存在性, 初值问题解的唯一性.

在方程(1.30)中, 当 $q(x)\equiv 0$ 时, 得到微分方程

$$y'+p(x)y=0\,.\tag{1.31}$$

称方程(1.31)是方程(1.30)对应的齐次方程, 也称它为**一阶齐次线性微分方程**. 相应地, 当 $q(x)\neq 0$ 时, 称方程(1.30)为**一阶非齐次线性微分方程**. 注意, 这里的齐次方程的含义与上一节的齐次方程的含义不同.

将方程(1.30)和(1.31)分别写成对称形式

$$(p(x)y-q(x))\mathrm{d}x+\mathrm{d}y=0\,,\tag{1.32}$$

$$p(x)y\mathrm{d}x+\mathrm{d}y=0\,.\tag{1.33}$$

先讨论方程(1.33)的解法. 注意到这是一个变量分离方程, 按照上一节的解法, 当 $y\neq 0$ 时, 将此方程两端乘以 $\dfrac{1}{y}$, 然后积分即可得到

$$\ln|y|+\int_{x_0}^{x}p(t)\mathrm{d}t=c\,,$$

其中, c 为任意常数. 整理后得到

$$y=\pm\mathrm{e}^{c}\cdot\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x}p(t)\mathrm{d}t}\,,$$

即该方程的解的形式为

$$y = c_1 e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)\,dt},$$

其中 $c_1 \neq 0$. 注意到 $y \equiv 0$ 是方程(1.31)的解. 因此, 如果允许 $c_1 = 0$, 则上式包含了方程(1.31)的所有解, 即方程(1.31)的所有解为

$$y = ce^{-\int_{x_0}^{x} p(t)\,dt},$$

其中 c 为任意常数.

方程(1.32)两端乘以 $e^{\int_{x_0}^{x} p(t)\,dt}$, 可以得到

$$d\left(e^{\int_{x_0}^{x} p(t)\,dt} y\right) = e^{\int_{x_0}^{x} p(t)\,dt} q(x)\,dx,$$

即

$$d\left(e^{\int_{x_0}^{x} p(t)\,dt} y - \int_{x_0}^{x} e^{\int_{x_0}^{s} p(t)\,dt} q(s)\,ds\right) = 0,$$

因此

$$y = e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)\,dt}\left(c + \int_{x_0}^{x} e^{\int_{x_0}^{s} p(t)\,dt} q(s)\,ds\right), \tag{1.34}$$

其中, c 为任意常数. 显然, (1.34)式给出了方程(1.30)的所有解.

由解的表达式(1.34)可知:

(1)方程(1.30)的解对于任意的 $x \in (a, b)$ 均存在, 因此方程(1.30)的解是大范围存在的, 即解的定义区间为 (a, b);

(2)方程(1.30)满足初始条件 $y(x_0) = y_0$ 的解是存在且唯一的, 其表达式为

$$y(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)\,dt}\left(y_0 + \int_{x_0}^{x} e^{\int_{x_0}^{s} p(t)\,dt} q(s)\,ds\right). \tag{1.35}$$

注 1.7　在求解方程(1.30)时, 用函数 $e^{\int_{x_0}^{x} p(t)\,dt}$ 乘以该方程的两端, 使得它转化成一个恰当方程, 从而获得了方程(1.30)的解. 这个函数称为**积分因子**. 在下一节中, 将讨论对于一般的一阶微分方程的对称形式(1.19), 如何寻找积分因子.

设 $y = \phi_1(x)$ 和 $y = \phi_2(x)$ 是方程(1.30)的两个解, 则

$$(\phi_1(x) - \phi_2(x))' + p(x)(\phi_1(x) - \phi_2(x)) = 0,$$

即 $y = \phi_1(x) - \phi_2(x)$ 是对应的齐次方程(1.31)的解. 由前面的讨论可知

$$\phi_1(x) = \phi_2(x) + ce^{-\int_{x_0}^{x} p(t)\,dt},$$

其中, c 为任意常数. 由此得到如下**结论**:

方程(1.30)的通解是由它的一个特解加上对应的齐次方程(1.31)的通解构成的.

注 1.8　上面的结论不仅仅对于方程(1.30)是成立的, 对于更为一般的线性方程组也是成

立的.

综合以上讨论，得到下面的结果.

定理 1.3 (1)方程(1.31)的解或者恒为零，或者恒不为零；

(2)方程(1.31)的任意两个解之和还是它的解，任意一个解乘以常数之后还是它的解；

(3)方程(1.30)的解是整体存在的，即该方程的任意一个解的存在区间与函数 $p(x)$，$q(x)$ 有定义的共同区间是一样的；

(4)方程(1.30)的一个特解与它对应的齐次方程(1.31)的通解之和构成方程(1.30)的通解；

(5)方程(1.30)的初值问题的解是存在且唯一的.

注 1.9 由定理 1.3(1)，(2)可知，方程(1.31)的全体解构成一个线性空间. 再由通解的表达式可知，该空间是一维的，它的一个基为 $e^{-\int_{x_0}^{x} p(s)\,ds}$.

例 1.11 求解微分方程

$$\frac{dy}{dx} + y = x^2 .$$

解 该方程两端乘以 e^x，得到

$$\frac{d}{dx}(e^x y) = e^x x^2 .$$

上式两端积分，得到

$$e^x y = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + c ,$$

即该方程的解为

$$y = x^2 - 2x + 2 + ce^{-x} ,$$

其中，c 为任意常数.

例 1.12 设函数 $f(x) \in C^1[0, +\infty)$，$a(x)$ 连续，且存在常数 $c_0 > 0$，使得 $a(x) \geqslant c_0$，进一步假设

$$\lim_{x \to +\infty} (f'(x) + a(x)f(x)) = 0 .$$

证明：

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 .$$

证明 令

$$g(x) = f'(x) + a(x)f(x) ,$$

则 $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$. 上式可以看成 $f(x)$ 满足的微分方程. 利用本节关于微分方程解的求法，可知

$$f(x) = \frac{f(0) + \int_0^x e^{\int_0^t a(s)\,ds} g(t)\,dt}{e^{\int_0^x a(t)\,dt}} .$$

注意到 $a(x) \geqslant c_0 > 0$，因此

$$\lim_{x\to+\infty} e^{\int_0^x a(t)\,dt} = +\infty .$$

由 L'Hospital 法则可知

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\int_0^x a(t)\,dt} g(x)}{a(x) e^{\int_0^x a(t)\,dt}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{a(x)} = 0 .$$

习　题

1. 求下列方程的解：

(1) $\dfrac{dy}{dx} = 2xy$，并求满足初值条件 $x = 0, y = 1$ 的特解；

(2) $y^2dx + (x + 1)dy = 0$，并求满足初值条件 $x = 0, y = 1$ 的特解；

(3) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1 + y^2}{xy + x^3y}$；

(4) $(1 + x)ydx + (1 - y)xdy = 0$；

(5) $(y + x)dy + (x - y)dx = 0.$

2. 做适当的变量变换求解下列方程：

(1) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{(x + y)^2}$；

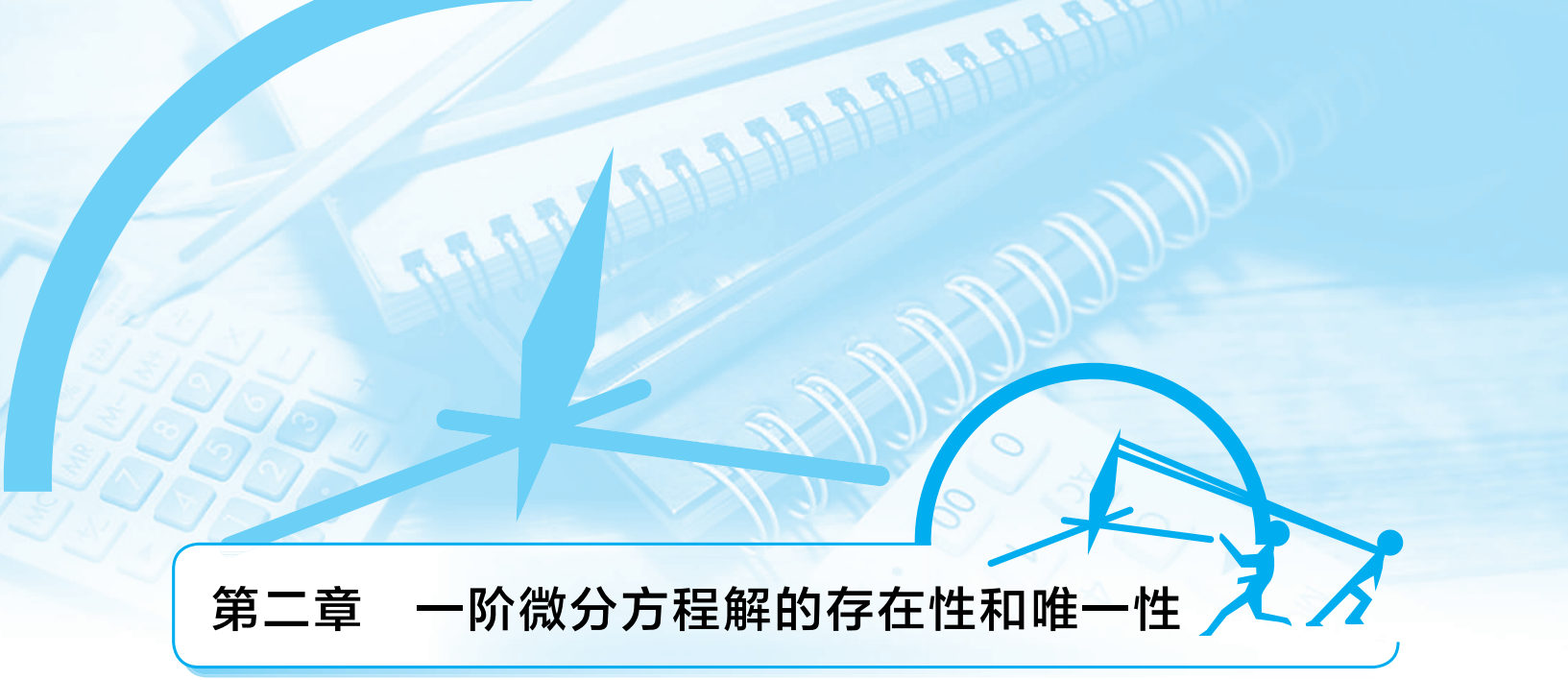
(2) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x - y + 1}{x - 2y + 1}$；

(3) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x - y + 5}{x - y - 2}$；

(4) $\dfrac{dy}{dx} = (x + 1)^2 + (4y + 1)^2 + 8xy + 1$；

(5) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^6 - 2x^2}{2xy^5 + x^2y^2}$；

(6) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x^3 + 3xy^2 + x}{3x^2y + 2y^3 - y}$.



第二章　一阶微分方程解的存在性和唯一性

学习目标

1. 理解一阶微分方程相关概念.
2. 熟悉皮卡德定理和皮亚诺定理.
3. 掌握解的延伸.

素质目标

通过一阶微分方程解的存在性和唯一性理论的学习，培养学生严谨的数学思维，坚持追求真理的科学精神.

第一节　预备知识

引理 2.1（格朗沃尔不等式）　假设函数 $f(x)$，$g(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续，$g(x) \geqslant 0$，c 是一个常数. 如果

$$f(x) \leqslant c + \int_a^x g(s)f(s)\,\mathrm{d}s,$$

则

$$f(x) \leqslant c\mathrm{e}^{\int_a^x g(s)\,\mathrm{d}s}.$$

证明　令

$$\Phi(x)=\int_a^x g(s)f(s)\,\mathrm{d}s\ ,$$

则由已知条件可知

$$\Phi'(x)=g(x)f(x)\leqslant g(x)(c+\Phi(x))\ ,$$

即

$$\Phi'(x)-g(x)\Phi(x)\leqslant cg(x)\ .$$

在这个不等式两端乘以 $\mathrm{e}^{-\int_a^x g(s)\,\mathrm{d}s}$ 并积分，得到

$$\mathrm{e}^{-\int_a^x g(s)\,\mathrm{d}s}\Phi(x)-\mathrm{e}^{-\int_a^a g(s)\,\mathrm{d}s}\Phi(a)\leqslant\int_a^x cg(s)\mathrm{e}^{-\int_a^s g(t)\,\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}s\ .$$

注意到 $\Phi(a)=0$，于是

$$\Phi(x)\leqslant c\left(\mathrm{e}^{\int_a^x g(s)\,\mathrm{d}s}-1\right).$$

因此

$$f(x)\leqslant c+\Phi(x)\leqslant c\mathrm{e}^{\int_a^x g(s)\,\mathrm{d}s}\ .$$

注 2.1　格朗沃尔不等式是数学中一个常用的不等式，经常用于微分方程解的估计．运用该不等式及压缩映像原理来证明某些解的存在性也是常微分方程研究中的一种常见方法．

注 2.2　当 $f(x)\geqslant 0$，$c\leqslant 0$ 时，可以得到 $f(x)\equiv 0$.

注 2.3　格朗沃尔不等式可以推广到更为一般的情况．建议读者自行完成下面结果的证明：假设函数 $f(x)$，$g(x)$，$h(x)\in C^0[a,b]$，$g(x)\geqslant 0$，如果

$$f(x)\leqslant h(x)+\int_a^x g(s)f(s)\,\mathrm{d}s\ ,$$

则

$$f(x)\leqslant h(x)+\mathrm{e}^{\int_a^x g(s)\,\mathrm{d}s}\int_a^x h(s)g(s)\mathrm{e}^{-\int_a^s g(t)\,\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}s\ .$$

特别地，如果 $h(x)$ 单调递增，可以进一步得到

$$f(x)\leqslant h(x)\mathrm{e}^{\int_a^x g(s)\,\mathrm{d}s}\ .$$

接下来讨论函数族的一致收敛问题．

定义 2.1　设 Λ 是一个无限集合，集合 $I\subseteq\mathbf{R}$，称定义在 I 上的函数族 $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 在 I 上是一致有界的，如果存在一个常数 $M>0$，使得

$$|f_\alpha(x)|\leqslant M\ ,\ \forall\alpha\in\Lambda\ ,\ \forall x\in I\ .$$

定义 2.2　设 Λ 是一个无限集合，集合 $I\subseteq\mathbf{R}$，称定义在 I 上的函数族 $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 在 I 上是等度连续的，如果对于任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得对于任意的 x，$y\in I$，$|x-y|<\delta$ 和任意的 α，有

$$|f_\alpha(x)-f_\alpha(y)|<\varepsilon\ .$$

注 2.4　$\delta>0$ 是用来刻画函数 f_α 的连续程度的量，因此这个量一般来说与函数 f_α 有关．函数族

等度连续的含义就是这族函数的连续程度是差不多的.

下面是分析学中的一个经典结果.

引理 2.2(Ascoli-Arzelà 引理) 设 Λ 是一个可数集. 如果函数列 $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 在区间 $[a,b]$ 上一致有界且等度连续,则一定存在该函数列的一个在 $[a,b]$ 上一致收敛的子序列 $\{f_{\alpha_k}\}$.

为了完成 Ascoli-Arzelà 引理的证明,先来证明下面两个引理.

引理 2.3 设 Λ 是一个可数集. 如果函数列 $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 在集合 $E\subset\mathbf{R}$ 上一致有界,则对于任意的可数点列 $\{x_m\}\subset E$,存在该函数列的一个子序列 $\{f_{\alpha_k}\}$,使得数列 $\{f_{\alpha_k}(x_m)\}$ 是收敛的.

证明 显然,数列 $\{f_\alpha(x_1)\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是有界的. 由 Weierstrass-Bolzano 引理可知,该数列存在一个收敛的子数列,记为

$$f_{11}(x_1),f_{12}(x_1),\cdots,f_{1n}(x_1),\cdots.$$

现在考虑数列

$$f_{11}(x_2),f_{12}(x_2),\cdots,f_{1n}(x_2),\cdots.$$

由引理条件可知该数列也是有界数列,再次利用 Weierstrass-Bolzano 引理可得,存在该数列的一个收敛子数列,记为

$$f_{21}(x_2),f_{22}(x_2),\cdots,f_{2n}(x_2),\cdots.$$

由 $f_{21},f_{22},\cdots,f_{2n},\cdots$ 的选取可知,如下两个数列均收敛:

$$f_{21}(x_1),f_{22}(x_1),\cdots,f_{2n}(x_1),\cdots;$$

$$f_{21}(x_2),f_{22}(x_2),\cdots,f_{2n}(x_2),\cdots.$$

继续刚才的过程,可以选择 $f_{31},f_{32},\cdots,f_{3n},\cdots$,使得如下三个数列都是收敛的:

$$f_{31}(x_1),f_{32}(x_1),\cdots,f_{3n}(x_1),\cdots;$$

$$f_{31}(x_2),f_{32}(x_2),\cdots,f_{3n}(x_2),\cdots;$$

$$f_{31}(x_3),f_{32}(x_3),\cdots,f_{3n}(x_3),\cdots.$$

重复这样的过程,得到 $f_{k1},f_{k2},\cdots,f_{kn},\cdots$,使得数列

$$f_{k1}(x_j),f_{k2}(x_j),\cdots,f_{kn}(x_j),\cdots$$

对于 $1\leqslant j\leqslant k$ 均是收敛的. 现在选择子序列

$$f_{11},f_{22},\cdots,f_{kk},\cdots,$$

则这个子序列在每个 $\{x_m\}$ 上均收敛.

注 2.5 引理 2.3 的证明中选取子序列 $\{f_{kk}\}$ 的方法,称为**对角线法**. 这是数学上的一种常用手法,希望读者理解并加以体会,掌握这种技巧.

引理 2.4 设函数列 $\{f_n\}$ 在紧集 $E\subseteq\mathbf{R}$ 上是等度连续的,且存在 E 的一个稠密子集 E_0,使得 $\{f_n\}$ 在该子集上是收敛的,则 $\{f_n\}$ 在 E 上是一致收敛的.

证明 由柯西收敛原理可知,只要证明下面的结论即可:对于任意的 $\varepsilon>0$,存在 $N>0$,使得对于一切的 $n,m>N$ 和 $x\in E$,有

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon .$$

由 $\{f_n\}$ 的等度连续性可知，存在 $\delta > 0$，使得只要 x，$x' \in E$ 且 $|x - x'| < \delta$，则对于任意的 n，有

$$|f_n(x) - f_n(x')| < \frac{\varepsilon}{9} .$$

现在考虑 x 的 δ 邻域 $B_\delta(x) = \{y \in \mathbf{R} \mid |y - x| < \delta\}$．显然，$\bigcup\limits_{x \in E} B_\delta(x)$ 构成 E 的一个开覆盖．由于 E 是紧的，因此该开覆盖存在有限子覆盖 $B_\delta(x_j)$，$j = 1, 2, \cdots, k_0$，使得

$$E \subseteq \bigcup_{j=1}^{k_0} B_\delta(x_j) .$$

由于 E_0 在 E 中稠密，因此对于每个 $B_\delta(x_j)$，存在一个 $y_j \in E_0$，使得 $y_j \in B_\delta(x_j)$．

由假设 f_n 在 E_0 上收敛可知，对于每个 $y_j \in E_0$，$f_n(y_j)$ 收敛．又由于 $1 \leqslant j \leqslant k_0$，即 j 有限，因此存在 N，使得只要 n，$m > N$，就有

$$|f_n(y_j) - f_m(y_j)| < \frac{\varepsilon}{9}, \quad 1 \leqslant j \leqslant k_0 .$$

由此可知，只要 n，$m > N$，就有

$$|f_n(x_j) - f_m(x_j)| \leqslant |f_n(x_j) - f_n(y_j)| + |f_n(y_j) - f_m(y_j)| + |f_m(y_j) - f_m(x_j)| < \frac{\varepsilon}{3} .$$

注意到，对于任意的 $x \in E$，存在 $j \in \{1, 2, \cdots, k_0\}$，使得 $x \in B_\delta(x_j)$，于是

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant |f_n(x) - f_n(x_j)| + |f_m(x) - f_m(x_j)| + |f_n(x_j) - f_m(x_j)| < \varepsilon .$$

Ascoli-Arzelà 引理的证明　注意到 $[a, b]$ 是 $\mathbf{R}$ 上的紧区间，且 $\mathbf{Q} \cap [a, b]$ 在 $[a, b]$ 上是稠密的，由引理 2.3 可知存在 $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 的一个在 $\mathbf{Q} \cap [a, b]$ 上收敛的子序列．再由引理 2.4 可知，该子序列在 $[a, b]$ 上收敛．

注 2.6　在 Ascoli-Arzelà 引理中，闭区间 $[a, b]$ 可以改成开区间 (a, b)．

习　题

1. 求方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x + y^2$ 通过点 $(0, 0)$ 的第三次近似解．

2. 求方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x - y^2$ 通过点 $(1, 0)$ 的第二次近似解．

3. 求初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x^2 - y^2, \ R: |x + 1| \leqslant 1, \ |y| \leqslant 1, \\ y(-1) = 0 \end{cases}$$

的解的存在区间，并求第二次近似解，给出在解的存在区间的误差估计．

第二节　解的存在性：皮卡德定理

考虑微分方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y), \tag{2.1}$$

其中，函数$f(x,y)$在矩形闭区域

$$D:|x-x_0|\leqslant a,\ |y-y_0|\leqslant b$$

上连续.

定义 2.3　称函数$f(x,y)$在区域G上对y满足**利普希茨连续条件**，如果存在常数L，使得对于任意的$(x,y_1),(x,y_2)\in G$，有

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\leqslant L|y_1-y_2|.$$

注 2.7　若函数$f(x,y)$在闭区域D上对y有连续的偏导数，则$f(x,y)$对y满足利普希茨连续条件.

注 2.8　函数$f(x,y)=|y|$对y满足利普希茨连续条件.

接下来讨论方程(2.1)满足初始条件

$$y(x_0)=y_0 \tag{2.2}$$

的解的存在性. 下面的结果表明，当方程(2.1)中$f(x,y)$对y满足利普希茨连续条件时，满足初始条件(2.2)的解在局部范围是存在且唯一的.

定理 2.1(皮卡德定理)　假设函数$f(x,y)$在闭区域D上连续且对y满足利普希茨连续条件，则微分方程初值问题(2.1)，(2.2)的解在区间$|x-x_0|\leqslant h$上存在且唯一，其中

$$h=\min\left\{a,\frac{b}{M}\right\},\ M=\max_{(x,y)\in D}|f(x,y)|.$$

注 2.9　柯西研究过初值问题(2.1)，(2.2)的解的存在性和唯一性. 他证明了当$f(x,y)$对y有连续的偏导数时，该初值问题的解是存在且唯一的. 因此，初值问题(2.1)，(2.2)也称为**柯西问题**.

证明　现分如下几步来完成证明：

第一步，把问题转化. 柯西问题(2.1)，(2.2)与下面的积分方程等价：

$$y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(s,y(s))\,ds. \tag{2.3}$$

显然，如果$y=\phi(x)$是柯西问题(2.1)，(2.2)的解，那么方程(2.1)两端积分，立即得到

$$\phi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(s,\phi(s))\,ds.$$

反之，设$y=\phi(x)$满足方程(2.3)，则$\phi(x_0)=y_0$，且方程(2.3)两端求导数，得到

$$\phi'(x)=f(x,\phi(x)).$$

第二步，构造皮卡德序列.

令 $y_0(x)=y_0$，定义

$$y_1(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(s,y_0(s))\,\mathrm{d}s,\quad |x-x_0|\leqslant h.$$

容易验证，对于 $|x-x_0|\leqslant h$，有 $|y_1(x)-y_0|\leqslant b$，即

$$\{(x,y_1(x))\ ||x-x_0|\leqslant h\}\subset D.$$

因此，可以定义

$$y_2(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(s,y_1(s))\,\mathrm{d}s,\quad |x-x_0|\leqslant h.$$

当 $|x-x_0|\leqslant h$ 时，

$$|y_2(x)-y_0|\leqslant\left|\int_{x_0}^{x}f(s,y_1(s))\,\mathrm{d}s\right|\leqslant M|x-x_0|\leqslant b,$$

于是 $\{(x,y_2(x))\ ||x-x_0|\leqslant h\}\subset D$，进而可以定义

$$y_3(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(s,y_2(s))\,\mathrm{d}s,\quad |x-x_0|\leqslant h.$$

一般地，定义

$$y_n(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(s,y_{n-1}(s))\,\mathrm{d}s,\quad |x-x_0|\leqslant h.$$

这样定义了一个连续函数序列 $\{y_n(x)\}$．称这个序列为**皮卡德序列**．可以归纳地证明：当 $|x-x_0|\leqslant h$ 时，

$$|y_n(x)-y_0|\leqslant b,\ n=0,1,2,\cdots.$$

皮卡德序列如图 2.1 所示.

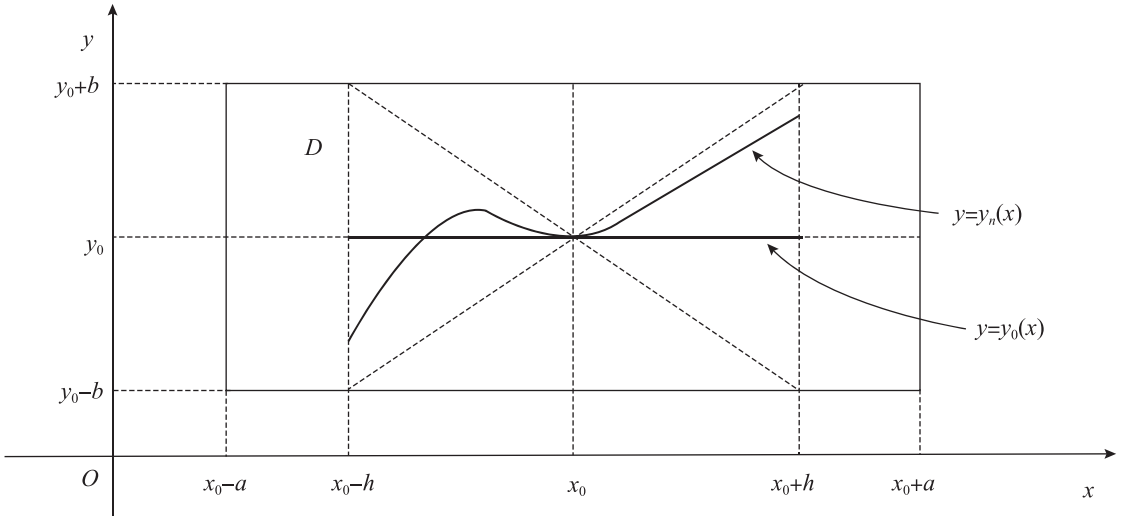


图 2.1

第三步，证明解的存在性．只要证明皮卡德序列 $\{y_n(x)\}$ 在区间 $|x-x_0|\leqslant h$ 上一致收敛到方

程(2.3)的解即可．由于

$$|y_1(x)-y_0(x)|=\left|\int_{x_0}^{x}f(s,y_0(s))\,\mathrm{d}s\right|\leqslant M|x-x_0|,$$

$$|y_2(x)-y_1(x)|=\left|\int_{x_0}^{x}f(s,y_1(s))\,\mathrm{d}s-\int_{x_0}^{x}f(s,y_0(s))\,\mathrm{d}s\right|\leqslant L\left|\int_{x_0}^{x}|y_1(s)-y_0(s)|\,\mathrm{d}s\right|=\frac{LM}{2}|x-x_0|^2,$$

利用数学归纳法，可以证明

$$|y_n(x)-y_{n-1}(x)|\leqslant\frac{M}{L}\cdot\frac{L^n}{n!}|x-x_0|^n,\ n=1,2,\cdots.$$

注意到数项级数

$$Mh+\frac{ML}{2!}h^2+\cdots+\frac{ML^{n-1}}{n!}h^n+\cdots$$

是收敛的，因此

$$y_n(x)=(y_n(x)-y_{n-1}(x))+\cdots+(y_1(x)-y_0(x))+y_0(x).$$

在区间 $|x-x_0|\leqslant h$ 上是一致收敛的．假设其收敛到 $\phi(x)$．由于 $y_n(x)$ 是连续的，因此 $\phi(x)$ 在区间 $|x-x_0|\leqslant h$ 上连续．

在等式

$$y_n(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(s,y_{n-1}(s))\,\mathrm{d}s,\ |x-x_0|\leqslant h$$

两边令 $n\to\infty$，得到

$$\phi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(s,\phi(s))\,\mathrm{d}s,\ |x-x_0|\leqslant h.$$

这就证明了 $y=\phi(x)$ 是方程(2.3)的解，也就是柯西问题(2.1)，(2.2)的解．

第四步，证明解的唯一性．

假设 $y=\phi(x)$ 与 $y=\psi(x)$ 均是柯西问题(2.1)，(2.2)在区间 $|x-x_0|\leqslant h$ 的连续解，即

$$\phi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(s,\phi(s))\,\mathrm{d}s,$$

$$\psi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(s,\psi(s))\,\mathrm{d}s.$$

将上面两式相减，得到

$$|\phi(x)-\psi(x)|=\left|\int_{x_0}^{x}(f(s,\phi(s))-f(s,\psi(s)))\,\mathrm{d}s\right|\leqslant L\left|\int_{x_0}^{x}|\phi(s)-\psi(s)|\,\mathrm{d}s\right|.$$

令 $\Phi(x)=\int_{x_0}^{x}\left|\phi(s)-\psi(s)\right|\mathrm{d}s$，则

$$\Phi(x)\geqslant 0,\ x\geqslant x_0;\ \Phi(x)\leqslant 0,\ x\leqslant x_0.$$

于是，当 $x\geqslant x_0$ 时，可以得到

$$\Phi'(x)\leqslant L\Phi(x).$$

由格朗沃尔不等式可知

$$\Phi(x) \leqslant 0\ ,\ x \geqslant x_0\ ,$$

因此

$$\Phi(x) \equiv 0\ ,\ x \geqslant x_0\ .$$

由此可知

$$\phi(x) \equiv \psi(x)\ ,\ x \geqslant x_0\ .$$

同理，可以证明

$$\phi(x) \equiv \psi(x)\ ,\ x \leqslant x_0\ .$$

这样就完成皮卡德定理的证明．

对于皮卡德序列 $\{y_n(x)\}$ ，有

$$\lim_{n\to\infty} y_n(x) = \phi(x)\ .$$

不仅如此，还可以估计出 $y_n(x)$ 趋向于 $\phi(x)$ 的速度．事实上，有下面的引理．

引理 2.5　对于柯西问题(2.1)，(2.2)，当 $|x - x_0| \leqslant h$ 时，有

$$|y_n(x) - \phi(x)| \leqslant \frac{ML^n}{(n+1)!}|x - x_0|^{n+1}\ .$$

证明　利用数学归纳法来证明上面的估计式．

对于 $n = 0$，有

$$|y_0(x) - \phi(x)| = \left|\int_{x_0}^{x} f(s, \phi(s))\,\mathrm{d}s\right| \leqslant M|x - x_0|\ .$$

假设估计式对于 $n = m$ 成立，即

$$|y_m(x) - \phi(x)| \leqslant \frac{ML^m}{(m+1)!}|x - x_0|^{m+1}\ .$$

对于 $n = m + 1$，有

$$|y_{m+1}(x) - \phi(x)| = \left|\int_{x_0}^{x} (f(s, y_m(s)) - f(s, \phi(s)))\,\mathrm{d}s\right|\ .$$

由于 $f(x, y)$ 关于 y 满足利普希茨连续条件，因此

$$\begin{aligned}|y_{m+1}(x) - \phi(x)| &\leqslant \left|\int_{x_0}^{x} L\left|y_m(s) - \phi(s)\right|\mathrm{d}s\right| \\ &\leqslant L\frac{ML^m}{(m+1)!}\left|\int_{x_0}^{x}|s - x_0|^{m+1}\mathrm{d}s\right| \\ &= \frac{ML^{m+1}}{(m+2)!}|x - x_0|^{m+2}.\end{aligned}$$

根据数学归纳法，对于一切自然数 n ，估计式成立．

注 2.10　在定理 2.1 中，如果去掉函数 $f(x, y)$ 对 y 的利普希茨连续条件，一般来说不能保证解的唯一性．

例 2.1　初值问题

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y^{\frac{1}{3}}, \ y(0) = 0$$

有两个解

$$y_1(x) \equiv 0, \quad y_2(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ \left(\frac{2}{3}x\right)^{\frac{3}{2}}, & x \geqslant 0. \end{cases}$$

事实上，函数 $f(x, y) = y^{\frac{1}{3}}$ 在 $y = 0$ 时是不满足利普希茨连续条件的.

例 2.2　初值问题

$$\begin{cases} y' = x^2 + y^2, \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

的解是存在且唯一的. 注意到

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2) = 2y,$$

因此 $f(x, y) = x^2 + y^2$ 是满足利普希茨连续条件的. 由皮卡德定理可知，对于任意的初值点 (x_0, y_0)，微分方程 $y' = x^2 + y^2$ 的解是存在且唯一的.

关于柯西问题(2.1)，(2.2)的解的唯一性，有条件比皮卡德定理条件弱一些的结论. 在介绍这个结论之前，先引入一个概念.

定义 2.4　设函数 $f(x, y)$ 在区域 G 内连续. 如果对于任意的 (x, y_1)，$(x, y_2) \in G$，有

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant F(|y_1 - y_2|),$$

其中 $F(r) > 0$ 是 $r(r > 0)$ 的连续函数，并且

$$\int_0^{\varepsilon} \frac{1}{F(r)} \mathrm{d}r = +\infty, \ \forall \varepsilon > 0,$$

则称 $f(x, y)$ 对 y 满足**奥斯古德唯一性条件**.

注 2.11　显然，如果函数 $f(x, y)$ 满足利普希茨连续条件，则它满足奥斯古德唯一性条件. 事实上，此时可以取 $F(r) = Lr$. 奥斯古德证明了如下结果：

定理 2.2（奥斯古德定理）　设函数 $f(x, y)$ 在闭区域 D 内对 y 满足奥斯古德唯一性条件，则对于任意的 $(x_0, y_0) \in D$，柯西问题(2.1)，(2.2)的解都是存在且唯一的.

证明　存在性由下一节的皮亚诺定理保证. 现证唯一性.

假设存在 $(x_0, y_0) \in D$，使得柯西问题(2.1)，(2.2)有两个解

$$y = \phi_1(x), \ y = \phi_2(x),$$

且存在 $x_1 \neq x_0$，使得 $\phi_1(x_1) > \phi_2(x_1)$. 不妨设 $x_1 > x_0$. 令

$$\bar{x} = \max_{x \in [x_0, x_1]} \{x \mid \phi_1(x) = \phi_2(x)\},$$

则 $\bar{x} \in [x_0, x_1)$，且

$$\phi_1(\bar{x}) = \phi_2(\bar{x}),\ \phi_1(x) > \phi_2(x),\ x \in (\bar{x}, x_1].$$

定义

$$r(x) = \phi_1(x) - \phi_2(x),$$

则当 $x \in (\bar{x}, x_1)$ 时，$r(x) > 0$，且

$$r'(x) = f(x, \phi_1(x)) - f(x, \phi_2(x)) \leqslant F(|\phi_1(x) - \phi_2(x)|) = F(r(x)).$$

于是

$$\frac{1}{F(r)}\mathrm{d}r \leqslant \mathrm{d}x.$$

因此

$$\int_0^{r_1} \frac{1}{F(r)}\mathrm{d}r \leqslant x_1 - \bar{x},$$

其中 $r_1 = r(x_1) > 0$. 这与奥斯古德唯一性条件矛盾. 所以，在定理条件下，柯西问题(2.1)，(2.2)的解是唯一的.

例 2.3　研究微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \begin{cases} 0, & y = 0, \\ y\ln|y|, & y \neq 0 \end{cases}$$

的解的唯一性.

解　当 $y \neq 0$ 时，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}(y\ln|y|) = \ln|y| + 1,$$

因此，由皮卡德定理可知，所给方程满足初始条件 $y(x_0) = y_0 \neq 0$ 的解是唯一的. 而当 $y_0 = 0$ 时，该方程显然有解 $y \equiv 0$. 由于对于任意的 $\varepsilon > 0$，有

$$\int_0^{\varepsilon} \frac{1}{y\ln|y|}\mathrm{d}y = +\infty.$$

所以由奥斯古德定理可知，所给方程满足初始条件 $y(x_0) = y_0 = 0$ 的解是唯一的.

注 2.12　由下面 Müller 给出的例子可以知道，当函数 $f(x, y)$ 不满足利普希茨连续条件时，皮卡德序列可以是不收敛的.

例 2.4　考虑初值问题

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

其中

$$f(x,y)=\begin{cases}0, & x=0,\ -\infty<y<+\infty,\\ 2x, & 0<x\leqslant 1,\ -\infty<y<0,\\ 2x-\dfrac{4y}{x}, & 0<x\leqslant 1,\ 0\leqslant y<x^2,\\ -2x, & 0<x\leqslant 1,\ x^2\leqslant y<+\infty.\end{cases}$$

可以证明，$f(x,y)$ 在闭区域

$$0\leqslant x\leqslant 1,\ -\infty<y<+\infty$$

上连续，但是对 y 不满足利普希茨连续条件．取 $y_0(x)\equiv 0$，则皮卡德序列 $\{y_n(x)\}$ 为

$$y_0(x)\equiv 0,\ y_n(x)=(-1)^{n+1}x^2,\ n=1,2,\cdots.$$

显然，这个函数序列不收敛．此外，可以验证

$$y=\frac{1}{3}x^2$$

是该初值问题的解．再由下面的例子可以知道，该初值问题的解是唯一的．

注 2.13　在上面的例子中，由于

$$\lim_{n\to\infty}y_{2n}(x)=-x^2,\ \lim_{n\to\infty}y_{2n+1}(x)=x^2,$$

因此皮卡德序列 $\{y_n(x)\}$ 的任何收敛子序列可以不收敛到柯西问题的解．

例 2.5　设连续函数 $f(x,y)$ 关于 y 是递减的．证明：柯西问题(2.1)，(2.2)在右侧（$x\geqslant x_0$ 时）的解是唯一的．

证明　假设 $y=\phi_1(x)$ 和 $y=\phi_2(x)$ 是柯西问题(2.1)，(2.2)的两个解，且存在 $x_1>x_0$，使得

$$\phi_1(x_1)>\phi_2(x_1).$$

与奥斯古德定理的证明类似，令

$$\bar{x}=\max_{x\in[x_0,x_1]}\{x\mid\phi_1(x)=\phi_2(x)\},$$

则

$$\phi_1(\bar{x})=\phi_2(\bar{x}),$$

且

$$\phi_1(x)>\phi_2(x),\ x\in(\bar{x},x_1].$$

由拉格朗日中值定理可知，存在 $\xi\in(\bar{x},x_1)$，使得

$$\phi'_1(\xi)>\phi'_2(\xi).$$

由于 $\phi_1(x)$，$\phi_2(x)$ 均为方程(2.1)的解，因此

$$\phi'_1(\xi)=f(\xi,\phi_1(\xi)),\ \phi'_2(\xi)=f(\xi,\phi_2(\xi)).$$

再利用到 $\phi_1(\xi)>\phi_2(\xi)$ 以及 f 关于 y 是递减的，有

$$\phi'_1(\xi)=f(\xi,\phi_1(\xi))\leqslant f(\xi,\phi_2(\xi))=\phi'_2(\xi),$$

矛盾．所以，柯西问题(2.1)，(2.2)在右侧的解唯一．