# 电磁学




**类目**：物理类
**书名**：电磁学
**主编**：徐生龙　冉建平　胡永鑫
**出版社**：湖南大学出版社
**开本**：大 16 开
**书号**：978-7-5667-3175-3
**使用层次**：通用
**出版时间**：2023 年 9 月
**定价**：49.80 元
**印刷方式**：双色
**是否有资源**：是

物理类创新融合精品教材
“互联网+”教育改革新理念教材

# 电磁学

DIANCI XUE

物理类创新融合精品教材
“互联网+”教育改革新理念教材
电磁学

主编◎徐生龙　冉建平　胡永鑫

电磁学

主编◎徐生龙　冉建平　胡永鑫

责任编辑：吴颖辉
封面设计：旗语书装

ISBN 978-7-5667-3175-3
定价：49.80元

湖南大学出版社

湖南大学出版社

物理类创新融合精品教材
“互联网+”教育改革新理念教材

# 电磁学

主　编 ◎ 徐生龙　冉建平　胡永鑫
副主编 ◎ 陈晓洁

湖南大学出版社
·长 沙·

图书在版编目(CIP)数据

电磁学 / 徐生龙,冉建平,胡永鑫主编. —长沙:湖南大学出版社, 2023.12
ISBN 978-7-5667-3175-3

Ⅰ. ①电… Ⅱ. ①徐… ②冉… ③胡… Ⅲ. ①电磁学–教材 Ⅳ. ①0441

中国国家版本馆 CIP 数据核字(2023)第 181300 号

# 电磁学

DIANCI XUE

**主　　编**:徐生龙　冉建平　胡永鑫
**责任编辑**:吴颖辉
**印　　装**:廊坊市鸿煊印刷有限公司
**开　　本**:880 mm×1230 mm　1/16　　**印　　张**:12　　**字　　数**:336 千字
**版　　次**:2023 年 12 月第 1 版　　**印　　次**:2023 年 12 月第 1 次印刷
**书　　号**:ISBN 978-7-5667-3175-3
**定　　价**:49.80 元

**出 版 人**:李文邦
**出版发行**:湖南大学出版社
**社　　址**:湖南·长沙·岳麓山　　**邮　　编**:410082
**电　　话**:0731-88822559(营销部)　88821174(编辑部)　88821006(出版部)
**传　　真**:0731-88822264(总编室)
**网　　址**:http://www.hnupress.com
**电子邮箱**:xiaoshulianwenhua@163.com

版权所有,盗版必究
图书凡有印装差错,请与营销部联系

# 前　言

电磁学是物理学的一个重要分支，主要研究电、磁和电磁的相互作用现象，及其规律和应用．电磁学的历史可以追溯到古代，当时人们已经发现了静电和静磁的现象．但是，真正的电磁学研究始于 18 世纪，当时科学家们开始系统地研究电磁现象，并发现了电磁感应定律和麦克斯韦方程组等基本规律．自那时以来，电磁学经历了快速的发展，不断推动着人类对自然界的理解和掌握．

在当今时代，电磁学已经成为一个非常重要的学科领域，为我们的生活带来了巨大的便利和进步．例如，电力已经成为现代社会的主要能源之一，而电磁学的研究对于电力生产和传输至关重要．此外，电磁学还在通信、医疗、航天等领域有着广泛的应用，为推动人类文明的进步和科技发展做出了重要贡献．

本书系统地阐述了电磁现象的基本规律和基本概念，内容包括静电场、静电场中的导体和电介质、直流电、恒定磁场、磁介质、电磁感应、交流电等共 7 章．本书的内容、结构、体系与国内流行的各类电磁学教程相仿，为广大教师所熟知．每章后配有习题，以供学生练习．

本书可作为高等学校物理专业电磁学课程教材，也可供其他专业教师、学生阅读使用。限于作者水平，本书疏漏和谬误之处在所难免，欢迎读者批评指正．

编　者

# 目　录


第一章　静电场　1

第一节　库仑定律 …… 1
第二节　电场强度矢量　场强叠加原理 …… 6
第三节　静电场的高斯定理 …… 11
第四节　静电场的环路定理　电势场 …… 18
第五节　静电场的基本微分方程 …… 27

第二章　静电场中的导体和电介质　31

第一节　导体和电介质 …… 31
第二节　静电场中的导体 …… 32
第三节　电容和电容器 …… 37
第四节　电介质的极化 …… 41
第五节　有电介质存在时的静电场 …… 48
第六节　静电场的边值关系 …… 50
第七节　静电场的能量 …… 52

第三章　直流电　58

第一节　电流的连续方程　恒定条件 …… 58
第二节　欧姆定律　焦耳定律 …… 60
第三节　电源的电动势 …… 65
第四节　直流电路 …… 69

第四章　恒定磁场　74

第一节　奥斯特实验 …… 74
第二节　毕奥-萨伐尔定律 …… 76
第三节　磁场的高斯定理和安培环路定理 …… 84
第四节　安培定律 …… 89
第五节　洛伦兹力 …… 98

## 第五章 磁介质 109

第一节 “分子电流”模型 …… 109
第二节 顺磁质与抗磁质 …… 110
第三节 磁化的规律 …… 114
第四节 有磁介质存在时的磁场 …… 118
第五节 磁荷观点 …… 121
第六节 铁磁质 …… 125
第七节 磁场的边界条件 …… 130

## 第六章 电磁感应 134

第一节 法拉第电磁感应定律 …… 134
第二节 动生电动势 感生电动势 涡旋电场 …… 138
第三节 自感与互感 …… 146
第四节 暂态过程 …… 151

## 第七章 交流电 161

第一节 交流电概述 …… 161
第二节 交流电路中的元件 …… 166
第三节 元件的串并联——矢量图解法 …… 168
第四节 三相交流电 …… 171

## 附录一 电磁学单位制 177

## 附录二 矢量分析 180

## 参考答案 182

# 第一章 静 电 场

## 第一节 库仑定律

### 一、扭秤实验及其他实验　电力平方反比律

物体因带电而彼此吸引或排斥是一个重要的新发现，因为它表明，在非接触物体之间，除了此前已知的万有引力和磁力外，又有了电力. 尽管三者有某些雷同之处（如都出现在非接触物体之间，都是有心力等），但也有显著的不同. 例如，电力有吸引和排斥，带电有正负的区分，而万有引力则总是彼此吸引，并无负质量的物体；又如，电力与磁力虽都有吸引和排斥，带电有正负，犹如磁体有南北极，但带电物体不受地磁及磁体的作用，不指向南北方向，且正电和负电可以单独存在；等等. 所有这些早期的观察都表明，电力是一种尚待探索的新的作用力.

受牛顿力学的深刻影响，寻找电力遵循的规律成为引人注目的研究课题，电力的发现迎来了电学历史上第一个重要的突破. 为了撇开带电物体形状、大小等次要因素的影响，人们自然地把注意力集中在两个点电荷之间的电力作用上.

在实验研究尚未开展之前，富兰克林注意到一个重要的现象：将细线悬挂的带电软木小球放在带电金属筒外时，小球明显地受电力作用使细线倾斜；将小球放入筒内时则几乎不受电力作用，细线竖直下垂. 富兰克林把这一发现告诉了他的好友普里斯特利. 普里斯特利通过类比，认为电力与万有引力一样，也应具有与距离平方成反比的特征. 因为，均匀物质球壳对球外物质小球有非零的万有引力作用，而当小球置于球壳内任意位置时，所受万有引力为零，这是万有引力与距离平方成反比的结果（读者可试做证明）. 类似的现象暗示着类似的特征，普里斯特利的类比猜测为尔后的实验研究指引了方向. 善于观察、勤于思索往往是有所发现的开端.

库仑（Charles Auguste de Coulomb，1736—1806，法国）是试图通过直接测量来寻找电力规律的第一人. 当时的困难在于充电有限、容易漏电，使得电力微弱且有所变化，难以准确测量. 库仑原先研究力学，曾发现

固体间的滑动摩擦定律：$f=\mu N$. 库仑还是研究和制作扭秤的专家，他曾得出：扭秤金属悬丝所受转矩与扭转角成正比，比例系数与细丝的长度、直径、切变弹性模量等有关.

1785 年，库仑设计制作了一台精巧的能够测出 $10^{-8}$ N 微弱作用力的扭秤，用以测量两个带同号电小球（点电荷）之间的电斥力. 库仑的扭秤实验如图 1-1 所示，在金属细丝下悬挂一根秤杠，秤杠的一端是带电木髓小球 $A$，另一端有平衡体 $P$，另一与 $A$ 相同大小的带电木髓小球 $B$ 用夹子固定. 因 $A$ 球受 $B$ 球的电力使秤杠偏转，转动细丝上端的旋钮，可使 $A$ 球回复原来位置. 由于细丝所受扭力矩即 $A$ 球所受电力矩，与旋钮指针转过的角度（扭转角）成正比，所以电力矩的大小可以通过扭转角来比较（相对测量）. 另外，$A$ 和 $B$ 两球间的距离容易测量. 库仑测出，当两球间距之比为 36∶18∶8.5 时，相应的扭转角为 36°，144°，576°，即当两球间距减小为一半和约四分之一时，其间的电力增大为 4 倍和 16 倍. 由此得出："两个带同种电荷的小球之间的相互排斥力和它们之间距离的平方成反比."这就是库仑电斥力扭秤实验的结论.

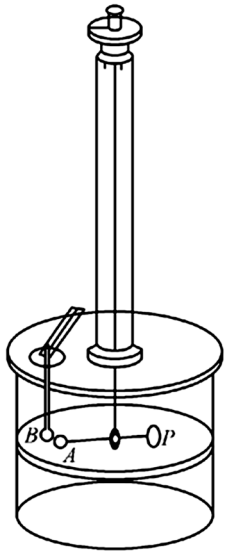



图 1-1　库仑的电斥力扭秤实验

与电斥力不同，在异号电荷电引力情形，由于扭秤的平衡不稳定，难于测量，也不精确. 为此，库仑改做了电引力单摆实验.

大家知道，在万有引力（如地球重力）的作用下，单摆的振动周期为

$$T=2\pi\sqrt{\frac{L}{Gm}r}\ ,$$

式中，$r$ 是摆锤到引力中心的距离（如地球半径），$L$ 是摆长，$m$ 是产生引力的物体的质量（如地球质量），$G$ 是万有引力常数. 因此，当 $L$ 与 $m$ 给定时，$T$ 应与 $r$ 成正比，这是万有引力与距离平方成反比的结果.

库仑的电引力单摆实验如图 1-2 所示，细线下悬挂的水平绝缘细棒，一端是带电小球 $A$，另一端是平衡体 $P$，固定的金属球 $B$ 带异号电荷. 受电引力作用，细棒在水平面内摆动. 库仑测出，当摆锤 $A$ 与电引力中心（$B$ 球球心）的距离之比为 3∶6∶8 时，摆锤的振动周期之比为 20∶41∶60（与预期的 20∶40∶53.3 稍有差别，原因是漏电）. 由此确定，电引力也应与距离平方成反比. 显然，这是典型的类比研究.

总之，库仑通过电斥力扭秤实验和电引力单摆实验的直接测量，发现电力 $f$ 与距离 $r$ 的平方成反比，称为电力平方反比律，表示为

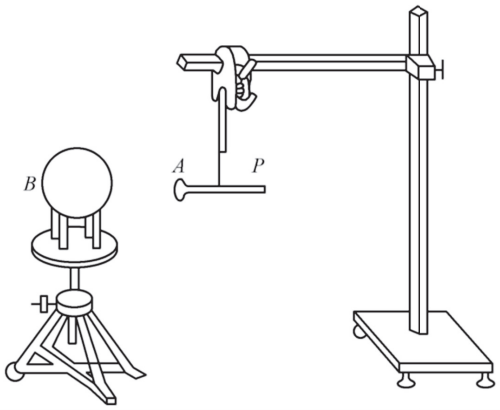



图 1-2 库仑的电引力单摆实验

$$f \propto r^{-2\pm\delta},$$

式中，$\delta$ 是偏离平方反比律的修正数，库仑实验的结果是 $\delta < 4\times10^{-2}$，这一误差在当年的技术条件下，实属不易. 不难设想，随着技术的进步，库仑实验的精度可以有所改善，但难以期望大幅度的提高，直接测量的限制即在于此.

在库仑实验之前，1772 年卡文迪什提出了另一种精确验证电力平方反比律的理论和实验方法，并得出了结果，但没有发表，不为人知. 百年之后的 1873 年，麦克斯韦担任第一任卡文迪什实验室主任，在整理卡文迪什的遗稿时，才发现有关工作，于是重新进行了详尽的理论分析和实验工作.

卡文迪什－麦克斯韦的想法是，对于均匀带电的球形空腔导体，在腔内无带电体时，若 $\delta=0$，则导体内表面完全不带电（若 $\delta=0$，静电场的高斯定理成立），若 $\delta\neq0$，则导体内表面应带电（若 $\delta\neq0$，静电场高斯定理失效）. 经过理论分析，卡文迪什－麦克斯韦得出了球形空腔导体内表面电量与导体充电总电量、修正数 $\delta$ 以及球壳内外半径的定量关系. 然后，通过实验测量内表面的电量，实际测量结果为零（此类实验称为“示零”实验），即小于测量仪器所能测出的下限. 再设法确定仪器的灵敏度，即通过实验比较内表面电量的下限与导体充电总电量的相对关系. 综上，便可得出 $\delta$ 小于多少的结果. 1772 年卡文迪什得出 $\delta<2\times10^{-2}$. 19 世纪 70 年代麦克斯韦得出 $\delta<5\times10^{-5}$. 由于电力平方反比律的精度不仅直接影响电磁场理论的精度，而且与光子静止质量是否为零密切相关，涉及物理学中一系列根本问题，关系重大，因此，此后不断有人沿用卡文迪什－麦克斯韦的方法，改进技术，继续实验，精度大幅度提高. 1971 年威廉斯等测的结果是

$$\delta<2.7\times10^{-16}.$$

200 年来，电力平方反比律的精度提高了十几个量级，它已经成为迄今物理学中最精确的实验定律之一，卡文迪什－麦克斯韦方法的威力由此可见一斑.

## 二、库仑定律的物理内涵

库仑定律：两个静止点电荷 $q_1$ 与 $q_2$ 之间相互作用力的大小与 $q_1$ 和 $q_2$ 的乘积成正比，与它们之间距离 $r$ 的平方成反比；作用力的方向沿着它们的连线；同号电荷相斥，异号电荷相吸. 令 $f_{12}$ 表示 $q_1$ 对 $q_2$ 的库仑力（也称电力），$\hat{\boldsymbol{r}}_{12}$ 表示由 $q_1$ 指向 $q_2$ 的单位矢量，库仑定律的定量公式为

$$f_{12}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}_{12}. \tag{1.1}$$

(1.1)式采用国际单位制（SI）. 它的电磁学部分，称为 MKSA 单位制. MKSA 制以长度（米）、质量（千克）、时间（秒）、电流（安培）为四个基本单位. 在(1.1)式中，$r$ 的单位是米（m），$f$ 的单位是牛[顿]（N），$q$ 的

单位是库[仑](C),1 C=1 A·s(1 库=1 安·秒). 由于各量单位都已选定,比例系数 $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ 需经实验测定,其中 $\varepsilon_0$ 称为真空介电常量,是基本物理常量之一,1986 年推荐值为

$$\varepsilon_0 = 8.854\ 187\ 817\times10^{-12}\ \mathrm{C^2/(N\cdot m^2)},$$

近似值为

$$\varepsilon_0 = 8.85\times10^{-12}\ \mathrm{C^2/(N\cdot m^2)},\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 8.99\times10^{9}\ \mathrm{N\cdot m^2/C^2}$$

库仑定律(1.1)式具有丰富的物理内涵:

(1)电力平方反比律,即两静止点电荷之间的作用力与其间距离的平方成反比,$f\propto r^{-2}$. 这一结论已被库仑电斥力扭秤实验、电引力单摆实验以及卡文迪什—麦克斯韦实验、威廉斯实验等一再证实,极为精确,不再赘述.

(2)电力与电量的乘积成正比,即 $f\propto q_1q_2$. 由于电力来自带电物体,与带电状况有关,在电力的表达式中需要引入定量描述两点电荷带电多少的物理量——电量,于是规定作用力大小与两点电荷电量乘积成正比. 这样,既能表明是电力,又能通过 $q_1$,$q_2$ 的大小、正负区分电力的大小以及是吸引还是排斥. 在物理学中,新的研究领域的开辟,新的基本规律的发现,往往同时伴随着新概念的引入和新物理量的定义. 牛顿定律定义了惯性质量,万有引力定律定义了引力质量,热力学定律定义了内能和熵,诸如此类,概莫能外.

(3)两静止点电荷之间作用力的方向沿连线,即静止点电荷在各点的电场强度的方向沿径向,以及电力具有球对称性,即只与距离有关而与连线的空间方位无关. 应该指出,电力的径向性和球对称性虽与上述实验大抵相符,但并非后者的严格结果. 实际上当年认为理所当然的这一结论是空间各向同性的必然要求. 试想,如果点电荷 $Q$ 在某点 $P$ 的场强方向不沿径向 $PQ$ 而有所偏斜,则绕直线 $PQ$ 旋转后,$P$ 点场强的方向将有所改变,与空间的各向同性矛盾,破坏了空间的对称性,明显不合理(注意,静止点电荷作为理想模型不具有任何特殊方向). 这一事例表明,物理学的规律是分层次、有联系的,低层次的具体规律要受到高层次的普遍规律(基本法则)的制约,不得违背.

另外,如果点电荷 $q_0$ 同时受到许多点电荷 $q_1$,$q_2$,…的作用,则所受合力 $\boldsymbol{f}$ 是各点电荷单独存在时对 $q_0$ 作用力 $\boldsymbol{f}_1$,$\boldsymbol{f}_2$,…的矢量和,在电荷连续分布时为各电荷微元 $\mathrm{d}q$ 对 $q_0$ 作用力 $\mathrm{d}\boldsymbol{f}$ 的矢量积分,即

$$\boldsymbol{f} = \sum_i \boldsymbol{f}_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_iq_0}{r_i^{\,2}}\hat{\boldsymbol{r}}_i,$$

或

$$\boldsymbol{f} = \int \mathrm{d}\boldsymbol{f} = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2}\mathrm{d}q, \tag{1.2}$$

式中,$r_i$(或 $r$)分别是 $q_i$(或 $\mathrm{d}q$)与 $q_0$ 的距离,$\hat{\boldsymbol{r}}_i$(或 $\hat{\boldsymbol{r}}$)分别是由 $q_i$(或 $\mathrm{d}q$)指向 $q_0$ 的径向单位矢量.(1.2)式称为电力叠加原理,满足(1.2)式的叠加称为线性叠加. 叠加原理是独立于库仑定律的另一规律,它表明电力具有可叠加性.

综上,电力的基本特征是:满足平方反比律、与电量成正比、径向性和球对称性、可叠加性. 弄清楚各自的由来,对于正确理解基本规律十分重要.

## 三、库仑定律的成立条件

库仑定律的成立条件是静止,即两点电荷相对静止,且相对于观察者静止. 静止条件可以适当放宽,即静止点电荷对运动点电荷的作用力仍遵循(1.1)式. 但反之,运动点电荷对静止点电荷的作用力却并不遵循

(1.1)式,因为此时作用力(或运动点电荷产生的电场)不仅与两者的距离有关,还与运动点电荷的速度有关.

关于静止条件可以适当放宽的讨论表明,两静止点电荷之间的相互作用力遵循牛顿第三定律,但静止点电荷与运动点电荷之间的相互作用力却并不遵循牛顿第三定律. 如何理解这一结果呢? 众所周知,牛顿第三定律实际上是更普遍的动量守恒定律在特殊条件下的产物. 如果两个物体构成封闭系统,即只此两者,别无其他,且不受外界作用,则系统动量守恒,其一动量的增或减应等于另一动量的减或增,于是其间的相互作用力必定大小相等、方向相反、在同一连线上,即遵循牛顿第三定律. 接触物体之间的作用力如摩擦力、弹性力等都是如此,两静止点电荷之间的库仑力也是如此. 现在,静止点电荷与运动点电荷之间的库仑力不遵循牛顿第三定律,表明其一动量的增或减并不等于另一动量的减或增. 原因何在呢? 这是因为电力是以电场为媒介物传递的,电场是特殊形式的物质,具有自身的动量(以及能量、角动量等). 由此,在讨论两点电荷相互作用时,构成封闭系统的成员除两点电荷外,还有第三者——电场. 当两点电荷都静止时,虽然第三者——电场依然存在,但其动量不变,于是牛顿第三定律适用;当两点电荷一静一动时,伴随着电荷的运动,相应电场的动量有所变化,于是牛顿第三定律失效. 由此可见,关于库仑定律静止条件的上述讨论,有助于理解电场的存在,有助于理解动量守恒定律与牛顿第三定律的关系.

有些教材在叙述库仑定律时还加了一个真空条件,其实无必要. 所谓真空条件,无非是指两点电荷只受到对方的作用,别无其他. 当真空条件被破坏时,除了这两个点电荷外,还可能存在其他电荷,如空间的自由电荷、导体中的感应电荷、电介质中的极化电荷等,此时,这两个点电荷之间的作用力仍遵循库仑定律,并不因其他电荷的存在而有所影响,这正是叠加原理的结果,所以真空条件并非必要.

## 四、电荷守恒定律　电荷的量子性

在库仑定律(1.1)式中,定义了电学中第一个物理量——电量(或电荷),用以描述物体带电的多少. 显然,阐明电荷的基本特征,丰富对它的认识是必要的.

电荷的基本特征是遵循守恒定律,并具有量子性. 从近代的观点看,世间万物都由各种原子构成,原子由电子和原子核构成,原子核包括质子和中子,电子带负电,质子带正电,中子不带电,所谓“电”既不是某种流体也不是物体的某种运动状态,而应归结为带电的基本粒子:电子和质子. 1983 年的实验结果表明,电子与质子电量(指绝对值)的差别小于 $10^{-20}|e|$,极为相近,因而具有相同电子数和质子数的各种原子以及由各种原子构成的各种物体得以保持严格的电中性. 所谓“带电”,无非是电子与质子数量的失衡,物体失去一定量电子便带正电,获得一定量电子便带负电. 在此过程中,电荷只能转移,不能创生或消灭,并且物体的电量只能是电子电量的整数倍,这就是电荷守恒和电荷的量子性.

下面,简要回顾得出上述结论的历史过程及实验证据.

关于电荷守恒. 早年,将物体因摩擦彼此吸引或排斥的现象称为带电现象,并区分为带正电和负电. 富兰克林规定:玻璃与丝绸摩擦后,玻璃带正电,凡与之相吸的物体带负电,沿用至今. 1747 年,富兰克林提出电荷守恒,认为电像流体一样,可以在物体间转移,但不能创生或消灭,孤立物体的电量保持不变. 1843 年,法拉第的冰桶实验,为电荷守恒提供了第一个实验证据. 法拉第把白铁皮制成的冰桶经导线与金箔验电器相连,用丝线把带电的黄铜小球逐渐吊入桶内,验电器的金箔随之张开并达到最大,此后,无论黄铜小球再深入甚至与冰桶接触,也无论桶内是否放置其他东西,验电器的金箔张开程度都不再变化,从而表明,电荷可以转移,但总量守恒. 此后,大量实验一再直接或间接地证实电荷守恒. 近代实验表明,电荷守恒也为一切微观过程所遵循. 例如,高能光子($\gamma$ 射线)与原子核相碰,会产生一对正负电子;反之,一对正负电子高速相碰,会融合而湮没,同时产生 $\gamma$ 辐射. 因光子不带电,正负电子的电荷等量异号,故在电子对产生和湮没的微

观过程中，过程前后的电荷仍守恒.

关于电荷的量子性. 1834 年，法拉第从实验中得出电解定律：等量电荷通过不同电解液时，电极上析出物质的质量与该物质的化学当量成正比. 化学当量是相对原子质量与原子价之比. 电解定律表明，为了析出 1 mol单价元素（如 1 克氢，35.5 克氯等）需要相等的电量——称为法拉第常数 $F$. 1 mol 物质的原子数为阿伏伽德罗常数 $N_A$. 因此，电解定律可以解释为：在电解过程中，形成电流的是正、负离子的运动，这些离子的电荷是基本电荷的整数倍，这个倍数也就是离子的价数. 既然析出 1 mol 单价元素，即析出 $N_A$ 个单价离子所需总电量为 $F$，那么一个单价离子的电量 $e$ 应为 $F$ 与 $N_A$ 之比，即

$$e=\frac{F}{N_A}.$$

换言之，$e$ 应是电荷的最小单位，称为基本电荷，一切物体所带电量应是 $e$ 的整数倍，这就是电荷的量子性，它是电解定律的必然结果.

1891 年，斯通尼把基本电荷 $e$ 取名为 electron，并根据 $F$ 和 $N_A$，首次估算出 $e$ 的大小.

1897 年，J. J. 汤姆孙的阴极射线实验确定阴极射线是负电粒子流，并测出其荷质比为氢离子的千余倍，从而发现了比氢原子更小的带电粒子，也称其为 electron，译为电子. 从此，电子（electron）不仅是基本电荷，而且是第一个基本粒子. 此后，进一步确定原子由电子和带正电的原子核构成.

1909 年，密立根的油滴实验直接测量油滴的电荷，结果总是基本电荷的整数倍，这直接证实了电荷的量子性，并给出 $e$ 的精确值. 1986 年，基本电荷 $e$ 的推荐值为

$$e=1.602\ 177\ 33(46)\times10^{-19}\ \mathrm{C}.$$

综上，可将电荷守恒定律表述为，电荷既不能被创造，也不能被消灭，电荷只能从一个物体转移到另一个物体，或者从物体的一部分转移到另一部分，在任何物理过程中，电荷的代数和守恒. 电荷守恒定律是一切宏观过程和微观过程都必须遵循的基本规律.

电荷守恒定律可能与电荷的量子性密切相关，如果基本电荷可以随意分割，那么，要平衡衰变过程的方程并保持电荷守恒将十分困难，反之则十分自然. 电荷守恒定律还与电子的稳定性有关，电子作为最轻的带电粒子，不能衰变，否则必将违背电荷守恒定律. 所以从电子的寿命可以判断电荷守恒定律的有效性，1965 年的实验表明，电子的寿命超过 $10^{21}$ 年，远大于目前推测的宇宙年龄，可见电荷守恒定律是十分可靠的. 还应指出，电荷是与速度无关的相对论不变量，电荷守恒定律在所有惯性系中都成立，符合相对性原理的要求.

本节比较详尽地讲到了库仑定律的方方面面，目的不仅在于加深对它的理解，更希望读者能借此懂得如何考察物理定律. 一般说来，物理定律具有丰富的内涵和外延，从观察现象、提出问题、猜测结果、设计实验并测量、发现规律，到定义新物理量并定量表述，进一步判定成立的条件和精度，乃至阐明理论地位、近代发展等，往往需要经过漫长的历史过程，涉及广泛的相关背景，只有这样才能正确地认识，恰当地评价.

## 第二节 电场强度矢量 场强叠加原理

### 一、电场强度矢量

对于非接触物体之间的作用力（如电力），除了寻找作用力遵循的规律（如库仑定律）外，还关心另一个

更深刻的问题：这些力是“怎样”作用的？即：是否需要媒介物的传递？是否需要传递时间？对此，自古以来就有两种截然不同的观点，长期争论不休. 超距作用观点认为：非接触物体之间的作用力不需要任何媒介物的传递，也不需要传递时间. 近距作用观点则认为：需要媒介物的传递，这种媒介物就是无所不在的、充满空间的弹性介质——以太；也需要传递时间，尽管这个时间可能非常短暂. 传递电磁作用力的媒介物称为电磁以太，也称为力线（电力线，磁力线）或场（电场，磁场），近距作用观点就是场观点.

从某种意义上说，电磁学的历史就是两种观点争论的历史. 以法拉第和麦克斯韦为代表的场观点者，锲而不舍，以电磁场为研究对象，认为电磁场是特殊形式的物质，从电磁场的描绘和分布、电磁场作为矢量场的基本性质、电磁场的物理属性（如能量、动量、角动量等）、电磁场对实物的作用以及实物对电磁场的响应、电场与磁场的内在联系、电磁场的运动变化规律、电磁波、电磁现象与光现象的统一性等等方面对电磁场进行了逐步深入的、全面的研究，同时大量汲取超距作用观点的许多重要成果，建立了麦克斯韦电磁场理论，并获实验证实，宣告了电磁场理论的胜利，成为物理学中继牛顿力学以后又一划时代的伟大成就. 凡此种种，构成了电磁学史的一条主线，也理所当然地成为本课程的基本框架和主要内容.

电场强度矢量 $\boldsymbol{E}$ 简称场强，定义为

$$\boldsymbol{E}=\frac{\boldsymbol{f}}{q_0}\ , \tag{1.3}$$

其大小等于单位电荷所受电场力的大小，其方向与正电荷所受电场力的方向一致.

对于点电荷 $q$ 产生的静电场，根据库仑定律，与 $q$ 相距为 $r$ 的 $P$ 点的场强为

$$\boldsymbol{E}=\frac{\boldsymbol{f}}{q_0}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}\ , \tag{1.4}$$

式中，$\hat{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{r}/r$ 是从 $q$ 指向 $P$ 点的单位矢量. 正点电荷产生的场强分布如图 1-3 所示，各点场强矢量连成的曲线（在图 1-3 中为直线）称为电场线.

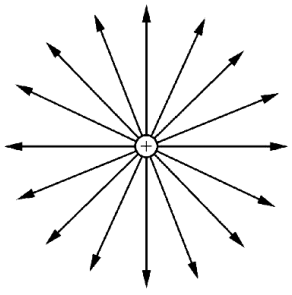


图 1-3　正点电荷产生的场强分布

## 二、场强叠加原理

如果静电场由许多点电荷 $q_1,q_2,\cdots$ 产生，则在空间某点的试探电荷 $q_0$ 所受的作用力 $\boldsymbol{f}$ 是各点电荷单独存在时所产生的电场对 $q_0$ 的作用力 $\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\cdots$ 的矢量和，在电荷连续分布时为各电荷微元产生的电场对 $q_0$ 作用力 $\mathrm{d}\boldsymbol{f}$ 的矢量积分，此即第一节中的电力叠加原理，表示为

$$\boldsymbol{f}=\sum_i \boldsymbol{f}_i \text{ 或 } \boldsymbol{f}=\int \mathrm{d}\boldsymbol{f}\ ,$$

除以 $q_0$，得

$$\boldsymbol{E}=\sum_i \boldsymbol{E}_i=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i^2}\hat{\boldsymbol{r}}_i \text{ 或}$$

$$\boldsymbol{E}=\int \mathrm{d}\boldsymbol{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\mathrm{d}q}{r_i^{\,2}}\hat{\boldsymbol{r}} \tag{1.5}$$

式中，$\boldsymbol{E}_1=\boldsymbol{f}_1/q_0$，$\boldsymbol{E}_2=\boldsymbol{f}_2/q_0$，…代表 $q_1$，$q_2$，…在某点单独产生的场强，$\mathrm{d}\boldsymbol{E}=\mathrm{d}\boldsymbol{f}/q_0$ 是电荷微元 $\mathrm{d}q$ 在某点的场强，$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{f}/q_0$ 是某点的总场强. 注意，(1.5)式是矢量和或矢量积分.

(1.5)式表明，点电荷组(或连续分布电荷)的电场在某点的场强等于各点电荷(或各电荷微元)单独存在时产生的电场在该点场强的矢量叠加，称为场强叠加原理.

在已知电荷分布的条件下，场强叠加原理(1.5)式提供了计算场强的一种方法.

电偶极子由两个等量异号点电荷 $\pm q$ 构成，从 $-q$ 到 $+q$ 的径矢为 $\boldsymbol{l}$，$\boldsymbol{p}=q\boldsymbol{l}$ 称为电偶极矩，简称电矩，是描述电偶极子属性的物理量. 在讨论电介质极化和电磁振荡时都要用到电偶极子的模型.

**例 1** 试计算电偶极子延长线上和中垂面上的场强分布.

**解** (1)如图 1-4，在电偶极子延长线上任取 $P$ 点，$P$ 点与电偶极子中点 $O$ 的距离为 $r$，$+q$ 和 $-q$ 在 $P$ 点的场强的大小 $E_+$ 和 $E_-$ 为

$$E_+=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\left(r-\frac{l}{2}\right)^2},\qquad E_-=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\left(r+\frac{l}{2}\right)^2},$$

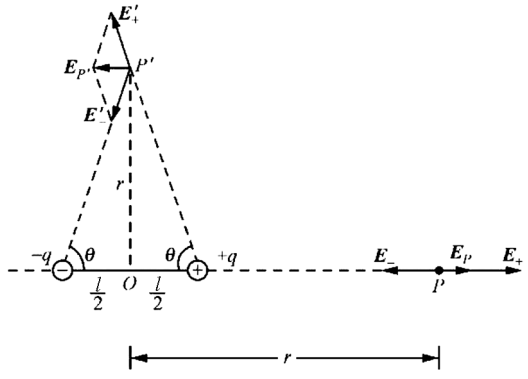



图 1-4 电偶极子的场强

$\boldsymbol{E}_+$ 指向右方，$\boldsymbol{E}_-$ 指向左方，故 $P$ 点总场强为

$$E_P=E_+-E_-=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2rl}{\left(r^2-\frac{l^2}{4}\right)^2},$$

$\boldsymbol{E}_P$ 指向右方. 若 $\boldsymbol{r}\gg l$，有

$$E_P\approx\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2ql}{r^3}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2p}{r^3},\quad p=ql,$$

式中，$p$ 为电偶极矩，$\boldsymbol{p}$ 是矢量，方向从 $-q$ 指向 $+q$. 写成矢量形式，为

$$E_P\approx\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\boldsymbol{p}}{r^3}.$$

(2)在电偶极子中垂面上任取 $P'$ 点，$P'$ 点与电偶极子中点 $O$ 的距离为 $r$，$+q$ 和 $-q$ 在 $P'$ 点的场强的大小 $E'_+$ 和 $E'_-$ 为

$$E'_+=E'_-=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\left(r^2+\frac{l^2}{4}\right)},$$

$\boldsymbol{E}'_+$ 和 $\boldsymbol{E}'_-$ 方向如图 1-4 所示，故 $P'$ 点总场强为

$$E_{P'}=E'_+\cos\theta+E'_-\cos\theta=\frac{2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\left(r^2+\frac{l^2}{4}\right)}\frac{\frac{l}{2}}{\sqrt{r^2+\frac{l^2}{4}}}$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{ql}{\left(r^2+\frac{l^2}{4}\right)^{3/2}}$$

$\boldsymbol{E}_{P'}$ 指向左方. 若 $r\gg l$，有

$$E_{P'}\approx\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{ql}{r^3}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{r^3},$$

写成矢量形式，为

$$\boldsymbol{E}_{P'}\approx-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{p}}{r^3}.$$

总之，电偶极子在远处($r\gg l$)的场强公式为

$$\begin{cases}\text{延长线上：}\boldsymbol{E}\approx\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{2\boldsymbol{p}}{r^3},\\ \text{中垂面上：}\boldsymbol{E}\approx-\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\boldsymbol{p}}{r^3},\end{cases}\tag{1.6}$$

可见，电偶极子在远处的场强与 $r$ 的三次方成反比，比点电荷的场强随 $r$ 的变化快得多. 通常，中性原子或分子，或者正、负电中心重合，分子电偶极矩为零，或者可以看作由一个或多个电偶极子组成，由于每个电偶极子的电场都集中在电偶极子附近，远处电场十分微弱，所以处理宏观问题时，一般不考虑中性原子或分子在宏观距离上的电场.

**例 2** 设均匀带电圆环的半径为 $R$，带电总量为 $Q$，试求圆环轴线上的场强分布.

**解** 如图 1-5，环上任意线元 $\mathrm{d}l$ 带电 $\mathrm{d}q=\lambda\mathrm{d}l$，电荷线密度 $\lambda=\dfrac{Q}{2\pi R}$，它在轴上任一点 $P$ 产生的场强 $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$ 沿 $AP$ 方向，可分解为沿 $x$ 轴的 $\mathrm{d}E_x$ 和垂直 $x$ 轴的 $\mathrm{d}E_y$ 两个分量. 根据圆环的对称性及均匀带电，各电荷线元在轴线上任一点 $P$ 产生的场强在垂直轴方向的分量应互相抵消，沿 $x$ 轴的分量互相加强，故有

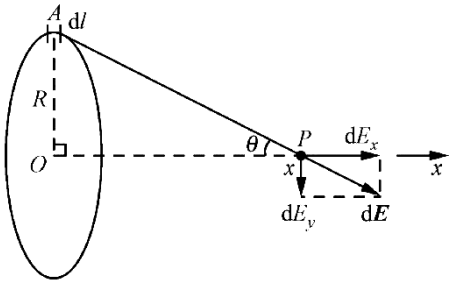



图 1-5 带电圆环轴线上的场强分布

$$E=E_x=\int\mathrm{d}E_x=\int\mathrm{d}E\cos\theta$$

$$=\int\frac{\lambda\,\mathrm{d}l}{4\pi\varepsilon_0(x^2+R^2)}\frac{x}{(x^2+R^2)^{1/2}}=\frac{\lambda x}{4\pi\varepsilon_0(x^2+R^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi R}\mathrm{d}l$$

$$=\frac{Qx}{4\pi\varepsilon_0(x^2+R^2)^{3/2}}.$$

当 $x=0$ 时，$E=0$，表明圆环中心场强为零；当 $x\gg R$ 时，$E=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}$，表明圆环在远处的场强与点电荷的场强相同. 这些都是合理的.

**例 3** 设均匀带电细棒长为 $2l$，带电总量为 $Q$，试求细棒中垂面上的场强分布.

**解** 由于细棒具有轴对称性，凡包含细棒在内的每一个平面内的场强分布都应相同. 现取如图 1-6 所示的纸平面为代表，细棒中垂面与纸面的交线为中垂线，细棒中点 $O$ 与中垂线上任一点 $P$ 的距离 $OP=x$.

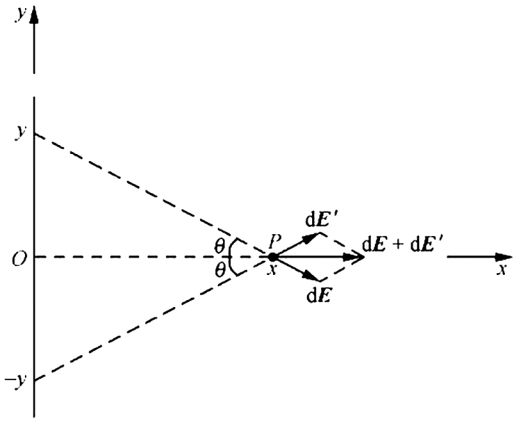



图 1-6 均匀带电细棒中垂面上的场强分布

以 $OP$ 为中垂线，把细棒分割成一对对对称的线元，任意一对线元在 $P$ 点的元场强之和($\mathrm{d}\boldsymbol{E}+\mathrm{d}\boldsymbol{E}'$)沿中垂线方向即 $x$ 方向，其大小为 $2\mathrm{d}E\cos\theta$，其中

$$\mathrm{d}E=\mathrm{d}E'=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\,\mathrm{d}y}{(y^2+x^2)},\quad \cos\theta=\frac{x}{(y^2+x^2)^{1/2}}.$$

式中，$\lambda=Q/2l$ 为电荷线密度. $P$ 点的总场强是各对线元贡献之和，应沿 $x$ 方向，故有

$$E=E_x=\int 2\mathrm{d}E\cos\theta=\frac{2\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^l\frac{x\,\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^{3/2}}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{l}{x\sqrt{x^2+l^2}}.$$

当细棒无限长时，任何与它垂直的平面都可看作中垂面，即无限长均匀带电细棒周围任意点的场强方向都与棒垂直，其大小为上式在 $l\to\infty$ 时的极限，为

$$E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}.$$

对于有限长均匀带电细棒，如果中垂面上的 $P$ 点离棒很远，即 $x\gg l$，该点场强为

$$E=\frac{\lambda l}{2\pi\varepsilon_0 x^2}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 x^2},$$

与点电荷场强公式一致，是合理的.

由以上例题可见，应用场强叠加原理，在电荷分布已知的条件下，原则上可以计算任意带电体的场强分布. 但一般情形严格求解有困难，通常只在具有一定对称性的条件下，才能完成积分，得出答案，利用场强叠加原理求解的限制即在于此. 因此，在计算时，应注意对称性的分析，并考察解的渐近行为.

# 第三节 静电场的高斯定理

## 一、源与旋　通量与环流

为了描绘电场的总体分布，获得形象直观的图像，在引入场强概念后，可进一步画出电场线. 所谓电场线，就是电场中各点场强矢量连成的曲线. 确切地说，如果在电场中画出许多曲线，使曲线每一点的切线方向与该点的场强方向一致，那么这样做出的曲线称为电场的电场线（又称电力线）. 为了使电场线不仅描绘场强的方向，而且能反映场强的大小，在画电场线图时，可使电场中任一点电场线的数密度与该点场强的大小成正比，即场强较小处的电场线稀疏，场强较大处的电场线稠密. 图 1-7 就是按照上述规定画出的几种电场的电场线图.

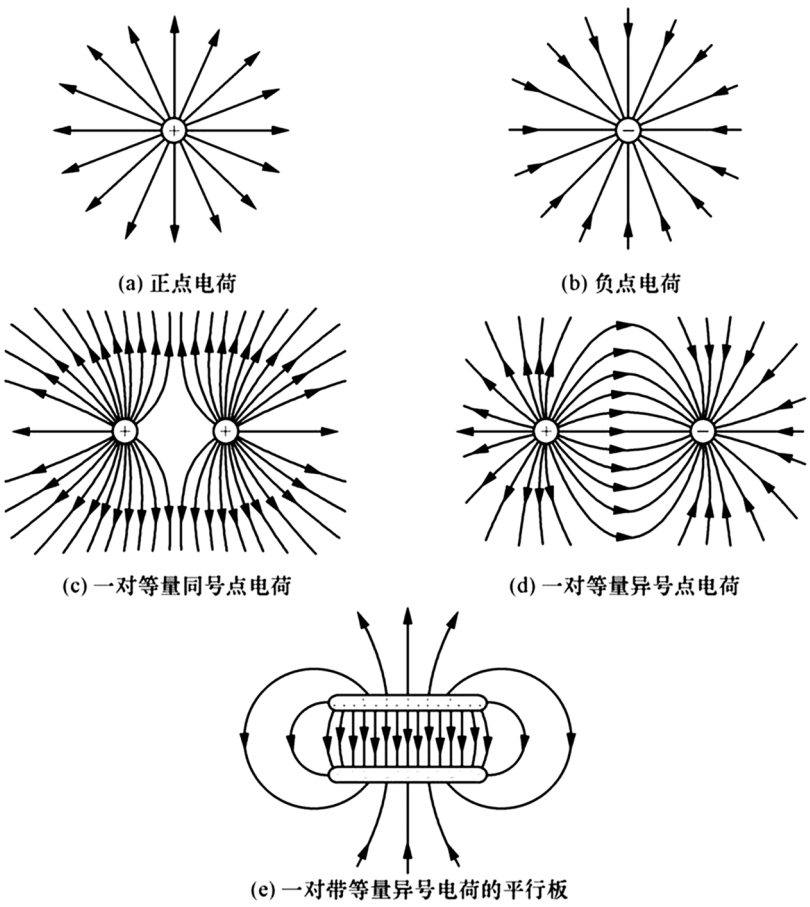



图 1-7　几种带电体系的电场线

电场线从总体上描绘了电场的空间分布. 与此类似，磁感应线从总体上描绘了磁场的空间分布. 同样，对于恒定流动的不可压缩流体，流速线从总体上描绘了流速的空间分布. 凡此种种，抽象地说，都是每一点有一个矢量，这些矢量的总体构成矢量场，用数学的语言来说，矢量场是空间坐标的矢量函数，在一定的空

间范围内连续分布.

画出电场线、磁感应线、流速线等固然可以形象地描绘各种矢量场,但也有琳琅满目或杂乱无章之感,能否通过仔细的观察和分析,由此及彼、由表及里,逐步把握各种矢量场的性质,以便从总体上加以比较和区分呢?流体力学对流速场的研究,首先作出了突破.

对于恒定流动的不可压缩流体,尽管流速场的分布各异,但人们发现,从总体上说,仍然有一些值得注意的表观特征. 例如,有的流速线有头有尾不闭合,有的流速线首尾相接形成闭合曲线,等等. 并且流速线总体分布的这些表观特征,又与是否存在喷发流体的"源头"和宣泄聚敛流体的"汇"(也称漏、壑、尾闾)以及流体的流动形成"涡旋"密切相关. 容易设想,对于稳态分布的流速场,如果存在喷发流体的源头和聚敛流体的汇,那么,相应的流速线就是有头有尾而不闭合的,称为"有源";反之,若处处既无源头又无汇,则称为"无源". 另一方面,如果流体的流动形成"涡旋",那么,相应的流速线就是首尾相接无头无尾的闭合线,称为"有旋";反之,若处处无涡旋,则称为"无旋". 总之,流速场总体分布所呈现的表观特征,乃是否有源和是否有旋的结果."源"和"旋"的概念,揭示了流速场的本质,利用它们可以把纷繁各异的流速场从总体上加以区分和比较,例如,有的有源无旋,有的无源有旋,有的有源有旋.

注意到流速场总体分布的表观特征,把握住流速场内在的物理本质,建立了源和旋的概念之后,还需要进一步给予准确的定量表述. 为此,引入"通量"和"环流"(也称环量,即环路积分)的概念.

所谓通量,对于流速场而言,就是流量. 通过面元 $\mathrm{d}S$ 的流量即单位时间经面元 $\mathrm{d}S$ 通过的流体体积为 $\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=v\mathrm{d}S\cos\theta$,其中 $\boldsymbol{v}$ 是流速,$\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 是面元矢量,大小为 $\mathrm{d}S$,指向面元法线方向,$\theta$ 是 $v$ 与 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 的夹角,通过任意闭合曲面 $S$ 的流量为 $\oiint_{(S)}\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$.

所谓环流,对于流速场而言,就是流速 $\boldsymbol{v}$ 沿任意闭合回路 $L$ 的积分 $\oint_{(L)}\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$,其中 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 是积分回路的线元,$\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 的方向沿回路的切线方向.

显然,如果流速场有源,那么,作一个包围源头或汇的闭合曲面,则通过该闭合曲面 $S$ 的流量必不为零,即 $\oiint_{(S)}\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\neq 0$;反之,若流速场处处无源,则通过任意闭合曲面的通量均应为零,即 $\oiint_{(S)}\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=0$. 如果流速场有旋,那么沿闭合涡旋线的环流必不为零,即 $\oint_{(L)}\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}\neq 0$;反之若流速场处处无旋,则沿任意闭合回路的环流均应为零,即 $\oint_{(L)}\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=0$. 由此可见,引入通量与环流的概念,并确定通过任意闭合曲面的通量是否为零(高斯定理)以及沿任意闭合回路的环流是否为零(环路定理),正是定量地描述和确定流速场是否有源和是否有旋的有效手段和恰当方式.

推而广之,源与旋,通量与环流以及相应的高斯定理和环路定理,不仅适用于描绘流速场的性质,也适用于描述包括电场和磁场在内的各种矢量场的性质.

## 二、静电场的高斯定理

麦克斯韦把流体力学的上述重要成果移植到电场和磁场,借助于电场和磁场的通量、环流以及相应的高斯定理和环路定理,揭示了电场和磁场作为矢量场的基本性质,把对电场和磁场的研究向前推进了一大步.

统观各种由电荷产生的静电场,尽管分布各异,但其电场线图从总体上说具有明显的共同表观特征. 如

图 1-7 所示，电场线起自正电荷（或伸向无穷远）、止于负电荷（或来自无穷远），电场线不会在没有电荷的地方中断；在没有电荷的空间里，任何两条电场线都不会相交；电场线不形成闭合线. 通过与流速场的类比，不难猜出，作为矢量场，静电场的基本性质是有源无旋. 具体地说，正电荷是喷发电场线的源头，负电荷是聚敛电场线的汇，总之，电荷就是静电场的源；另外，静电场中不存在电场线的“涡旋”，表明静电场无旋. 当然，这一定性的猜测还有待严格的证明.

仿照流速场，对于静电场，引入电通量的概念，通过面元 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 的电通量 $\mathrm{d}\Phi_e$ 定义为该点场强的大小 $E$ 与 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 在场强方向的投影 $\mathrm{d}S'=\mathrm{d}S\cos\theta$ 的乘积，即

$$\mathrm{d}\Phi_e = E\,\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cos\theta = \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\ ,$$

式中，$\theta$ 是面元 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 的法线方向与该处场强 $\boldsymbol{E}$ 方向的夹角. 通过任意曲面或任意闭合曲面的电通量 $\Phi_e$ 表示为 $\iint\limits_{(S)}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 或 $\oiint\limits_{(S)}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$. 电通量可以形象地理解为电场线的根数，但不要因此产生离散的错觉，而应注意静电场是连续分布的. 另外，对于闭合曲面，通常取它的外法线方向为正，若 $\theta<90°$，$\cos\theta>0$，电通量 $\mathrm{d}\Phi_e>0$ 为正；若 $\theta>90°$，$\cos\theta<0$，电通量 $\mathrm{d}\Phi_e<0$ 为负.

静电场的高斯定理：通过任意闭合曲面 $S$ 的电通量 $\Phi_e$ 等于该闭合曲面所包围的所有电荷电量的代数和 $\sum\limits_{(S内)}q$ 除以 $\varepsilon_0$，与闭合曲面外的电荷无关，即

$$\Phi_e = \oiint\limits_{(S)}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{(S内)}q\ . \tag{1.7}$$

闭合曲面 $S$ 习惯上叫做高斯面，通常是一个假想的闭合曲面. 由于(1.7)式的右边可以不为零，故通过闭合曲面的电通量可以不为零，表明静电场是有源的.

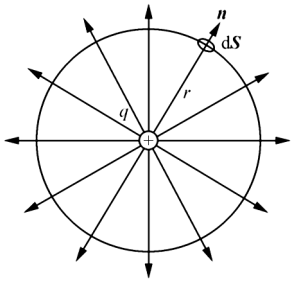


图 1-8 通过包围点电荷的同心球面的电通量

静电场的高斯定理可由库仑定律和场强叠加原理证明.

**证明** (1)如图 1-8，设静电场由正点电荷 $q$ 产生，作以 $q$ 为球心、半径为 $r$ 的球面为高斯面. 根据库仑定律，球面上各点场强的大小均为 $E=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r^2}$，场强的方向沿径向向外，与面元 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 的外法线 $\boldsymbol{n}$ 方向一致，故 $\theta=0$，$\cos\theta=1$，通过球面上任意面元 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 的电通量为

$$\mathrm{d}\Phi_e = \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = E\cos\theta\,\mathrm{d}S = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\mathrm{d}S\ ,$$

通过整个闭合球面的电通量为

$$\Phi_e = \oiint\limits_{(S)}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\mathrm{d}S = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\oiint\limits_{(S)}\mathrm{d}S$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}.$$

这样，在点电荷情形，取球形高斯面，证明了静电场的高斯定理. 显然，上述证明与点电荷的正负以及球面半径的大小无关.

(2)设静电场由正点电荷 $q$ 产生，作包围 $q$ 的任意闭合曲面 $S$ 为高斯面. 图 1-9 为 $S$ 面上的任一面元 $\mathrm{d}S$，通过 $\mathrm{d}S$ 的电通量为

$$\mathrm{d}\Phi_e = \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = E\cos\theta\,\mathrm{d}S$$

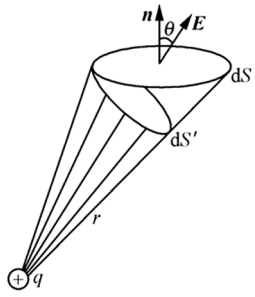



图 1-9　通过包围点电荷的任意闭合曲面的电通量

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}S'}{r^2}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\mathrm{d}\Omega,$$

式中，$\theta$ 是面元 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 的法线方向 $\boldsymbol{n}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 之间的夹角，$\mathrm{d}S\cos\theta=\mathrm{d}S'$ 是面元 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 在垂直于径矢方向的投影面积，即 $\mathrm{d}S'$ 是以 $q$ 为球心 $r$ 为半径的球面上的面元，$\mathrm{d}S'/r^2=\mathrm{d}\Omega$ 是 $\mathrm{d}S'$ 对 $q$ 点所张的立体角. 积分得

$$\Phi_e=\oiint_{(S)}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\mathrm{d}\Omega=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}4\pi=\frac{q}{\varepsilon_0}.$$

(3)设静电场由正点电荷 $q$ 产生，作不包围 $q$ 的任意闭合曲面 $S$ 为高斯面，即 $q$ 在闭合曲面 $S$ 之外. 如图 1-10 所示，由于点电荷电场的电场线是沿径向呈辐射状的直线，当 $q$ 在闭合曲面 $S$ 之外时，从某个面元 $\mathrm{d}S_1$ 进入闭合曲面的电场线必定会从另一相应的面元 $\mathrm{d}S_2$ 穿出. 换言之，因这一对面元 $\mathrm{d}S_1$ 和 $\mathrm{d}S_2$ 对点电荷 $q$ 所张的立体角相同，但外法线方向不同，由前式，进入 $\mathrm{d}S_1$ 的电通量和穿出 $\mathrm{d}S_2$ 的电通量数值相同、符号相反，总和为零. 通过整个闭合曲面 $S$ 的总电通量就是通过这一对对面元的电通量之和，必定为零，即

$$\Phi_e=\oiint_{(S)}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}=0.$$

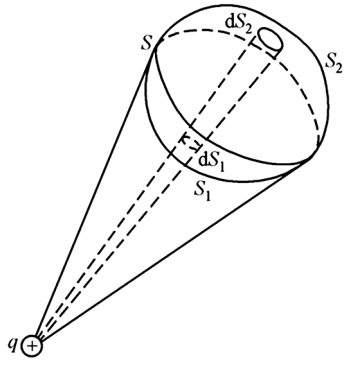



图 1-10　通过不包围点电荷的任意闭合曲面的电通量

(4)设静电场由任意带电体产生，作任意闭合曲面 $S$ 为高斯面.

任意带电体可以看作是 $n$ 个点电荷 $(q_1,q_2,\cdots,q_n)$ 的集合，设其中 $k$ 个点电荷 $(q_1,q_2,\cdots,q_k)$ 在闭合曲面 $S$ 内，其余 $(n-k)$ 个点电荷 $(q_{k+1},q_{k+2},\cdots,q_n)$ 在闭合曲面 $S$ 外. 根据场强叠加原理(1.5)式，$n$ 个点电荷在高斯面上任意面元 $\mathrm{d}S$ 处的总场强 $\boldsymbol{E}$ 是各点电荷单独存在时在该处的场强 $\boldsymbol{E}_1,\boldsymbol{E}_2,\cdots,\boldsymbol{E}_n$ 的矢量和，即

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2+\cdots+\boldsymbol{E}_k+\boldsymbol{E}_{k+1}+\cdots+\boldsymbol{E}_n$$

通过面元 $\mathrm{d}S$ 的电通量为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\Phi_e &= \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\\ &= \boldsymbol{E}_1\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}+\boldsymbol{E}_2\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}+\cdots+\boldsymbol{E}_k\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}+\boldsymbol{E}_{k+1}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}+\cdots+\boldsymbol{E}_n\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\\ &= \mathrm{d}\Phi_{e1}+\mathrm{d}\Phi_{e2}+\cdots+\mathrm{d}\Phi_{ek}+\mathrm{d}\Phi_{ek+1}+\cdots+\mathrm{d}\Phi_{en},\end{aligned}$$

积分，利用(2)和(3)的结果，前 $k$ 个积分不为零，后$(n-k)$个积分为零，故通过闭合曲面 $S$ 的电通量为

$$\begin{aligned}\Phi_e &= \oiint_{(S)}\mathrm{d}\Phi_e\\ &= \oiint_{(S)}\mathrm{d}\Phi_{e1}+\oiint_{(S)}\mathrm{d}\Phi_{e2}+\cdots+\oiint_{(S)}\mathrm{d}\Phi_{ek}+\oiint_{(S)}d\Phi_{ek+1}+\cdots+\oiint_{(S)}d\Phi_{en}\\ &= \Phi_{e1}+\Phi_{e2}+\cdots+\Phi_{ek}+0\\ &= \frac{1}{\varepsilon_0}(q_1+q_2+\cdots+q_k)=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{(S内)}q_i.\end{aligned}$$

至此，根据库仑定律和场强叠加原理证明了静电场的高斯定理. 它表明，由电荷产生的静电场作为一个矢量场，其基本性质之一是有源，电荷就是它的源.

值得注意的是，在上述证明中，由于球面积等于 $4\pi r^2$ 或球面对球心所张立体角为 $4\pi$ 都是严格的几何结果，要求电力平方反比律严格成立，即要求修正数 $\delta$ 严格为零，否则静电场的高斯定理(以及由它得出的推论)不再严格成立而应有所修正. 同时，还用到电力与电量成正比，在从点电荷推广到任意带电体时应用了叠加原理. 总之，电力的平方反比律、与电量成正比、可叠加性是静电场高斯定理成立的必要条件.

另外，在静电场高斯定理(1.7)式中，场强$\boldsymbol{E}$ 是全部电荷(包括高斯面内、外的全部电荷)产生的，但等号右边的 $\sum\limits_{(S内)}q$ 只涉及高斯面内的电荷，这是因为高斯面外的电荷虽然对场强有贡献，却对通过高斯面的电通量无贡献.

前已指出，场强叠加原理(1.5)式提供了计算场强的一种方法. 现在，静电场高斯定理(1.7)式提供了计算场强的另一种方法.

用静电场高斯定理计算场强时，由(1.7)式，首先，右边的 $\sum\limits_{(S内)}q$ 应易求，即需已知电荷的分布，这是前提；其次，左边除待求的某点场强$\boldsymbol{E}$ 外，还涉及高斯面上其他各点的场强以及相应的$\theta$ 和面积，若均未知且不同，显然无从求解. 实际上，能够用高斯定理求解的问题，要求(1.7)式可以简化为只包含一个待求未知量$\boldsymbol{E}$ 的代数方程. 所以，用高斯定理计算场强时，要求电荷的分布以及由此产生的电场的分布具有很强的对称性(比用场强叠加原理计算场强时对电荷和电场分布对称性的要求更强)，因而可以求解的问题屈指可数. 同时，也提醒我们，应该根据问题的对称性，适当选取高斯面，这正是求解的关键. 当满足上述要求，成功地将(1.7)式简化为一个代数方程后，求解将简捷方便，这又是这种方法的优点.

**例 4** 设均匀带电球壳的带电总量为 $Q(Q>0)$，半径为 $R$，试求球壳内外的场强.

**解** 若用场强叠加原理求解，需以球心和所求场点为轴将带电球壳分割成许多环形球带，先求出各球带在该场点的场强再作积分，比较复杂. 现用高斯定理求解.

先分析电场分布的对称性. 因电荷分布具有球对称性，故电场分布也应具有球对称性，即同心球面上各点场强的大小应相等，方向应沿径向，呈辐射状，见图 1-11(a). 由此，为求任一点 $P$ 的场强，应选取过 $P$ 点的同心球面为高斯面. 在此球面上，各点场强的大小都与待求的 $P$ 点场强相同，方向均沿径向向外，即 $\cos\theta$ 处处相等均为 1. 球面积易求，高斯面内的电量已知，于是由(1.7)式即可求解.

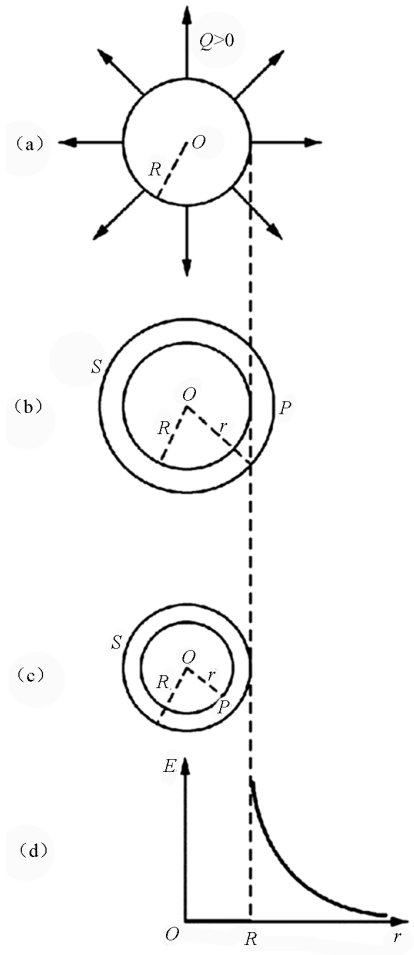



图 1-11　均匀带电球壳的场强分布

由高斯定理，若 $P$ 点在带电球壳外，$P$ 点与球心 $O$ 相距为 $r(r>R)$（见图 1-11(b)），则有

$$\begin{aligned}\Phi_e &= \oiint_{(S)} E\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oiint_{(S)} E\cos\theta\,\mathrm{d}S \\ &= E\oiint_{(S)}\mathrm{d}S = E\cdot 4\pi r^2 \\ &= \frac{Q}{\varepsilon_0},\end{aligned}$$

故

$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\quad 或\quad \boldsymbol{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}},$$

式中，$\hat{\boldsymbol{r}}$ 为径向单位矢量. 上式表明，均匀带电球壳在外部的场强，与球壳上全部电荷集中在球心时产生的场强相同.

若 $P$ 点在带电球壳内即 $r<R$（见图 1-11(c)），因高斯面内无电荷，故

$$\Phi_e = E\cdot 4\pi r^2 = 0,$$

即

$$E=0.$$

上式表明，均匀带电球壳内部的场强处处为零.

综上，场强分布的全貌如图 1-11(d)中 $E(r)$ 曲线所示，可见场强大小在球壳表面（$r=R$）处有跃变.

顺便指出，若将本题改为导体球壳，设外半径为 $R$，内半径为 $r$，总电量为 $Q$，球壳内一无所有. 与本题类似，利用静电场的高斯定理及导体平衡条件可以证明，球壳内部场强为零，全部电荷应均匀分布在导体球壳的外表面，内表面无电量，球壳外场强分布与本题相同. 但若电力平方反比律稍有偏差，即若 $\delta\neq 0$，则静电场高斯定理不再严格成立，内表面将带少许电量.

**例 5**　设无限长均匀带电细棒的电荷线密度为 $\lambda$（$\lambda>0$），试求场强分布.

**解**　均匀带电细棒的电场分布具有轴对称性，又因无限长，各点场强的方向应垂直于棒，与棒垂直距离相同各点的场强大小也应相同，据此，如图 1-12 所示，为求任一点 $P$ 的场强，可作以细棒为中轴的圆柱面为高斯面. $P$ 为圆柱面上一点，与棒的垂直距离为 $r$，圆柱长为 $l$. 由静电场高斯定理，有

$$\begin{aligned}\Phi_e &= \oiint_{\text{圆柱面}} \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iint_{\text{侧面}} \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} + \iint_{\text{上底面}} \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} + \iint_{\text{下底面}} \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \\ &= \oiint_{\text{侧面}} E\cos\theta\,\mathrm{d}S = E\oiint_{\text{侧面}}\mathrm{d}S = E\cdot 2\pi r l \\ &= \sum_{(\text{圆柱面内})}\frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0},\end{aligned}$$

故

$$E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}.$$

如果均匀带电细棒为有限长，就无法用高斯定理求解，只能采用场强叠加原理.

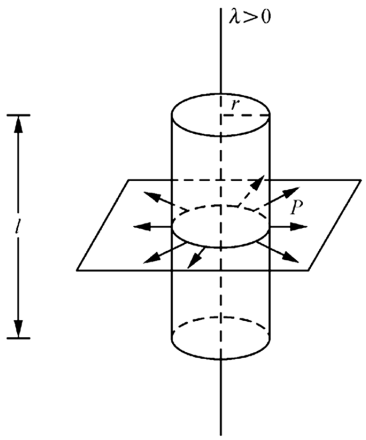



图 1-12　无限长均匀带电细棒外的场强分布

**例 6**　设均匀带电的无限大平面的电荷面密度为 $\sigma(\sigma>0)$，试求平面外的场强分布.

**解**　均匀带电平面的电场具有面对称性(镜对称性)，即平面两侧对应点的场强大小相同. 又因平面无限大，各点场强方向均应与平面垂直，且与平面垂直距离相同各点的场强大小应相同. 据此，为求带电平面外任一点 $P$ 的场强，作高斯面为如图 1-13 所示的圆柱面，其侧面与带电平面垂直，两底面与带电平面平行且对称，由静电场的高斯定理，有

$$\begin{aligned}\Phi_e &= \oint_{\text{圆柱面}} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iint_{\text{侧面}} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \iint_{\text{左底面}} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \iint_{\text{右底面}} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \\ &= 0 + \oint_{\text{左底面}} E\mathrm{d}S = + \oint_{\text{右底面}} E\mathrm{d}S = 2ES \\ &= \sum_{(\text{圆柱面内})} \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0},\end{aligned}$$

故

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.$$

可见，均匀带电无限大平面外是匀强电场，场强方向与带电平面垂直，场强大小与场点和平面的距离无关.

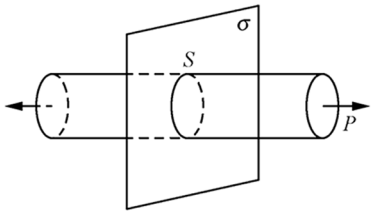



图 1-13　均匀带电无限大平面外的场强分布

推广：根据静电场的高斯定理和场强叠加原理，对于两无限大均匀带异号电荷的平行薄板，设两平板上的电荷面密度为 $\pm\sigma$，则其间场强的大小为 $E=\sigma/\varepsilon_0$，场强的方向垂直带电平面，由正电板指向负电板，在两平板外的场强为零.

在以上三例中，适当地选取高斯面是顺利求解的关键. 例 4 取高斯面为球面，与电场线垂直，$\cos\theta=1$，球面各点场强大小与待求点相同. 例 5 取高斯面为圆柱面，上下底面与电场线平行，$\cos\theta=0$；侧面与电场线垂

直，$\cos\theta=1$，侧面各点场强大小与待求点相同. 例 6 取高斯面为圆柱面，两底面与电场线垂直，$\cos\theta=1$，底面上各点场强大小与待求点相同；侧面与电场线平行，$\cos\theta=0$. 由此可见，所谓适当选取高斯面，就是充分利用问题的对称性，在分析电场线分布的基础上，选取与电场线平行或垂直的面构成高斯面，并使待求点在与电场线垂直的那部分高斯面上，且该面上各点场强的大小均应与待求点相同，这样，就能把用积分形式表述的高斯定理简化为只包含一个待求未知量 $E$ 的代数方程，于是可解. 当然，如果对称性不够强，无法找到满足上述要求的高斯面，就不能只用高斯定理求解.

## 第四节 静电场的环路定理 电势场

### 一、静电场的环路定理

第三节的静电场高斯定理表明静电场是有源的，第四节的静电场环路定理将表明静电场是无旋的. 两者结合，完整地揭示静电场作为一个矢量场的基本性质：有源无旋.

静电场的环路定理：在静电场中，场强沿任意闭合环路的线积分恒等于零. 简言之，静电场的环量处处为零，静电场是无旋场，表示为

$$\oint_{(L)} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=0. \tag{1.8}$$

现在，根据库仑定律和场强叠加原理加以证明.

**证明** 如图 1-14，对于点电荷 $q$ 产生的静电场，场强 $\boldsymbol{E}$ 沿任意闭合环路 $L$ 的线积分为

$$\begin{aligned}\oint \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oint \frac{1}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}\\ &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oint \frac{\mathrm{d}r}{r^2}\\ &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\right)\Big|_{r_P}^{r_P}=0.\end{aligned}$$

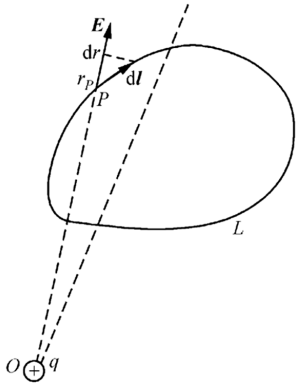



图 1-14

式中第一个等式利用了由库仑定律给出的点电荷场强公式 $\boldsymbol{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}$，其中 $\hat{\boldsymbol{r}}$ 是以点电荷 $q$ 为原点的径向单位矢量. 式中第二个等式中用到 $(\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l})=\mathrm{d}r$，即把 $L$ 上任意线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 在径向的投影表为 $\mathrm{d}r$. 式中第三个等式把环路积分取为从任一点 $P$ 开始经 $L$ 回到 $P$ 的积分，因在任意线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 上的积分都可以变为沿径向在相应 $\mathrm{d}r$ 上的积分，又因各 $\mathrm{d}r$ 的积分都等于沿 $OP$ 方向的相应积分，故沿闭合环路 $L$ 积分一周，相当于沿径向从 $r_P$ 开始又回到 $r_P$ 的积分，应恒为零，其中 $\overline{OP}=r_P$.

任何带电体系可以看作是许多点电荷的集合，由场强叠加原理有

$$\oint_{(\mathrm{L})}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\oint_{(L)}\boldsymbol{E}_1\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}+\oint_{(L)}\boldsymbol{E}_2\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}+\cdots=0,$$

式中，$\boldsymbol{E}$ 是带电体系产生的静电场的总场强，$\boldsymbol{E}_1$，$\boldsymbol{E}_2$，…是各点电荷场的场强. 证毕.

应该指出，在上述证明中，虽然用到了点电荷的场强公式，但不难看出，静电场环量为零只是点电荷的场强方向沿径向并具有球对称性以及叠加原理的结果. 若点电荷场强不沿径向，就不能把环路线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 变为径向线元 $\mathrm{d}r$；若点电荷场不具有球对称性，则两段都沿径向但在不同方位的积分并不相等，不能互相取代. 因此，在上述证明中，正是静电力的径向性和球对称性，确保把沿任意闭合环路的线积分变为沿径向的往返积分，使得结果为零. 另外，叠加原理则是把点电荷场的结果推广到任意带电体系的场时必须的条件. 至于库仑定律中所包含的平方反比律以及与 $q$ 成正比，在上述证明中并未用到，即此条件可以放宽. 例如，若场强为距离的任意函数，上述证明仍有效，静电场依然无旋.

静电场的环路定理还可以等价地表述为：静电场力对试探电荷所做的功与路径无关，只与起点终点的位置有关（当然，还与试探电荷 $q_0$ 的大小成正比），即

$$q_0\int_{P\,(L1)}^{Q}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=q_0\int_{P\,(L2)}^{Q}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}\tag{1.9}$$

**证明** 由(1.8)式，设试探电荷 $q_0$ 在静电场中沿任意闭合环路 $L$ 绕行一周，则电场力对 $q_0$ 所做的功为

$$A=\oint_{(L)}q_0\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=q_0\oint_{(L)}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=0.$$

在 $L$ 上任取两点 $P$ 和 $Q$，把试探电荷 $q_0$ 从 $P$ 点沿 $L_1$ 移到 $Q$ 点，再从 $Q$ 点沿 $L_2$ 返回 $P$ 点，$L_1$ 和 $L_2$ 合成环路 $L$，则

$$\begin{aligned}q_0\oint_{(L)}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}&=q_0\int_{P\,(L1)}^{Q}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}+q_0\int_{Q\,(L1)}^{P}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}\\&=q_0\int_{P\,(L1)}^{Q}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}-q_0\int_{P\,(L2)}^{Q}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=0,\end{aligned}$$

故

$$q_0\int_{P\,(L1)}^{Q}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=q_0\int_{P\,(L2)}^{Q}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}.$$

证毕.

## 二、关于静电场高斯定理和环路定理的几点说明

1. 静电场的高斯定理和环路定理描绘了静电场的性质：有源无旋

静电场是由静止电荷产生的电场，是一个矢量场. 静电场的高斯定理表明，静电场是有源的，源就是电荷；静电场的环路定理表明，静电场是无旋的，可以引进电势概念. 两者结合，完整地描绘了静电场作为一个矢量场的性质：有源无旋.

2. 静电场的高斯定理和环路定理等价于库仑定律和叠加原理

库仑定律和叠加原理是实验规律，着眼于静电力的特征：平方反比律，径向性和球对称性，与电量成正

比，可叠加性. 静电场的高斯定理和环路定理则着眼于静电场作为矢量场的性质. 静电场的高斯定理和环路定理是由库仑定律和叠加原理证明的，两者等价.

但应注意，在证明静电场高斯定理时，只用到平方反比律、与电量成正比、可叠加性，并不需要径向性和球对称性；在证明静电场环路定理时，只用到径向性、球对称性、可叠加性，并不需要平方反比律、与电量成正比. 换言之，静电场的高斯定理和环路定理分别反映了静电力的部分特征，两者合在一起才反映静电力的全部特征，与库仑定律和叠加原理等价.

3. 静电场的高斯定理可以推广，静电场的环路定理不能推广

由于在证明静电场高斯定理时，不要求径向性和球对称性，限制条件的减少意味着适用范围有可能拓宽.

运动点电荷的运动方向是一个特殊方向，这表明它产生的电场必定不具有球对称性. 例如，匀速运动点电荷的场强为

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}}\hat{\boldsymbol{r}}, \tag{1.10}$$

式中，$r$ 和 $\theta$ 分别是场源点电荷 $q$ 到场点的距离和方位角，$\beta=v/c$ 是点电荷速度 $v$ 与真空光速 $c$ 之比. 但是运动点电荷产生的电场仍满足高斯定理

$$\oiint_{(S)}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\frac{q}{\varepsilon_0}. \tag{1.11}$$

变化磁场产生无源有旋的涡旋电场，这是产生原因和性质都有别于静电场的另一种电场，涡旋电场不具有径向性和球对称性，涡旋电场的高斯定理为

$$\oiint_{(S)}\boldsymbol{E}_{旋}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=0. \tag{1.12}$$

把(1.11)和(1.12)两式相加，得出总电场的高斯定理为

$$\oiint_{(S)}\boldsymbol{E}_{总}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\frac{q}{\varepsilon_0}, \tag{1.13}$$

式中，$\boldsymbol{E}_{总}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}_{旋}$ 是电荷产生的电场与变化磁场产生的涡旋电场之和，可称为总电场或简称电场.(1.13)式就是普遍的电场高斯定理，它的形式与静电场高斯定理(1.7)式相同，是后者的推广，不受静止、恒定条件的限制.

普遍的电场高斯定理(1.13)式表明总电场是有源的，其核心是给出了电场的通量(电通量)与电场的源(电荷)之间的定量关系，即无论静止或运动电荷，单位电荷发出或吸收的电通量为 $1/\varepsilon_0$.

然而，由于涡旋电场是有旋的(即总电场是有源有旋的)，总电场的环路定理不能由静电场环路定理推广得出.

4. 静电场的高斯定理和环路定理缺一不可，不能互推

(1.11)式与(1.13)式形式相仿，表明静电场与总电场都是有源的，但静电场无旋，总电场有旋(确切地说，其中的涡旋电场有旋)，可见高斯定理并不排除涡旋电场，仅由高斯定理不能确定是否有旋. 所以在描绘静电场时，除了高斯定理外，必须加上静电场的环路定理，以便排除涡旋电场，确定静电场是无旋的.

静电场环路定理表明静电场无旋、有势，排除了有旋的涡旋电场，但由于其中不反映平方反比律，仅由静电场环路定理不能给出电势的定量表述，需要求助于静电场高斯定理才能给出电势的定量结果.

由此可见，静电场的高斯定理和环路定理是两个独立的定理，不能彼此取代，合起来才能全面地描绘静电场.

## 三、电势场

在物理学中，对于循环往复的过程，如果某个过程量在任意循环过程中的积分为零，则表明存在着一个相应的描绘该过程各状态性质的物理量. 在力学中，把沿任意闭合环路做功为零（或做功与路径无关）的力场称为保守力场或势场，相应的作用力称为保守力. 对于保守力场必定存在着一个描绘系统状态性质的物理量，由于做功过程是能量的交换，该物理量应该是某种能量，由于该能量只取决于保守力场中各物体之间的相对位置，所以称为势能或位能. 重力、万有引力、弹性力等都具有做功与路径无关的性质，可以引入相应的重力势能、万有引力势能、弹性势能等概念. 这些势能都为相互作用体系所具有，势能的大小取决于其间的相对位置. 以弓箭为例，拉满弓弦，蓄势待发，一旦松手，箭出如飞. 在松手后的过程中，弹性力做功，箭被加速，与此同时弓箭系统的位置发生了变化，其弹性势能转化为箭的动能.

静电力做功与路径无关，静电力是保守力，可以引入电势能概念. 设静电场中的试探电荷 $q_0$ 在静电力作用下从 $P$ 点移到 $Q$ 点，在此过程中静电力对 $q_0$ 做功 $A_{PQ}$ 定义为电势能的减少，即

$$\boldsymbol{A}_{PQ}=q_0\int_P^0 \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}\overset{\text{def}}{=\!=}W_{PQ}=W_P-W_Q, \tag{1.14}$$

式中，“$\overset{\text{def}}{=\!=}$”表示“定义为”. 若 $A_{PQ}>0$，静电力做正功，则 $q_0$ 的动能增加，电势能相应减少，即 $W_P>W_Q$，可见上述定义合理. 确切地说，电势能是由产生静电场的电荷与试探电荷 $q_0$ 构成的带电体系所共同具有的，只取决于其间的相对位置，与 $q_0$ 移动的路径无关.

电势能差的定义(1.14)式表明，$W_{PQ}$ 不仅与静电场有关，还与 $q_0$ 成正比，其比值 $W_{PQ}/q_0$ 则与 $q_0$ 无关，反映了静电场在 $P$，$Q$ 两点的性质，故可定义静电场中 $P$，$Q$ 两点的电势差为

$$U_{PQ}=U_P-U_Q\overset{\text{def}}{=\!=}\frac{W_{PQ}}{q_0}=\int_P^0 \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}. \tag{1.15}$$

静电场中任意两点 $P$，$Q$ 之间的电势差，定义为把单位正电荷从 $P$ 点沿任意路径移到 $Q$ 点时，静电力所做的功. 简言之，电势差即单位正电荷的电势能差.

为了确定静电场中各点的电势值，需选定参考点的电势值，以便由各点与参考点的电势差得出各点的电势值. 从原则上说，参考点及其电势值的选取具有任意性，通常规定无穷远点的电势为零，即

$$U_\infty\overset{\text{def}}{=\!=}0. \tag{1.16}$$

于是，任一点 $P$ 的电势为

$$U_p=U_p-U_\infty=\int_P^\infty \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}. \tag{1.17}$$

静电场中任一点的电势等于把单位正电荷从该点沿任意路径移到无穷远时，静电力所做的功.

电势的单位是伏[特](V)，1 V=1 J/C(1 伏=1 焦/库).

为什么选取 $U_\infty=0$ 呢？由于在几乎一切实际的静电问题中，带电体系的电量总是有限的，分布范围也是有限的，带电体系附近的电场较强、电势变化剧烈，远处的电场较弱、电势变化和缓，因而把距离带电体系足够远、场强几乎为零、电势几乎恒定的广大区域统称为无穷远点，并规定其电势为零，便于确定近处各点的电势、比较其大小. 换言之，选取 $U_\infty=0$ 具有广泛适用、方便自然的优点. 反之，以点电荷的静电场为例，若选取点电荷所在处为电势零点，则有限远各点的电势将均为无穷大，无从比较. 其原因在于，点电荷附近的电场太强，电势变化过于急剧，选取点电荷所在处为电势零点会掩盖任意两点间有限的电势差，显然不恰当. 实际上，在这种情况下，点电荷的模型已经失效.

另外，在实际工作中常常把电器外壳接地，使之与地球联成一体，保持电势稳定，并选取地球电势为零，$U_{地}=0$. 那么，在什么条件下可以选取 $U_{地}=0$，并使之与 $U_{\infty}=0$ 相容呢？条件是，地球的电势稳定且地球与无穷远之间的电势差在讨论的问题中可以忽略. 不难设想，通常在研究由接地导体及带电体构成的带电体系附近的电势分布时，由于附近的电场远大于地球远端与无穷远之间的电场，使得地球（作为导体）与无穷远之间的电势差可略，地球电势稳定，$U_{地}=0$ 与 $U_{\infty}=0$ 相容. 但若讨论与地球大小可相比拟的空间范围的电势分布，且需考虑地球电场的影响时，则因地球表面与电离层之间存在着垂直地面的法向电场，其间的电势差达数十万伏之多，就不能再同时选取 $U_{地}=0$ 和 $U_{\infty}=0$ 了.

电势的引入是静电场无旋的必然结果，它提供了除场强外描绘静电场的新手段. 由于电势是标量，电势的空间分布可以用等势面（电势相同点的轨迹）来描绘，形象直观，一目了然. 另外，电势来源于电势能，作为能量家族的新成员，不仅丰富了对能量概念的认识，而且为电现象与其他现象之间的联系提供了沟通的渠道，意义重大.

**例 7** 试求点电荷 $q$ 产生的静电场的电势分布.

**解** 在空间任取一点 $P$，点电荷 $q$ 与 $P$ 点的距离为 $r_P$，则 $P$ 点的电势为

$$\begin{aligned} U_p &= \int_P^{\infty} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \\ &= \int_{r_P}^{\infty} E\,\mathrm{d}r \\ &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_P}^{\infty}\frac{\mathrm{d}r}{r^2} \\ &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_p}. \end{aligned} \tag{1.18}$$

式中第一个等式是电势的定义，取 $U_{\infty}=0$；第二个等式利用积分与路径无关，选取积分路径为便于积分的从 $r_P$ 沿径向到达无穷远的直线，则 $\boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=E\cos\theta \mathrm{d}l=E\mathrm{d}r$，即 $\mathrm{d}r$ 是 $\mathrm{d}l$ 在径向的投影；第三个等式采用点电荷的场强公式 $E=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$；最后完成积分.

(1.18)式表明，点电荷电场的等势面是以点电荷为中心的一系列同心球面，任一点 $P$ 的电势 $U_P$ 与 $r_P$ 成反比.

利用点电荷的电势公式(1.18)式和场强叠加原理(1.5)式，可以给出任意带电体的电势公式. 设任意带电体产生的静电场的场强为 $\boldsymbol{E}$，由场强叠加原理，任一点 $P$ 的电势可表示为

$$\begin{aligned} U_p &= \int_p^{\infty}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_P^{\infty}\boldsymbol{E}_1\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} + \int_P^{\infty}\boldsymbol{E}_2\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} + \cdots \\ &= U_{P1}+U_{P2}+\cdots = \sum_i U_{Pi}\ , \end{aligned}$$

或

$$U_P = \int \mathrm{d}U_P\ ,$$

式中，$U_{Pi}$ 是构成带电体的各点电荷 $q_1, q_2, \cdots$ 中 $q_i$ 产生的静电场在 $P$ 点的电势；或在电荷连续分布情形，电荷微元 $\mathrm{d}q$ 在 $P$ 点的电势为 $\mathrm{d}U_P$. 再由点电荷电势公式(1.18)式，得

$$U_P = \sum_i U_{pi} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i} \tag{1.19a}$$

或

$$U_p = \int \mathrm{d}U_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\mathrm{d}q}{r}\ , \tag{1.19b}$$

式中，$r_i$ 是点电荷 $q_i$ 到 $P$ 点的距离，$r$ 是电荷微元 $\mathrm{d}q$ 到 $P$ 点的距离.(1.19)式称为电势叠加原理：带电体的静电场中某点 $P$ 的电势，等于构成带电体的各点电荷或各电荷微元的静电场在该点电势的代数和或标量积分.

(1.17)式和(1.19)式提供了计算静电场电势分布的两种基本方法. 前者是电势的定义式，需先求出场强分布，再由场强计算电势，关键是根据场强分布的特点，选取适当的积分路径，以便于积分. 后者是电势叠加原理，利用已知的电荷分布作标量积分，关键是根据电荷分布的对称性，适当分割，完成积分.

**例 8** 设均匀带电球壳的总电量为 $q$，半径为 $R$，试求电势分布.

**解** 方法一：取球心 $O$ 为坐标原点，由第三节例 4，均匀带电球壳内外的场强分布为

$$\begin{cases} E=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, & r>R, \\ E=0, & r<R, \end{cases}$$

场强的方向沿径向.

球壳外任一点 $P(r>R)$ 的电势为

$$U_p=\int_p^{\infty}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_r^{\infty}E\,\mathrm{d}r=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r},$$

式中，$r=r_P$ 是 $P$ 点与 $O$ 点的距离. 上述结果与点电荷的电势(即全部电荷集中在 $O$ 点)相同.

计算球壳内任一点 $P(r<R)$ 的电势时，因球壳内外场强的分布有所不同，需分段积分，为

$$\begin{aligned} U_p&=\int_p^{\infty}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_r^{\infty}E\,\mathrm{d}r=\int_r^{R}E\,\mathrm{d}r+\int_R^{\infty}E\,\mathrm{d}r \\ &=0+\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_R^{\infty}\frac{\mathrm{d}r}{r^2}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}. \end{aligned}$$

综上，电势分布如图 1-15 所示.

**方法二**：用电势叠加原理(1.19b)式求解. 如图 1-16，取球心 $O$ 为坐标原点，为求任一点 $P$ 的电势，根据电荷分布的对称性，以 $OP$ 为轴把球面分割成许多环状窄带，任一环带上各部分与 $P$ 点的距离均为 $x$，故该环带的静电场在 $P$ 点的电势为

$$\mathrm{d}U=\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 x}=\frac{\sigma\cdot 2\pi R\sin\theta\cdot R\,\mathrm{d}\theta}{4\pi\varepsilon_0 x},$$

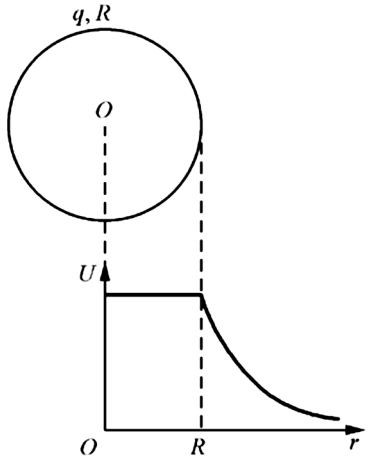



图 1-15 均匀带电球壳内外的电势分布

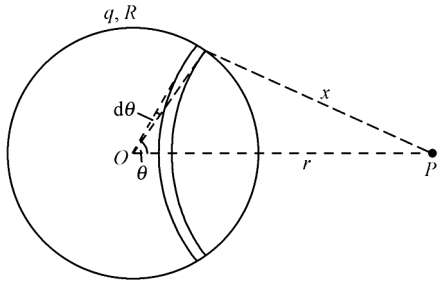



图 1-16 均匀带电球壳内外的电势分布

式中，$dq$ 是图 1-16 中环带的电量，$\sigma$ 是球壳的电荷面密度. 再利用几何关系，统一积分变量(如图 1-16)：

$$x^2=R^2+r^2-2Rr\cos\theta,$$

微分，得

$$2x\,dx=2Rr\sin\theta\,d\theta,$$

即

$$\frac{R\sin\theta\,d\theta}{x}=\frac{dx}{r}.$$

代入 $dU$，得

$$dU=\frac{\sigma 2\pi R}{4\pi\varepsilon_0 r}dx\ .$$

由电势叠加原理(1.19b)式，当 $P$ 点在球壳外时，$r>R$，则

$$U=\int dU=\frac{\sigma\cdot 2\pi R}{4\pi\varepsilon_0 r}\int_{r-R}^{r+R}dx=\frac{\sigma\cdot 4\pi R^2}{4\pi\varepsilon_0 r}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r};$$

当 $P$ 点在球壳内时，$r<R$，则

$$U=\int dU=\frac{\sigma 2\pi R}{4\pi\varepsilon_0 r}\int_{R-r}^{R+r}dx=\frac{\sigma 4\pi R^2}{4\pi\varepsilon_0 R}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}.$$

两种计算方法的结果相同.

## 四、场强与电势的微分关系

场强和电势作为描述静电场的两个基本物理量，其间必定存在着紧密的内在联系和确定的对应关系. 电势的定义表明，任一点的电势取决于整个静电场的场强分布，这是场强与电势之间的积分关系，是两者联系的一个方面. 下面将证明，电场强度矢量等于电势的负梯度，这是场强与电势之间的微分关系，是两者联系的另一方面. 两方面结合，将使我们对场强与电势的关系有了全面的认识.

静电场的电势是空间坐标的标量函数，构成一个标量场. 等势面是电势相同点的轨迹，可用来形象地描绘电势分布. 图 1-17 画出了几种带电体系静电场的等势面和电场线的分布. 从图 1-17 中可以看出场强与电势的关系：(1)等势面与电场线处处正交，场强指向电势减小方向；(2)等势面密集处场强较大，等势面稀疏处场强较小. 上述定性结果是场强与电势微分关系的表现，可以严格证明准确表述.

**证明** (1)若将试探电荷 $q_0$ 沿等势面从 $M$ 点移动 $dl$ 到 $N$ 点，则静电力做功

$$A_{MN}=q_0(U_M-U_N)=0,$$

又

$$A_{MN}=q_0E\,dl\cos\theta,$$

因其中 $q_0$，$E$，$dl$ 均不为零，故 $\cos\theta=0$，$\boldsymbol{E}\perp d\boldsymbol{l}$，即场强方向与等势面垂直.

若将试探电荷 $q_0$(设 $q_0>0$)沿等势面法线方向从 $P$ 点移动 $dl$ 到 $Q$ 点(设 $U_P>U_Q$)，则

$$A_{PQ}=q_0(U_P-U_Q)>0,$$

静电力做正功，场强 $\boldsymbol{E}$ 从 $P$ 点指向 $Q$ 点，即指向电势减小方向.

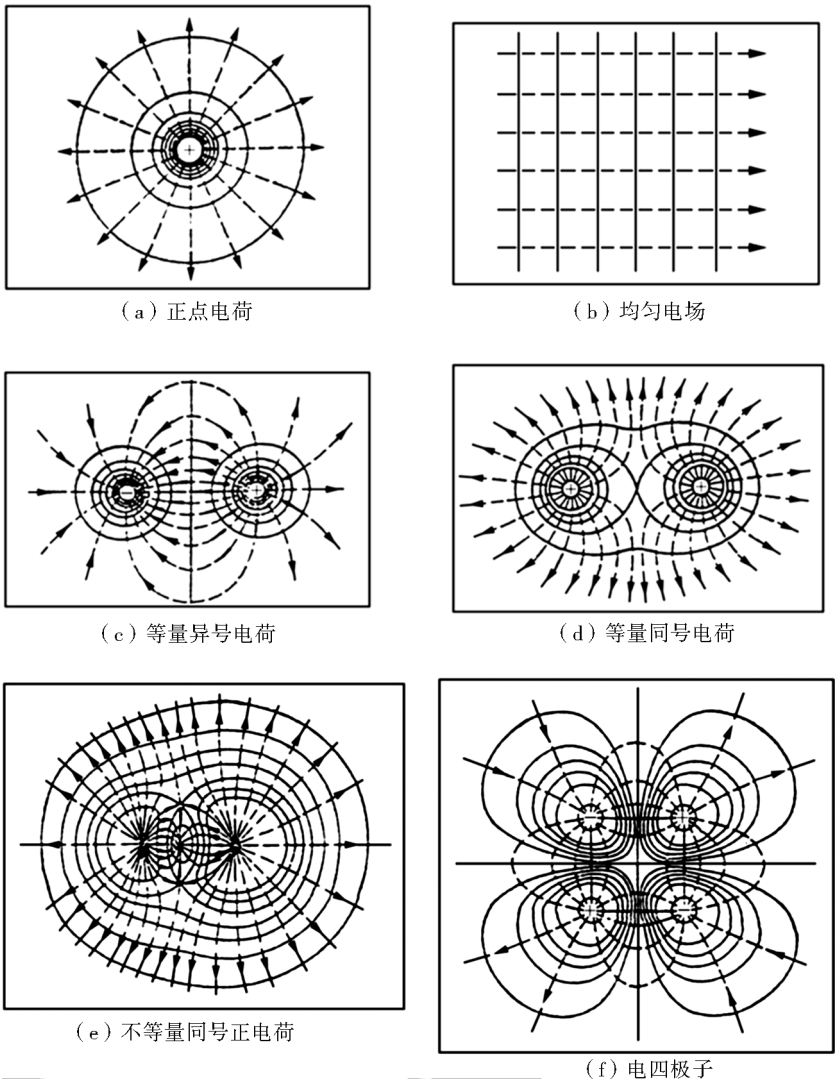



图 1-17　几种带电体系的等势面(实线)与电场线(虚线)的分布

(2)场强大小与等势面疏密的关系:如图 1-18 所示,若试探电荷 $q_0$ 在静电场中从 $P$ 点经位移 $\Delta l$ 到达 $Q$ 点,则静电力做功 $q_0 E \Delta l \cos\theta$,相应的静电势能改变 $-q_0 \Delta U$,故

$$\boldsymbol{E}\Delta l\cos\theta = -\Delta U \quad 或 \quad \boldsymbol{E}_l = -\frac{\Delta U}{\Delta l},$$

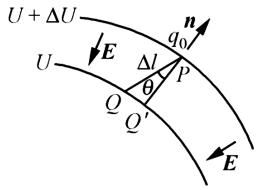



图 1-18

式中,$E_l = E\cos\theta$ 是场强 $\boldsymbol{E}$ 在 $\Delta l$ 上的投影. 令 $\Delta l \to 0$,取极限,得

$$E_l=-\frac{\partial U}{\partial l},$$

式中，$\partial U/\partial l$ 叫做电势 $U$ 沿 $\Delta l$ 的方向微商. 若取 $U$ 沿等势面法线方向的微商，则有

$$E_n=-\frac{\partial U}{\partial n},$$

式中，$E_n$ 是场强 $\boldsymbol{E}$ 在等势面法线方向的投影. 因场强 $\boldsymbol{E}$ 处处与等势面正交，故 $E_n$ 是 $\boldsymbol{E}$ 在各方向投影中的最大值，$E_n=E$. 又因 $\boldsymbol{E}$ 指向电势减小方向，上式可表示为

$$\boldsymbol{E}=-\frac{\partial U}{\partial n}\boldsymbol{n}=-\mathrm{grad}U=-\nabla U, \tag{1.20}$$

式中，$\boldsymbol{n}$ 是等势面法线方向的单位矢量，指向电势增加方向. $\dfrac{\partial U}{\partial n}\boldsymbol{n}$ 或 $\mathrm{grad}U$ 或 $\nabla U$ 称为电势梯度，是一个矢量.(1.20)式表明，场强大小等于电势沿等势面法线方向的变化率(电势的梯度)，场强方向指向电势减小的方向. 简言之，静电场中任意一点的电场强度矢量等于该点电势梯度的负值.(1.20)式就是场强与电势的微分关系.

总之，(1.20)式既包含了场强方向与等势面的关系，又定量地揭示了场强大小与电势变化率的关系. 实际上图 1-18 就是根据这些结论绘制的.

此外，(1.20)式还提供了由电势计算场强的方法，这是继场强叠加原理和高斯定理后第三种计算场强的方法.

**例 9** 试由电偶极子的电势分布求其场强分布.

**解** 电偶极子在远处的电势分布为

$$U=\frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2},$$

是用极坐标表示的，对于直角坐标(如图 1-19 所示)，有

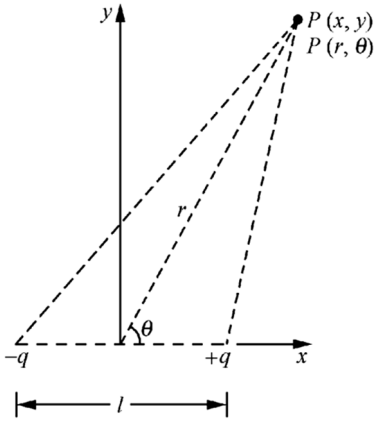



图 1-19

$$r=\sqrt{x^2+y^2},$$

$$\cos\theta=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

代入，得

$$U=\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}.$$

由(1.20)式，场强的 $x$，$y$ 分量为

$$E_x=-\frac{\partial U}{\partial x}=-\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^{5/2}},$$

$$E_y=-\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3xy}{(x^2+y^2)^{5/2}},$$

场强的大小为

$$E=\sqrt{(E_x^2+E_y^2)}=\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(4x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}{(x^2+y^2)^2},$$

场强方向与 $x$ 轴的夹角 $\theta$ 为

$$\theta=\arctan\frac{E_y}{E_x}=\arctan\frac{3xy}{y^2-2x^2},$$

在 $y=0$ 处，即在电偶极子延长线上的场强为

$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2p}{x^3},$$

在 $x=0$ 处，即在电偶极子中垂面上的场强为

$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{y^3},$$

## 第五节 静电场的基本微分方程

在数学（矢量分析）中，任意矢量场 $\boldsymbol{A}$ 的高斯定理和斯托克斯定理为

$$\oiint_{(S)}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iiint_{(V)}\nabla\cdot\boldsymbol{A}\,\mathrm{d}V, \tag{1.21}$$

$$\oint_{(L)}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\iint_{(S)}(\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}. \tag{1.22}$$

(1.21)式中的 $V$ 是闭合曲面 $S$ 包围的体积，(1.22)式中的 $S$ 是以闭合回路 $l$ 为周界的曲面.(1.21)式和(1.22)式分别把矢量场 $\boldsymbol{A}$ 沿闭合曲面的积分（即通量）和沿闭合回路的积分（即环流或环量）与相应的体积分和面积分联合了起来. 两式中的 $\nabla$ 称为哈密顿算符，它是一个矢量微分算符，兼有微分运算和表示矢量两种功能. 两式中的 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}$ 和 $\nabla\times\boldsymbol{A}$ 分别称为矢量场 $\boldsymbol{A}$ 的散度和旋度，另外 $\nabla\varphi$ 称为标量场 $\varphi$ 的梯度. 这些算符在直角坐标系中的表达式如下：

$$\begin{cases}\nabla=\boldsymbol{i}\dfrac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\dfrac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\dfrac{\partial}{\partial z},\\[2ex]\nabla^2=\nabla\cdot\nabla=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2},\\[2ex]\nabla\varphi=\boldsymbol{i}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}+\boldsymbol{j}\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}+\boldsymbol{k}\dfrac{\partial\varphi}{\partial z},\\[2ex]\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\dfrac{\partial A_x}{\partial x}+\dfrac{\partial A_y}{\partial y}+\dfrac{\partial A_z}{\partial z},\\[2ex]\nabla\times\boldsymbol{A}=\left(\dfrac{\partial A_z}{\partial y}-\dfrac{\partial A_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\dfrac{\partial A_x}{\partial z}-\dfrac{\partial A_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\dfrac{\partial A_y}{\partial x}-\dfrac{\partial A_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k},\end{cases} \tag{1.23}$$

式中，$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 是 $x$，$y$，$z$ 方向的单位矢量.

把(1.21)，(1.22)式用于静电场，可将静电场的高斯定理和环路定理表示为

$$\begin{cases}\oiint_{(S)}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iiint_{(V)}\nabla\cdot\boldsymbol{E}\,\mathrm{d}V=\dfrac{q}{\varepsilon_0}=\dfrac{1}{\varepsilon_0}\iiint_{(V)}\rho\,\mathrm{d}V,\\[2ex]\oint_{(L)}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\iint_{(S)}(\nabla\times\boldsymbol{E})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=0,\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\dfrac{\rho}{\varepsilon_0},\\[2ex]\nabla\times\boldsymbol{E}=0,\end{cases} \tag{1.24}$$

(1.24)式是静电场基本方程的微分形式，表明静电场有源无旋，式中 $\rho$ 是电荷体密度.

利用第四节的静电场场强 $\boldsymbol{E}$ 与电势 $U$ 的微分关系，

$$\boldsymbol{E} = -\nabla U,$$

代入(1.24)式，得

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = -\nabla \cdot (\nabla U) = -\nabla^2 U = \frac{\rho}{\varepsilon_0},$$

即

$$\nabla^2 U = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}, \tag{1.25}$$

(1.25)式称为泊松方程. 若 $\rho=0$，(1.25)式简化为

$$\nabla^2 U = 0 \tag{1.26}$$

(1.26)式称为拉普拉斯方程. 泊松方程或拉普拉斯方程是静电场的基本微分方程，都是偏微分方程.

## 习 题

1.根据卢瑟福实验，当两个原子核之间的距离小到 $10^{-15}$ m 时，它们之间的排斥力仍然遵守库仑定律. 金的原子核中有 79 个质子，氦的原子核(即 α 粒子)中有 2 个质子. 已知每个质子带电 $e=1.60\times10^{-19}$ C，α 粒子的质量为 $6.68\times10^{-27}$ kg. 当 α 粒子与金核相距为 $6.90\times10^{-15}$ m 时(设都可当作点电荷)，试求：(1)α 粒子所受的力；(2)α 粒子所获得的加速度.

2.两个点电荷分别带电 $q$ 和 $2q$，相距 $l$，试问将第三个点电荷放在何处它所受的合力为零？

3.如图 1-20，在竖直平面内有两光滑固定细棒，分别与竖直轴夹角 30°，两棒上各串有一带电小球，可自由滑动. 已知两小球各带电 $q=2.0\times10^{-7}$ C，质量都为 $m=0.10$ g，试求两小球的平衡位置及所受棒的支持力.

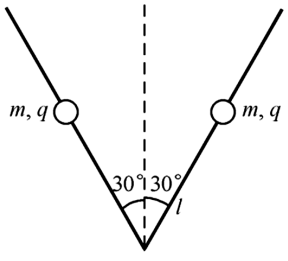



图 1-20

4.两个带电都是 $q$ 的固定点电荷，相距 $l$，连线中点为 $O$；现将另一点电荷 $Q$ 放置在连线中垂面上距 $O$ 点为 $x$ 处.(1)试求点电荷 $Q$ 所受的力；(2)若点电荷 $Q$ 开始是静止的，然后让它自由运动，试问它将如何运动？分别就 $Q$ 和 $q$ 同号以及异号两种情况加以讨论.

5.如图 1-21，一电偶极子的电偶极矩 $\boldsymbol{p}=q\boldsymbol{l}$，$P$ 点到电偶极子中心 $O$ 点的距离为 $r$，$\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{l}$ 的夹角为 $\theta$，设 $r\gg l$. 试求 $P$ 点的电场强度 $\boldsymbol{E}$ 在 $\boldsymbol{r}$ 方向的分量 $E_r$ 和在垂直于 $\boldsymbol{r}$ 方向上的分量 $E_\theta$.

6.如图 1-22，把电偶极矩为 $\boldsymbol{p}=q\boldsymbol{l}$ 的电偶极子放在点电荷 $Q$ 的电场中，电偶极子的中心 $O$ 到 $Q$ 的距离为 $r$，设 $r\gg l$，试求：$\boldsymbol{p}\parallel QO$(图(a))和 $\boldsymbol{p}\perp QO$(图(b))时电偶极子所受的力和力矩.

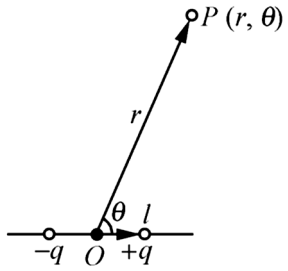



图 1-21

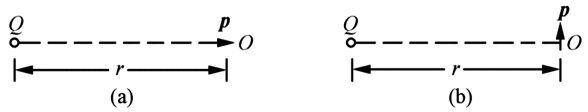



图 1-22

7.如图 1-23 为一种电四极子，它由两个相同的电偶极子 $\boldsymbol{p}=ql$ 组成，这两个电偶极子在同一直线上，但方向相反，它们的负电荷重合在一起. 试证明在它们的延长线上离中心(即负电荷所在处)$r$ 处 $P$ 点的场强为 $E=\dfrac{3Q}{4\pi\varepsilon_0 r^4}$(当 $r\gg l$ 时)，式中的 $Q=2ql^2$ 叫做电四极矩.

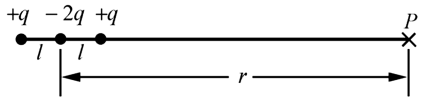



图 1-23

8.如图 1-24，一根非均匀带电细棒，长为 $L$，其一端在坐标原点 $O$，沿 $+x$ 轴放置，设电荷线密度 $\lambda=Ax$，其中 $A$ 为常数.试求 $x$ 轴上 $P$ 点($OP=L+b$)的电场强度.若 $\lambda=A(L+b-x)^2$，结果如何呢?

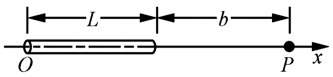



图 1-24

9.一均匀带电薄圆盘，半径为 $R$，电荷面密度为 $\sigma$. 试求：(1)轴线上的场强分布；(2)保持 $\sigma$ 不变，若 $R\to 0$ 或 $R\to\infty$，结果如何？(3)保持总电量 $Q=\pi R^2\sigma$ 不变，若 $R\to 0$ 或 $R\to\infty$，结果如何？

10.半径为 $R$ 的半球面上均匀带电，电荷面密度为 $\sigma$. 试求球心处的电场强度.

11.如图 1-25，无限长带电圆柱面的电荷面密度按 $\sigma=\sigma_0\cos\varphi$ 分布，式中 $\sigma_0$ 是常量，$\varphi$ 是面积元的法线方向与 $x$ 方向之间的夹角. 试求圆柱轴线 $z$ 上的场强.

12.一无限大均匀带电平面，电荷的面密度为 $\sigma$，其上挖去一半径为 $R$ 的圆洞. 试求洞的轴线上离洞心为 $r$ 处的电场强度.

13.如图 1-26，电荷分布在内半径为 $a$ 外半径为 $b$ 的球壳体内，电荷体密度为 $\rho=A/r$，式中 $A$ 是常数，$r$ 是壳体内某一点到球心的距离. 今在球心放一个点电荷 $Q$，为使球壳体内各处电场强度的大小都相等，试求 $A$ 的值.

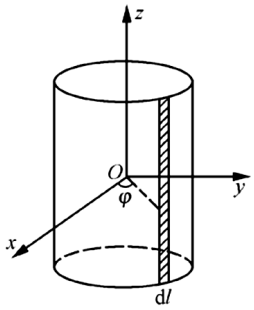



图 1-25

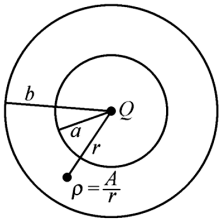



图 1-26

14.根据量子理论，氢原子中心是一个带正电 $q_e$ 的原子核(可以看成点电荷)，外面是带负电的电子云. 在正常状态(核外电子处在 s 态)下，电子云的电荷密度分布是球对称的，可表示为

$$\rho(r)=-\frac{q^e}{\pi a_0^3}e^{-2r/a_0}.$$

式中，$a_0$ 为一常数(它相当于经典原子模型中 s 电子圆形轨道的半径，称为玻尔半径). 试求氢原子内的场强分布.

15.如图 1-27，两个均匀带电的同轴无限长直圆筒，半径分别为 $R_1$ 和 $R_2$. 设在内、外筒两面上所带电荷的面密度分别为 $+\sigma$ 和 $-\sigma$，试求离轴为 $r$ 处的 $P$ 点的场强. 分别就下述三个区域：(1)$r<R_1$；(2)$R_1<r<R_2$；(3)$r>R_2$ 进行讨论.

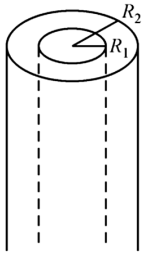



图 1-27

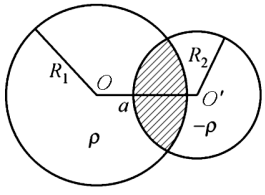



图 1-28

16.如图 1-28 为一无限长带电体系，其横截面由两个半径分别为 $R_1$ 和 $R_2$ 的圆相交而成，两圆中心相距为 $a$，$a<(R_1+R_2)$，半径为 $R_1$ 的区域内充满电荷体密度为 $\rho$ 的均匀正电荷，半径为 $R_2$ 的区域内充满电荷体密度为 $-\rho$ 的均匀负电荷. 试求重叠区域内的电场强度.

17.两无限大平行平面均匀带电，电荷面密度分别为 $+\sigma$ 和 $-\sigma$. 试求各个区域的场强分布.

18.一厚度为 $d$ 的无限大平板内均匀带电，电荷体密度为 $\rho$. 试求板内、外的场强分布.

# 第二章 静电场中的导体和电介质

## 第一节 导体和电介质

电磁场对物质的作用和物质对电磁场的响应是一个宏大的研究课题，因为它不仅意味着对电磁场研究的深入，而且意味着对物质电磁性质研究的开始. 本章讨论静电场对物质的作用和物质对静电场的响应，这是对物质电磁性质研究迈出重要的第一步.

静电场何以会对宏观上处处电中性的物质有所作用呢？笼统地说，固体、液体、气体都由分子、原子组成，原子又由带负电的电子和带正电的原子核组成，因此，尽管宏观上处处电中性，但静电场对电子、原子核的相反作用，会使电中性受到破坏，出现某种宏观的电荷分布并产生附加电场. 换言之，静电场对物质作用的内在根据是物质固有的电结构，作用后出现的宏观电荷分布和附加电场是物质对静电场的响应，两者相互影响、相互制约，最终达到平衡. 人们正是通过对相关现象的观察、分析、解释，逐步由表及里地达到对物质电磁性质乃至内在电磁结构的认识.

世间万物，种类繁多，结构性质，差别显著，相关过程，千变万化. 导体和电介质（绝缘体）的区分，为研究静电场对物质的作用和物质的电性质打开了局面.

顾名思义，所谓导体指的是能够导电的物体，即电荷能够转移或传导到各处的物体. 金属、石墨、电解液（酸、碱、盐的水溶液）、人体、地球、电离气体、等离子体等都是导体. 导体所以能够导电，是因为其中存在着大量可以自由移动的电荷——自由电荷. 以金属为例，在金属原子中，原子核对最外层电子（价电子）的作用力较弱，当受到某种影响时，价电子很容易摆脱原子核的束缚，在整个金属中自由运动，成为自由电子，原子中失去价电子的其余部分是带正电的正离子，排列成整齐的点阵，称为晶格（曾称为晶体点阵），自由电子在晶格间做无规则的热运动. 又如，当酸、碱、盐溶于水时，会电离成正离子或负离子，它们就是可在电解液中自由运动的自由电荷.

所以，导体的基本特征是，存在着大量的做无规则热运动的自由电荷，例如，在金属中，自由电子的数密度可达 $10^{22}$ 个/$cm^3$. 当金属本身不带电也不受外电场作用时，自由电子的负电荷与晶格的正电荷在宏观上处处相等，呈电中性. 加外电场后，自由电子受电场力作用，除热运动外，还要相对于晶格做宏观的定向运

动，造成某种宏观的电荷分布并产生附加电场. 附加电场与外电场之和为总电场，它改变了外电场的分布，又将影响自由电子的运动，经过相互影响、相互制约的复杂过程，最终达到平衡.电介质又称绝缘体，是指不导电的物质，其中的电荷被束缚在原子范围内不能宏观移动，称为束缚电荷或极化电荷. 原先宏观上处处电中性的电介质，在外电场的作用下，尽管不存在自由电荷，但被束缚的电子和原子核受力反向，仍然会出现某种宏观的电荷分布.

总之，原先宏观上处处电中性的导体或电介质，在外电场作用下，达到平衡后，会出现某种宏观的电荷分布并产生附加电场，这两种现象分别称为静电感应或极化.（对于导体，如果原先带电，则加外电场并达到平衡后，电荷分布会有所改变，这种现象也称为静电感应.）

就导电性能而言，理想的导体和理想的电介质（绝缘体）是两个极端，实际上许多物体的导电性能介乎其间，静电感应和极化往往并存，但有主次之分. 而且，在一定条件下（例如高温或低温，再例如高电压）导体和绝缘体的导电性能会发生显著的变化，甚至相互转化.

## 第二节 静电场中的导体

### 一、导体的静电平衡条件

因导体内具有大量自由电荷，故导体的静电平衡条件是导体内部的电场强度处处为零，即

$$\boldsymbol{E}_{内}=0. \tag{2.1}$$

**证明** 若静电平衡导体内部某处场强不为零，则该处的自由电荷将受电场力作用移动，表明尚未达到平衡.

$\boldsymbol{E}_{内}=0$ 是讨论导体其他静电平衡性质的出发点.

### 二、静电平衡导体的基本性质

（1）电势分布：静电平衡导体是等势体，导体表面是等势面.

**证明** 在静电平衡导体内部或表面上任取两点 $A$ 和 $B$，其间的电势差 $U_{AB}=\int_A^B \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$，取积分路径沿导体内部，因 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_{内}=0$，故 $U_{AB}=0$.

（2）电荷分布：静电平衡导体内部不存在宏观的净电荷（即电荷体密度处处为零），电荷只分布在导体表面上.

**证明** 若静电平衡导体内部某处存在非零的宏观电荷，则可在导体内作一高斯面将它包围，由高斯定理 $\oint_{(S)} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{(S内)} q\neq 0$. 但因 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_{内}=0$，故 $\oint_{(S)} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=0$，矛盾，前提不成立.

（3）电场强度分布：静电平衡导体表面外附近空间的场强方向与导体表面垂直，场强大小与该处导体表面的电荷面密度 $\sigma$ 成正比，为

$$E_{\text{表面外}}=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \tag{2.2}$$

**证明** 因静电场中电场线与等势面处处正交，因静电平衡导体表面为等势面，故表面外附近任一点的场强方向应与该处导体表面垂直.

为证明(2.2)式，在静电平衡导体表面任取一小面元 $\Delta S$，设该处电荷面密度为 $\sigma$，则面元上带电 $\Delta q=\sigma\Delta S$. 如图 2-1 所示，作扁圆柱形高斯面，其上、下底面均与 $\Delta S$ 平行，面积均为 $\Delta S$，分别在导体外和导体内，侧面与 $\Delta S$ 正交. 由高斯定理，有

$$\begin{aligned}\oint_{(S)}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}&=\iint_{\text{上底面}}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}+\iint_{\text{侧面}}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}+\iint_{\text{下底面}}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\\&=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{(S\text{内})}q=\frac{\sigma\Delta S}{\varepsilon_0}.\end{aligned}$$

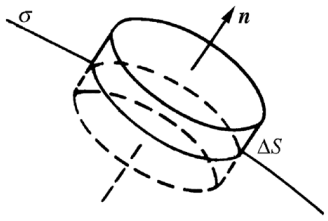



图 2-1 静电平衡导体表面的电荷面密度与场强的关系

因 $\boldsymbol{E}_{\text{内}}=0$，又导体表面外附近的场强方向垂直于导体表面，故通过下底面和侧面的电通量均为零. 又因面元很小，可认为上底面各点场强大小相同，方向与上底面垂直，故有

$$\iint_{\text{上底面}}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iint_{\Delta S}E\cos\theta\,\mathrm{d}S=E\Delta S.$$

由以上两式，即得(2.2)式. 它表明，导体外附近的场强大小由该处的电荷面密度决定，点点对应.

静电平衡导体表面的电荷分布与曲率有关.(2.2)式给出了导体表面上每一点的电荷面密度 $\sigma$ 与导体外该点附近场强大小的点点对应关系，却没有说明导体表面电荷是如何分布的. 的确，这是一个比较复杂的问题. 不难设想，导体表面的电荷分布，除与导体形状有关，还与周围的带电体有关. 对于孤立导体，周围不存在任何带电体，其电荷分布将只取决于导体自身的形状. 大致说来，导体表面各处电荷面密度的大小与该处的表面曲率有关. 如图 2-2 所示，导体表面凸出尖锐处，曲率大，曲率半径小，电荷密集，电荷面密度较大；导体表面较平坦处，曲率小，曲率半径大，电荷稀疏，电荷面密度较小；导体表面凹陷处，曲率为负，电荷面密度更小. 但应注意，孤立导体表面的电荷面密度 $\sigma$ 与该处的曲率之间并不存在单一的函数关系，即并不点点对应. 换言之，某处的 $\sigma$ 不仅与该处导体的形状有关，还与整个导体的形状有关. 以上只是定性的描绘. 在孤立导体具有简单几何形状(如椭球，旋转椭球面，旋转双叶双曲面，旋转抛物面，椭圆柱面，抛物柱面，双曲柱面等)的情形，可通过求解静电学基本微分方程，得出表面电荷分布的定量结果.

应该指出，实际上导体的带电表面层总会有一定厚度，例如，当场强 $E$ 为 $10^9$ V/m 时，感应电荷分布在导体表面厚度约为 $10^{-10}$ m 的范围内. 所以，静电平衡导体的场强分布是从内部的 $E_{\text{内}}=0$ 经表面层逐步增大为表面外的 $E_{\text{表面外}}=\sigma/\varepsilon_0$. 导体的表面性质是很重要的，限于课程性质，不再赘述.

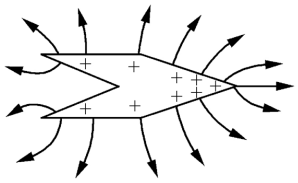


图 2-2　导体表面的电荷分布与曲率有关

## 三、尖端放电及其应用

导体尖端处电荷面密度大，场强也大，如果场强大到足以使周围空气电离，将出现所谓“尖端放电”现象. 尖端放电既有危害，也可利用.

例如，当带电云层接近地面时，由于静电感应，会使地面物体带异号电荷，随着电荷的积累，云层与地面间产生强电场，击穿空气，火花放电，这就是雷击现象. 因通常电荷集中在地面突出物体（如高层建筑，烟囱，大树等）上，雷击对它们的破坏最大. 为避免雷击，利用尖端放电，在建筑物顶上安装避雷针，用粗铜电缆将避雷针通地，通地的一端深埋于潮湿泥土中以保持避雷针与大地电接触良好. 当带电的云层接近时，放电就通过避雷针和通地粗铜导体这条最易导电的通路局部持续不断地进行，以免损坏建筑物.

例如，高压设备电极的尖端放电会在周围笼罩着一层光晕——称为电晕，它使电能消耗在气体分子的电离和发光过程中——称为电晕损耗，为避免这种损失，电极做成光滑圆球，即将高压输电线做得很光滑.

## 四、导体空腔与静电屏蔽

导体空腔的静电平衡性质与实心导体在本质上并无不同，以上结论均有效. 但导体空腔又有其新的特点，使之在静电屏蔽，能精确验证电力与距离平方成反比，以及制造范德格拉夫起电机（静电加速器）等方面获得重要应用.

(1)在静电平衡条件下，若导体空腔内无带电体，则空腔的内表面不带电，电荷只分布在空腔的外表面，空腔内处处场强为零，整个空腔为等势体.

**证明**　如图 2-3 所示，在导体空腔内、外表面之间取高斯面 $S$，因静电平衡时导体内 $\boldsymbol{E}_{内}$ 处处为零，由高斯定理，得

$$\oint_{(S)} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{(S内)} q = 0.$$

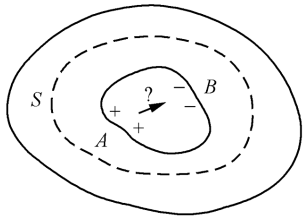



图 2-3　导体空腔内无带电体

可见 $S$ 内即导体空腔内表面上电荷的代数和为零. 这有两种可能：其一，内表面处处不带电；其二，内表面某些部分 $A$ 带正电，某些部分 $B$ 带负电，代数和为零. 若为后者，则从 $A$ 处正电荷发出的电场线只能经空