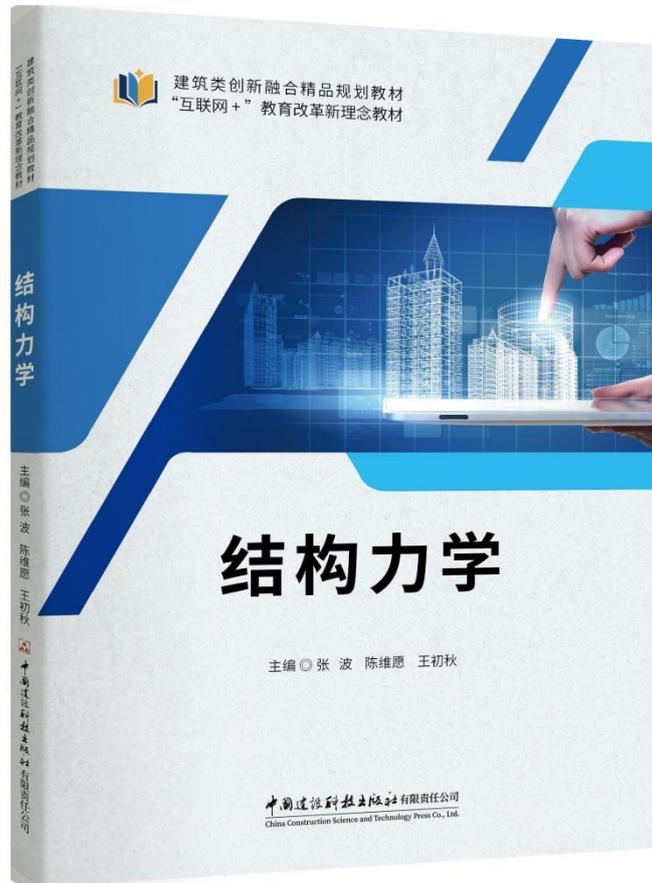


结构力学



类目：建筑类
书名：结构力学
主编：张波 陈维愿 王初秋
出版社：中国建设科技出版社
开本：大 16 开
书号：978-7-5160-4355-4
使用层次：通用
出版时间：2025 年 1 月
定价：59.80 元
印刷方式：双色
是否有资源：有

项目统筹:李亚博
责任编辑:汪永涛
封面设计:旗语书装

建筑类创新融合精品规划教材
“互联网+”教育改革新理念教材



建筑类创新融合精品规划教材
“互联网+”教育改革新理念教材



结构力学

结构力学

结构力学

主编◎张波 陈维愿 王初秋

主编◎张波 陈维愿 王初秋

中国建筑工业出版社有限责任公司

中国建筑工业出版社有限责任公司
China Construction Science and Technology Press Co., Ltd.

专·精·志·远
为您提供专业服务
编辑部:010-63567692
读者服务:010-63567692
网上书店:www.jsgjcs.com



定价:59.80元



建筑类创新融合精品规划教材
“互联网+”教育改革新理念教材



结构力学

主 编 © 张 波 陈维愿 王初秋

中国建设科技出版社有限责任公司
China Construction Science and Technology Press Co., Ltd.

北 京

图书在版编目 (CIP) 数据

结构力学 / 张波, 陈维愿, 王初秋主编. -- 北京 :
中国建设科技出版社有限责任公司, 2025. 1. -- (建筑
类创新融合精品规划教材) (“互联网+” 教育改革新理念
教材). -- ISBN 978-7-5160-4355-4

I. O342

中国国家版本馆 CIP 数据核字第 20246CG997 号

结构力学

JIEGOU LIXUE

张 波 陈维愿 王初秋 主编

出版发行: **中国建设科技出版社** 有限责任公司

地 址: 北京市西城区白纸坊东街 2 号院 6 号楼

邮 编: 100054

经 销: 全国各地新华书店

印 刷: 唐山唐文印刷有限公司

开 本: 889mm×1194mm 1/16

印 张: 16

字 数: 370 千字

版 次: 2025 年 1 月第 1 版

印 次: 2025 年 1 月第 1 次

定 价: **59.80 元**

本社网址: www.jcbs.com, 微信公众号: [zgjcgychs](https://www.jcbs.com)

请选用正版图书, 采购、销售盗版图书属违法行为

版权专有, 盗版必究。本社法律顾问: 北京天驰君泰律师事务所, 张杰律师

举报信箱: zhangjie@tiantailaw.com 举报电话: (010) 63567684

编 委 会

主 编 张 波 陈维愿 王初秋

副主编 陈红荣 马 俐 杨可可 余 洁

前言 PREFACE



本书根据高等学校土木工程学科专业指导委员会最新颁布的《高等学校土木工程本科指导性专业规范》(以下简称“专业规范”)以及教育部颁布实施的《普通高等学校本科专业目录》中所规定的土木工程专业的培养目标、教育部审定的《结构力学课程教学基本要求》编写而成。

本书凝聚了编者多年从事结构力学教学的经验和体会,在编写过程中特别注重应用型人才培养的要求,力争符合目前大多数高校土木工程专业不同专业方向的结构力学课程的教学和社会对人才的需求,并能充分体现“专业规范”的主要精神,便于学生学习。全书以工程实际为背景,注重力学概念的建立,强化力学建模能力和解决工程实际问题能力的培养,力求做到选材适当、语言精练、结构清晰、阐述透彻、重点突出、例题典型、符合认知规律。为了满足教学需要,书中各章都精选了与教学内容相关的思考题,可作为课堂讨论和课后复习之用。本书除有大量基础的例题和习题之外,还选用了一些难度较大的例题和习题,以供有兴趣的读者或者考研究生参考。

本书可作为普通高等教育、成人高等教育、高等教育自学考试“土木工程”专业的教材,也可供有关工程技术人员参考。

本书在编写过程中参阅了多本同类书籍,在此向原作者等一并表示感谢。

限于编者水平,书中存在不妥之处,希望教师和读者提出宝贵意见,以便今后改进。

编者

2024年10月

目 录 CONTENTS



1

绪 论 1

- 1.1 结构力学的研究对象和任务 2
- 1.2 结构的计算简图 3
- 1.3 杆件结构的分类和荷载的分类 6

2

几何组成分析 9

- 2.1 概 述 10
- 2.2 体系的计算自由度 13
- 2.3 平面几何不变体系的基本组成规则 16
- 2.4 平面体系几何组成分析示例 20
- 复习思考题 24

3

静定结构的内力计算 27

- 3.1 静定梁 28
- 3.2 静定平面刚架 36
- 3.3 静定平面桁架 46
- 3.4 组合结构 54
- 3.5 三铰拱 56
- 3.6 静定结构的特性和受力特点 62
- 复习思考题 64

虚功原理和结构的位移计算 71

4.1	位移计算概述	72
4.2	刚体虚功原理及应用	73
4.3	变形体虚功原理及应用	79
4.4	荷载作用下静定结构的位移计算	84
4.5	图乘法计算位移	88
4.6	静定结构由于支座移动引起的位移计算	95
4.7	静定结构由于温度改变及制造误差引起的位移计算	97
4.8	互等定理	100
	复习思考题	103

力 法 106

5.1	超静定结构的概念和超静定次数	107
5.2	力法的基本概念	109
5.3	荷载作用下超静定结构的计算	113
5.4	对称结构的计算	121
5.5	非荷载因素作用下的力法计算	125
5.6	超静定结构的位移计算	129
5.7	超静定结构最后内力图的校核	131
5.8	超静定拱的计算	132
5.9	超静定结构的特性	138
	复习思考题	139

位移法 144

6.1	位移法的基本概念	145
6.2	位移法基本未知量的确定和基本结构	146
6.3	等截面单跨超静定梁的杆端内力	149
6.4	附加约束法的基本原理及位移法典型方程	153
6.5	等截面直杆的转角位移方程	159
6.6	对称性的利用	163
	复习思考题	167

力矩分配法和无剪力分配法 170

- 7.1 力矩分配法基本概念 171
- 7.2 单结点的力矩分配——基本运算 175
- 7.3 多结点的力矩分配——渐进运算 179
- 7.4 无剪力分配法 192
- 复习思考题 199

影响线及其应用 204

- 8.1 移动荷载及影响线的概念 205
- 8.2 静力法作单跨静定梁影响线 206
- 8.3 间接荷载作用下的影响线 212
- 8.4 机动法作静定梁的影响线 217
- 8.5 影响线的应用 222
- 8.6 简支梁的包络图和绝对最大弯矩 229
- 8.7 超静定梁的影响线 233
- 8.8 连续梁的最不利荷载分布及内力包络图 239
- 复习思考题 242

1 绪 论

本章介绍结构力学的研究对象和任务、结构的分类和研究方法；讨论结构的计算简图的简化原则、结点和支座的简化方法；给出杆件结构的分类和荷载的分类。

本章要求学生熟悉结构力学的研究对象和任务。了解结构的计算简图的简化原则及简化要点，能合理对支座和结点进行简化，并能针对具体情况进行具体分析，熟练地画出物体的计算简图。了解杆件结构的分类、荷载的分类。

1.1 结构力学的研究对象和任务



结构力学的研究
对象和任务

1.1.1 结构和结构的分类

在工程中,能承受和传递荷载并起到骨架作用的物体或体系被称为结构,如工业与民用建筑中的桥梁体系、工业厂房、公路桥梁、铁路上的桥梁、立交桥等。结构按几何特征可分为以下三类:

1. 杆系结构

杆系结构是由若干个杆件相互联结而组成的结构。其几何特征是长度方向尺寸远大于其他两个方向的尺寸。梁、刚架、拱和桁架等都是杆系结构。

2. 板壳结构

板壳结构也称薄壁结构。其几何特征是厚度方向尺寸远小于其他两个方向的尺寸。房屋建筑中的楼板、壳体屋盖,飞机和轮船的外壳等属于板壳结构。

3. 实体结构

实体结构也称三维连续体结构。其几何特征是结构的长、宽、高三个方向的尺度大小相仿。重力式挡土墙和水工建筑中的重力坝等属于实体结构。

1.1.2 结构力学的任务和研究方法

结构力学作为力学的一个分支,其研究对象甚广。本书仅限于研究由杆件所组成的平面体系,即平面杆件结构。以此为研究对象的结构力学称为杆系结构力学,也称为经典结构力学。

结构力学是研究结构的合理形式以及结构在受力状态下内力、变形、动力反应和稳定性等方面规律的学科。其研究的目的是使结构满足安全性、适用性和经济方面的要求。

结构力学的基本任务包括以下四个方面:

- (1) 研究结构组成规律与合理形式,保证结构组成合理,能够承担荷载并保持平衡。
- (2) 研究结构内力与变形的计算原理和计算方法——强度和刚度,也是本课程的重要内容。
- (3) 研究结构的整体稳定和动力荷载作用下的计算原理和计算方法。
- (4) 了解各类结构的受力性能和特点,选取合理的结构类型,以利结构设计。

结构力学有各种计算方法,但都必须满足以下三个基本条件:

- (1) 力系的平衡条件。结构的整体或结构的一部分(如一部分杆件、杆件的一部分及杆件的结点等)都应满足力系的平衡条件。
- (2) 变形连续条件。一方面是指结构的杆件发生各种变形后仍是连续的,没有重叠或缝隙;另一方面指结构发生变形和位移后,仍应满足结构的支座和结点的约束条件。

(3) 物理条件。即把结构的应力和应变通过物理方程联系起来,如轴向应力和轴向应变、剪切应力和剪切应变、弯曲应力和弯曲应变之间都应满足相应的物理方程。

结构力学的计算问题分为静定和超静定两类:静定问题只需考虑平衡条件,而超静定问题还需考虑变形连续条件和物理条件。

1.2 结构的计算简图

1.2.1 简化原则

一个实际结构的受力情况往往是很复杂的,在计算时不可能采用实际结构,同时也是不必要的,因而在结构力学的计算中一般采用一个简化的结构图形代替实际结构。这种简化了的结构图形称为结构的计算简图,计算简图的选择原则如下:

(1) 保留主要因素,使计算简图能反映实际结构的主要受力特征。因此,在选择计算简图以前,应搞清结构杆件之间或杆件与基础之间实际连接构造,以保证计算的可靠性和必要的精确性。

(2) 略去次要因素,便于计算。结构的实际构造是很复杂的,必须分清主次,略去次要因素使计算简图便于计算。

因此,选取计算简图是结构受力分析的基础,是非常重要的。

1.2.2 简化要点

1. 结构体系的简化

杆系结构可分为平面杆系结构和空间杆系结构两大类。实际结构一般都是空间结构,各部分相互连接成为一个空间整体,以承受各个方向可能出现的荷载。但在多数情况下,常可以忽略一些次要的空间约束而将实际结构分解为平面结构,使计算得以简化。本书主要讨论平面结构的计算问题。

2. 杆件的简化

杆件的宽度、厚度通常比杆件长度小得多,因此,在计算简图中,杆件可用其轴线表示,杆件之间的连接区用结点表示,杆长用结点间的距离表示,荷载的作用点也转移到轴线上。

3. 结点的简化

结构中杆件与杆件之间的相互连接处称为结点。木结构、钢结构和混凝土结构的结点,具体构造形式不尽相同,其结点的计算简图常可归纳为以下两种类型:

(1) 铰结点。铰结点的机动特征是各杆之间不能相对移动,但可以绕铰结点做自由转动。受力特征是能承受和传递力,但不能承受和传递力矩。如图 1-1(a) 所示木屋架的结点,由于各杆件之间是通过螺栓、耙钉连接的,无法阻止杆件间的微小转动,因此该结点应简化为铰结点。

(2) 刚结点。刚结点的机动特征是各杆之间不能相对移动,也不能相对转动,即在刚结点处各杆之间的夹角在变形前后保持不变。受力特征是既能承受和传递力,又能承受和传递力矩。如图 1-1(b) 所示现浇钢筋混凝土框架的结点,由于梁、柱的钢筋是绑扎在一起的,又用混凝土一次浇灌成型,杆件间是无法发生相对位移的,因此该结点可以简化成刚结点。

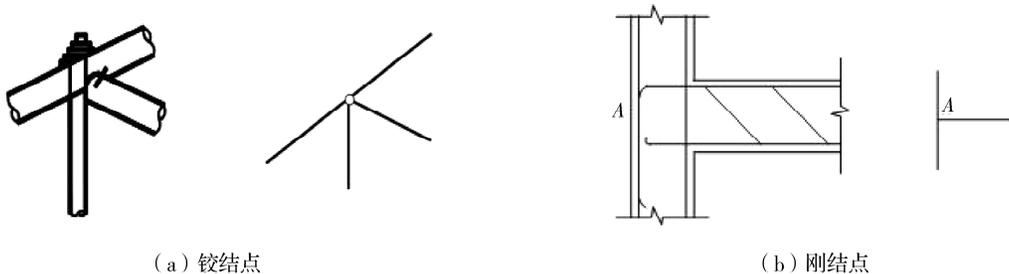
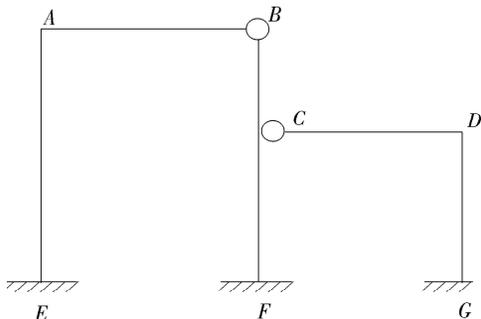


图 1-1 节点的简化

在同一结点上,部分刚结,部分铰结,称为组合节点,又称不完全铰结点或半铰结点。如图 1-2 所示 C 节点为组合节点,其中杆 BC 与杆 CF 为刚结,杆 CD 与杆 BF 为铰结。

图 1-2 组合节点 C

4. 支座的简化

结构与基础相联结的部分称为支座。结构所受的荷载通过支座传递给基础和地基。支座对结构的反作用力称为支座反力。平面结构的支座形式主要有以下四种类型:

(1) 活动铰支座。如图 1-3(a) 所示,活动铰支座的机动特征是杆端可以绕 A 点转动,且可沿以 B 为圆心、 AB 为半径的圆弧微小移动,但不能有竖向移动。支座反力特征是没有反力矩,没有水平支座反力,只有竖向支座反力。计算简图可以用一根垂直于支承面的链杆表示。

(2) 固定铰支座。如图 1-3(b) 所示,固定铰支座的机动特征是杆端可以绕铰中心 A 转动,不能有水平方向和竖直方向移动。支座反力特征是没有反力矩,有水平方向和竖直方向支座反力。这种支座的计算简图可用交于 A 点的两根支承链杆来表示。

(3) 固定支座。如图 1-3(c) 所示,固定支座的机动特征是杆端的水平方向移动、竖直方向移动和转动都受到限制。支座反力特征是有水平方向、竖直方向支座反力和反力偶。

(4) 定向支座。如图 1-3(d) 所示,定向支座的机动特征是杆端沿一个方向上的移动和转动都受到限制,但允许结构在另一个方向上有滑动的自由。支座反力特征是有垂直于支承面的一个反力和一个反力偶。计算简图可用垂直于支承面的两根平行链杆表示。

由以上结点和支座的机动特征和受力分析可以看出,约束的机动特征和受力分析是紧密相



支座的简化

应的。凡结点或支座沿某一方向的位移或运动受到约束,则结点或支座具有该方向的约束力(支座反力);凡结点或支座沿某一方向可以自由位移或运动,则它们沿该方向的约束力(支座反力)为零。

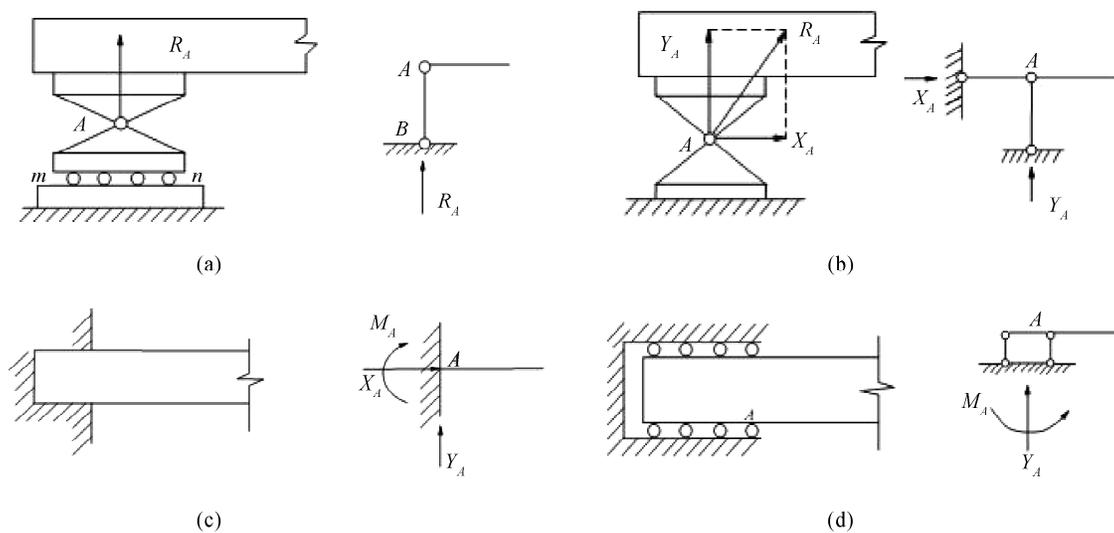


图 1-3 支座的简化

5. 材料性质的简化

在土木工程中结构所用的建筑材料通常为钢、混凝土、砖、石、木料等。在结构计算中,为了简化,对组成各构件的材料一般都假设为连续的、均匀的、各向同性的、完全弹性或弹塑性的。

6. 荷载的简化

结构承受的荷载可分为体积力和表面力两大类。体积力指的是结构的重力或惯性力等;表面力则是由其他物体通过接触面传给结构的作用力,如土压力、车辆的轮压力等。在计算简图中将杆件简化为轴线,因此无论是体积力还是表面力,都可以被简化为作用在杆件轴线上的力。荷载按其分布情况可简化为集中荷载和分布荷载。

初学者应对一般结构计算简图的选取有初步的了解;重点应掌握结构杆件之间连接的结点和杆件与基础连接的支座的计算简图。

1.2.3 结构计算简图示例

图 1-4(a) 为一工业厂房结构示意图。该厂房是钢筋混凝土厂房,梁和柱都是预制的。柱子下端插入基础的杯口内,然后用细石混凝土填实。梁与柱的连接是将梁端和柱顶的预埋钢板进行焊接而实现的。在横向平面内柱与梁组成排架,如图 1-4(b) 所示,各个排架之间,在梁上有屋面板连接,在柱的牛腿上有吊车梁连接。

该厂房是由许多排架用屋面板和吊车梁连接起来的空问结构,但各排架在纵向以一定的间距有规律地排列着。作用于厂房上的荷载,如恒载、雪载和风载等一般是沿纵向均匀分布的,通常可把这些荷载分配给每个排架,而将每一排架看作一个独立的体系,于是该厂房结构就由纵向构件组成的空问结构简化为由一系列屋架、柱和基础组成的平面单元,如图 1-4(b) 所示。另外,梁和柱都可用它们的几何轴线来代表,是因为梁和柱的截面尺寸比长度小得多,轴线都可近

似地看作直线。另外梁和柱的连接只依靠预埋钢板焊接,梁端和柱顶之间虽不能发生相对移动,但仍有发生微小相对转动的可能,因此可取为铰结点。柱底和基础之间如果填充细石混凝土或者现浇则可以认为不能发生相对移动和相对转动,因此柱底可取为固定端。通过简化,该厂房可采用图1-4(c)所示的计算简图,此类结构称为铰结排架,是单层工业厂房常用的一种结构形式。

从以上分析可知,简化采用了以下的做法:

- (1) 杆件的简化:屋架的杆件(梁和柱)用轴线表示。
- (2) 结点的简化:屋架杆件之间的结点简化为铰结点。
- (3) 支座的简化:柱子和基础之间简化为固定支座,屋架的两端通过钢板焊接在柱上,可将其端点分别简化为铰支座和滚轴支座。
- (4) 结构体系的简化:将空间结构体系简化为平面结构体系。
- (5) 荷载的简化:屋面荷载通过屋面板的4个角点以集中力的形式作用在屋架弦上。

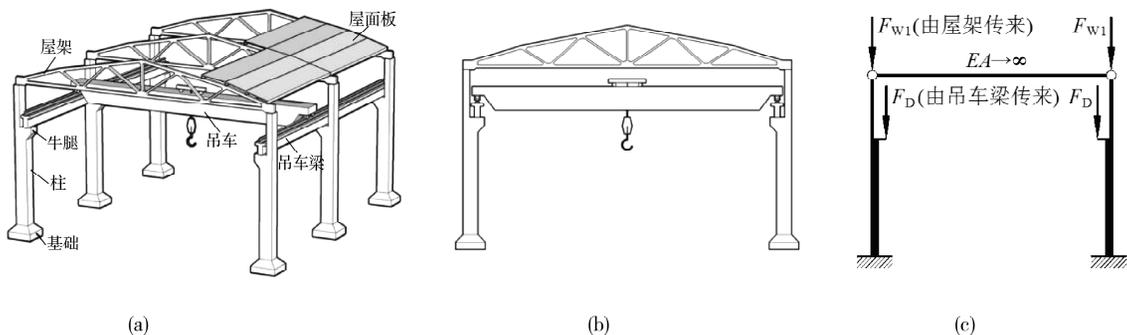


图 1-4 单层工业厂房结构形式

结构计算简图的选择十分重要,又很复杂;需要选择者有较多的实际经验,并善于判断各种不同因素的相对重要性。对一些新型结构,往往要通过多次的实验和实践,才能获得比较合理的计算简图;但对常用的结构形式,已有前人积累的经验,可以直接取其常用的计算简图。所以,选择结构计算简图的能力是在本课程、后继结构课程以及长期工程实践中逐步形成的。

1.3 杆件结构的分类和荷载的分类

1.3.1 杆件结构的分类

1. 按组成特点和受力特点分类

(1) 梁。梁的组成特点是轴线通常为直线。受力特点是在竖向荷载下无水平支座反力,内力有弯矩、剪力。梁可以是单跨的,也可以是多跨的,如图1-5(a)所示。

(2) 拱。拱的组成特点是轴线为曲线。受力特点是在竖向荷载下有水平支座反力,从而可以减小拱截面上的弯矩。内力有弯矩、剪力及轴力,如图1-5(b)所示。

(3) 刚架。刚架的组成特点是由梁、柱等直杆组成,结构中包含刚结点。受力特点是内力有弯矩、剪力、轴力,以弯矩为主,如图1-5(c)所示。



杆件结构的分类

(4) 桁架。桁架的组成特点是由直链杆用铰结点连接而成。受力特点是荷载作用于结点时,各杆只受轴力,如图 1-5(d) 所示。

(5) 组合结构。组合结构的组成特点是由梁式杆和链杆组成。受力特点是梁式杆有弯矩、剪力、轴力,链杆只受轴力,如图 1-5(e) 所示。

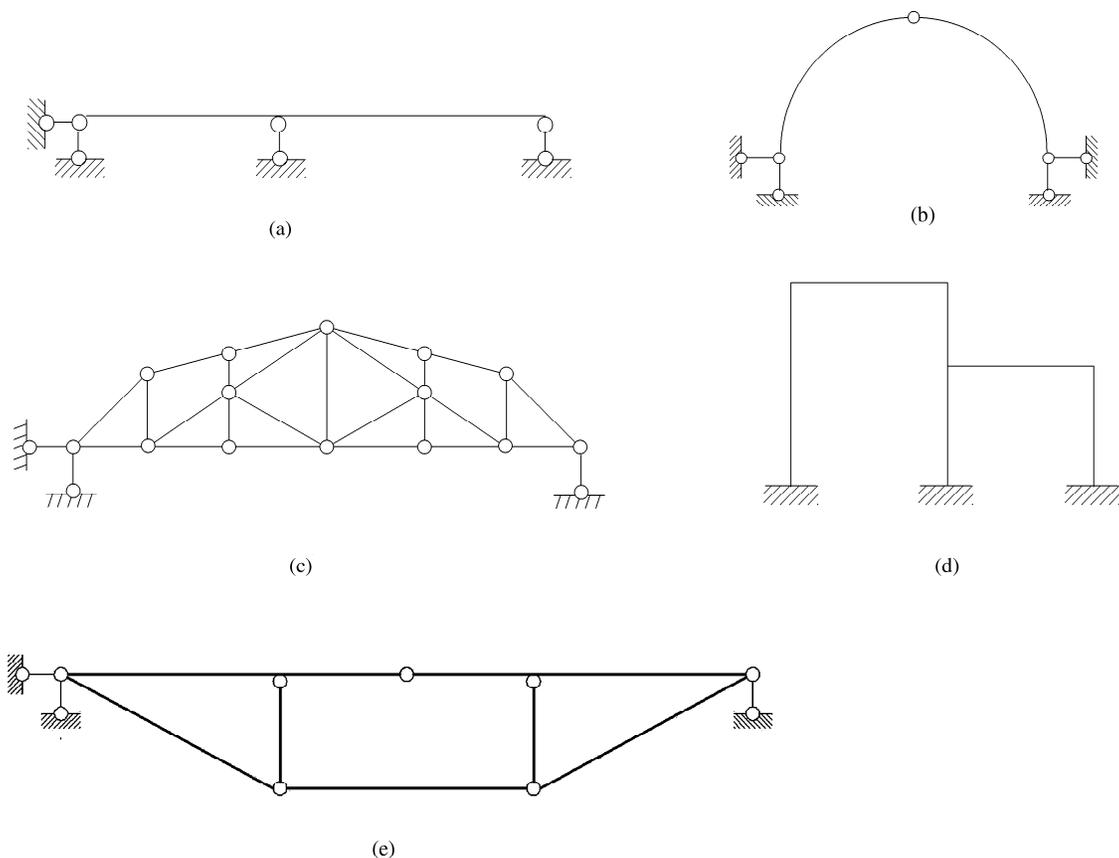


图 1-5 杆件结构的类型

2. 按计算特点分类

- (1) 静定结构:用静力平衡条件可以唯一确定全部支座反力和内力,如图 1-6 所示。
- (2) 超静定结构:不能由静力平衡条件确定全部支座反力和内力,如图 1-7 所示。

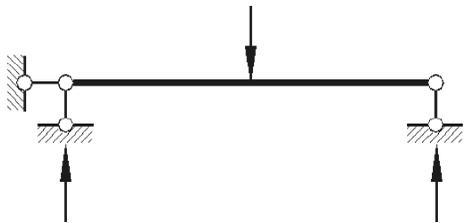


图 1-6 静定结构

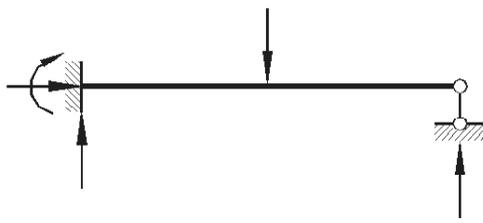


图 1-7 超静定结构

3. 按杆件和荷载在空间位置分类

- (1) 平面结构:各杆件的轴线和荷载都在同一平面内,如图 1-8 所示。
- (2) 空间结构:各杆件的轴线和荷载其中之一不在同一平面内,如图 1-9 所示。

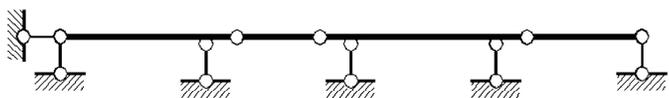


图 1-8 平面结构

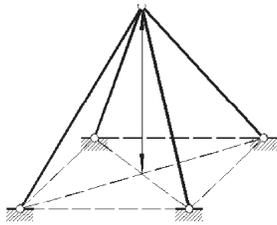


图 1-9 空间结构

1.3.2 荷载的分类

荷载是主动作用于结构的外力。

(1) 根据作用时间的永久、暂时,可分为以下几类。

- 1) 恒载(不变荷载):恒载是永久作用于结构上的荷载,如结构自重、固定设备质量。
- 2) 活载(可变荷载):活载是暂时作用在结构上的荷载,又分为可动荷载和移动荷载。可动荷载能作用于结构上的任意位置,如人群、雪载、风载;移动荷载互相平行、间距不变,能在结构上移动,如列车荷载、吊车荷载。

(2) 根据荷载作用的位置是否变化,可分为以下几类。

- 1) 固定荷载:固定荷载是作用位置不变的荷载,如恒荷载以及风雪等部分活荷载。
- 2) 移动荷载:移动荷载是作用位置变化的荷载,如汽车、火车、吊车等荷载。

(3) 根据荷载作用的性质,可分为以下几类。

- 1) 静力荷载:荷载的大小、方向和位置不随时间变化的荷载(包括只考虑位置改变、不考虑动力效应的荷载),对结构不产生显著的振动,如恒载等。
- 2) 动力荷载:荷载随时间迅速变化的荷载,对结构产生显著的振动。如机械转动时的荷载、地震作用、冲击波等。

除荷载外,还有其他一些因素也可以使结构产生内力或位移,如温度变化,支座沉陷,制造误差,材料收缩以及松弛、徐变等。这些因素也可视为广义荷载。

2

几何组成分析

本章主要研究平面杆系结构几何组成,即解决怎样组成的杆系才能承受荷载这个基本问题。杆系结构由若干杆件与地基以链杆、铰或刚结点连接而成,杆件的组成形式不仅决定其是否能承担荷载,也将影响其力学性能和分析方法。本章通过介绍杆系结构自由度的概念和基本组成规则,使学生在进行结构体系受力、变形分析之前,了解平面杆系结构几何组成分析的目的、方法和步骤。

本章重点:掌握几何不变体、几何可变体、自由度、约束、瞬铰、必要约束、多余约束、静定结构和超静定结构等基本概念;理解无多余约束几何不变平面杆件体系的基本组成规律;熟练运用组成规律完成各种复杂杆件体系的几何组成分析。

2.1 概述

实际工程结构中,杆件结构一般是由若干根杆件通过结点间的连接及与支座的连接组成的。结构是用来承受荷载的,首先必须保证结构的几何构造是合理的,即它本身应该是稳固的,可以保持其几何形状的稳定。一个几何不稳固的结构是不能承受荷载的,如图 2-1(b) 所示体系,由于内部的组成不健全,即使受到很小的扰动,结构也会产生较大的形状改变。

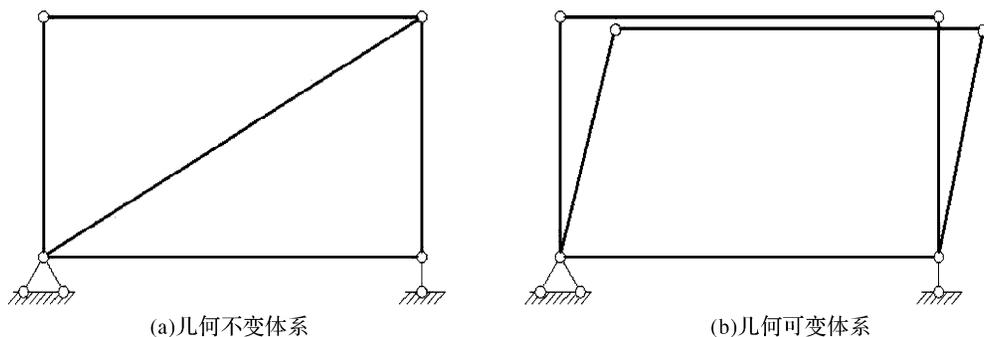


图 2-1 几何不变体系和几何可变体系

平面杆系结构几何组成分析的目的在于:判断结构有无保持自身形状和位置的能力;研究几何不变体系的组成规律;为区分静定结构和超静定结构及进行结构内力分析打下必要的基础。

2.1.1 几何不变体系和几何可变体系

杆件结构在任意荷载作用下,若不计其材料应变,体系的几何形状和位置保持不变,则称之为几何不变体系,如图 2-1(a) 所示。反之,称为几何可变体系,如图 2-1(b) 所示。

显然,只有几何不变体系可作为结构,而几何可变体系是不可以作为结构的。因此在选择或组成一个结构时必须掌握几何不变体系的组成规律。

2.1.2 自由度 S

判断一个体系是否可变,涉及体系运动自由度的问题。物体或体系运动时,可以独立改变的几何参量的个数,称为该物体或体系的自由度。换句话说,一个物体或体系的自由度就是它运动过程中可以独立改变的坐标个数。

(1) 点的自由度。点在平面内有两种独立运动的方式,其自由度 $S = 2$,即图 2-2(a) 中所示点的独立运动参量 (x, y) 。

(2) 刚片的自由度。刚片是平面中几何形状不变的部分。因在讨论体系的几何组成时不考虑材料的应变,因此平面内一根梁、一根柱、一根链杆,甚至体系中已被确定的几何不变部分,均可看作一个刚片。



自由度 S



图 2-2(b) 为平面内一个刚片。刚片在平面内有三种独立运动的方式,其自由度 $S = 3$,即图 2-2(b) 中所示刚片的独立运动参量 (x, y, β) 。

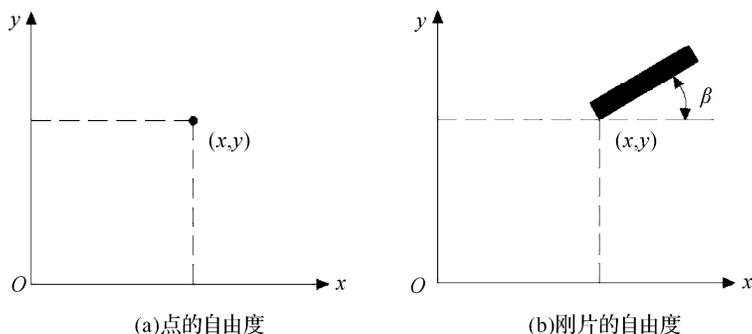


图 2-2 平面体系的自由度

2.1.3 约束

约束指限制物体或体系运动的各种装置,分外部约束(体系与基础之间的联系,即支座)和内部约束(体系内部各杆件或结点之间的联系)两种。体系的自由度会因加入限制运动的装置而减少,因此约束即为减少体系运动自由度的装置。常见的约束装置有以下几种类型。

(1) 链杆。平面中的一个链杆可减少一个自由度,相当于一个约束,如图 2-3 所示。

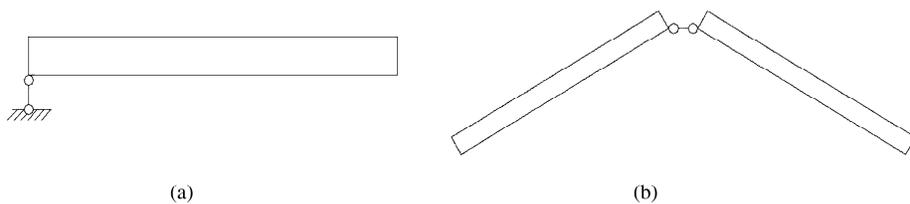


图 2-3 链杆约束

(2) 单铰。一个单铰,可以减少两个自由度,相当于两个约束,如图 2-4 所示。

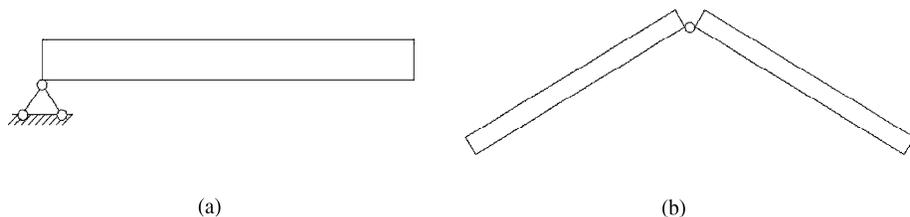


图 2-4 单铰约束

(3) 复铰。复铰为连接两个及两个以上刚片的铰,如图 2-5 所示。连接 n 个刚片的复铰,相当于 $n-1$ 个单铰。

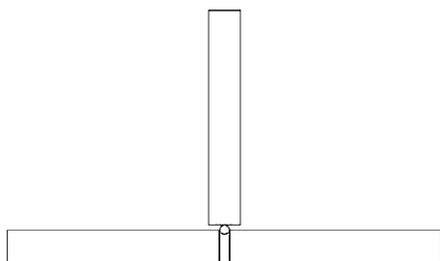


图 2-5 复铰约束



(4) 单刚结点。一个单刚结点能减少 3 个自由度, 相当于 3 个约束, 如图 2-6(a) 所示。

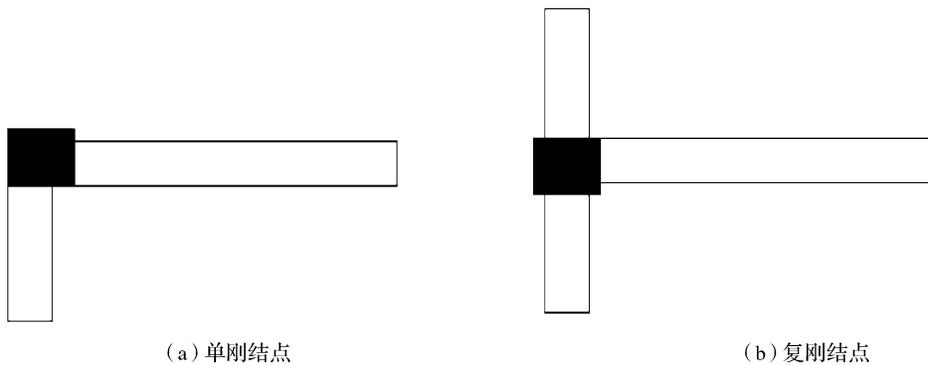


图 2-6 刚结点

(5) 复刚结点。复刚结点是指连接两个以上刚片的刚结点, 如图 2-6(b) 所示。连接 n 个刚片的复刚结点, 相当于 $n-1$ 个单刚结点。

2.1.4 必要约束和多余约束

保证体系几何不变所需的最少的、合理的约束称为必要约束; 相反除必要约束以外的约束就称为多余约束。多余约束的存在不减少体系的自由度。

2.1.5 瞬变体系

瞬变体系指原来为几何可变的体系, 经微小位移后又成为几何不变的体系。如图 2-7 所示, 两个刚片用 3 根互相平行但不等长的链杆连接, 为几何可变体系。但当刚片 I 相对刚片 II 发生一个微小的位移 Δ 后, 由于 $\beta_1 \neq \beta_2 \neq \beta_3$ ($\beta_1 = \frac{\Delta}{L_1}, \beta_2 = \frac{\Delta}{L_2}, \beta_3 = \frac{\Delta}{L_3}$), 三根链杆不再平行或交于一点。也就是说当两个刚片发生了微小的相对运动后, 体系成为几何不变体系, 这样的体系称为瞬变体系。

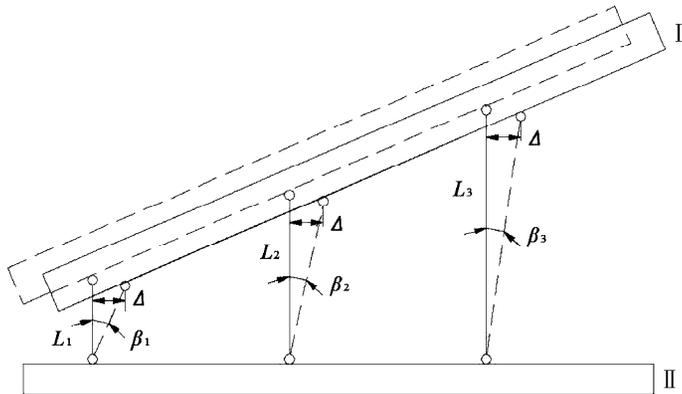


图 2-7 瞬变体系

2.2 体系的计算自由度



计算自由度的概念

2.2.1 计算自由度的概念

为了能对结构体系的几何组成分析进行量化,引入计算自由度 w 的概念。在给出计算自由度 W 的定义前,先给出自由度 S 的算法。假设结构体系中约束都不存在,各构件的自由度总和为 a ;再确定结构体系的必要约束个数为 c ,则结构体系的自由度

$$S = a - c \quad (2-1)$$

在使用式(2-1)前必须区分必要约束和多余约束,这往往很困难。为了回避这个困难,构造一个新的参数,即计算自由度 W 。

$$W = a - d \quad (2-2)$$

式中, d 为体系中全部约束个数。

引进计算自由度 W 避免了研究哪些约束是多余约束的难题。

由于多余约束和必要约束 c 之和即为全部约束 d , 所以有:

$$S - W = d - c = m \quad (2-3)$$

式中, m 为体系中多余约束的个数。

式(2-3)描述了计算自由度 W 、自由度 S 和多余约束数 m 三者之间的关系。

由式(2-2)、式(2-3)可以得到关于计算自由度 W 求解的两种具体过程。

1. 将结构体系看作由刚片和约束组成

以刚片为体系中的运动主体, p 表示体系中刚片的个数, 则刚片的总自由度为 $3p$ 。以 g 代表单刚结点的个数(复约束应事先拆成单约束), h 代表单铰结点个数, b 代表单链杆个数(计入支承链杆), 则总的约束个数为 $3g + 2h + b$ 。体系的计算自由度

$$W = 3p - (3g + 2h + b) \quad (2-4)$$

2. 将体系看作由结点受链杆的约束组成(全铰接体系)

以 j 代表结点个数, b 代表单链杆个数(计入支承链杆), 则体系的计算自由度

$$W = 2j - b \quad (2-5)$$

由式(2-4)、式(2-5)算出的 W 值可能为正、负或零。因此, 根据计算得出的 W 值还不能确定自由度 S 和多余约束 m 的确切值, 但可以得出它们的差值 $S - m = W$, 从而得出定性结论, 见表 2-1。

表 2-1 计算自由度与几何组成性质的关系

W 的数值	几何组成性质
$W > 0$	体系是几何可变的
$W = 0$	若无多余约束则为几何不变; 如有多余约束则为几何可变
$W < 0$	体系有多余约束且 $m = -W$ 。若体系为几何不变的, 则为超静定结构

$W \leq 0$ 结构体系不一定几何不变, 因为尽管约束数目足够多甚至还有多余, 但若布置不当, 则仍可能是可变的。因此, $W \leq 0$ 只是几何不变体系的必要条件, 还不是充分条件。

如图 2-8(a)、图 2-8(b)、图 2-8(c) 所示为 $W = 0$ 情况; 图 2-8(d)、图 2-8(e)、图 2-8(f) 所示为 $W = -1$ 情况, 除图 2-8(a)、图 2-8(d) 外, 其他均为几何可变体系。

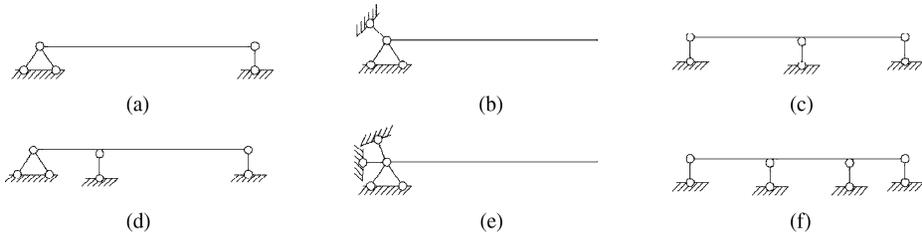


图 2-8 $W \leq 0$ 情况示例

2.2.2 算例

例 2-1 计算如图 2-9 所示体系的计算自由度。

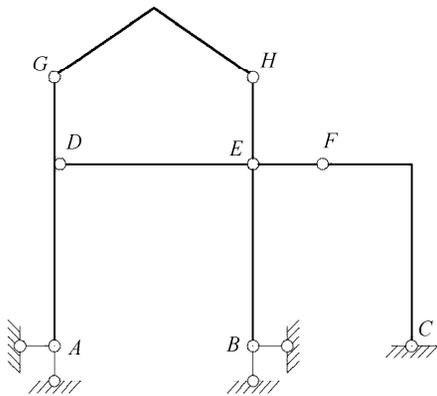


图 2-9 例 2-1 图

【解】如图 2-9 所示, AG 、 GH 、 DE 、 HE 、 BE 、 EF 、 FC 可以分别看作刚片, 所以体系的刚片数 $m = 7$, 单刚结点数 $g = 0$, 7 个刚片之间全部由铰结相连, 除结点 E 为复铰, 相当于 3 个单铰外, 其余结点 D 、 F 、 G 和 H 都是单铰, 故 $h = 7$ 。3 个固定铰支座, 相当于 6 根链杆, $b = 6$ 。因此, 由式 (2-5) 可得:

$$W = 3m - (3g + 2h + b) = 3 \times 7 - (3 \times 0 + 2 \times 7 + 6) = 1$$

表明此体系具有一个自由度, 为几何可变体系。

例 2-2 计算图 2-10(a) 所示体系的计算自由度。

【解】把图 2-10(a) 所示体系的全部支座去掉以后, 剩下的是一个内部有多余约束的刚片。如果再在截面 G 处切开, 这样才变为无多余约束的刚片, 如图 2-10(b) 所示。按式 (2-4) 计算, 刚片数 $m = 1$, 链杆数 $b = 4 + 6$, 铰结点数 $h = 0$, G 处的单刚结点数 $g = 1$, 因此:

$$W = 3m - (3g + 2h + b) = 3 \times 1 - (3 \times 1 + 2 \times 0 + 10) = -10$$

由于该体系为几何不变的, 其自由度 S 为零, 因此由式 (2-3) 可以求出多余约束数

$$n = S - W = 0 - (-10) = 10$$

该结构为具有 10 个多余约束的几何不变体系。

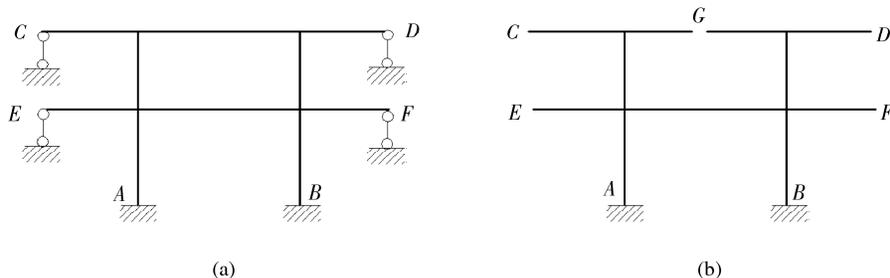


图 2-10 例 2-2 图

例 2-3 计算图 2-11 所示体系的计算自由度。

【解】在该体系中, D 、 E 两处除了应该算作结点外, 同时还要考虑它们都是固定铰支座。因此, 体系的结点总数 $j = 5$, 链杆数为 4, 支座链杆数为 6, 故单链杆总数 $b = 10$, 故由上式可得:

$$W = 2j - b = 2 \times 5 - 10 = 0$$

表明此体系的计算自由度等于零。此体系显然为几何不变体系, 可知自由度 $S = 0$ 。所以多余约束 $n = S - W = 0$ 。

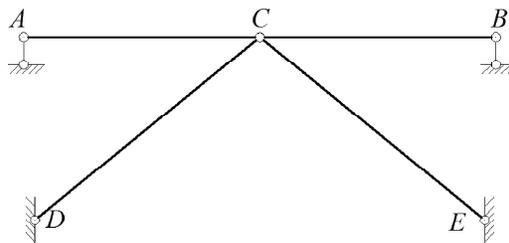


图 2-11 例 2-3 图

显然, 除这两种算法外, 还可以采用混合法。这时, 计算公式为:

$$W = (3p + 2j) - (3g + 2h + b)$$

例 2-4 计算图 2-12(a) 所示体系的计算自由度。

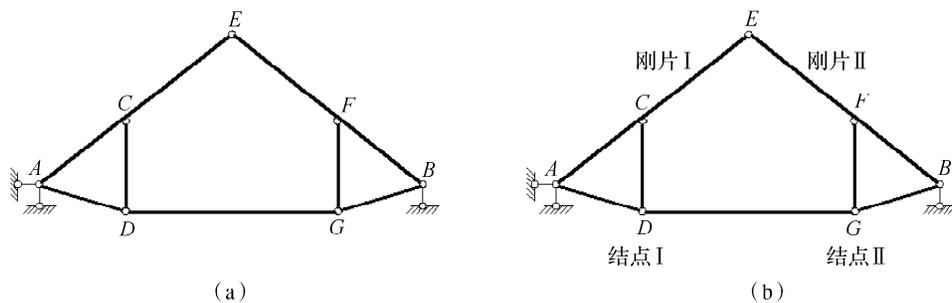


图 2-12 例 2-4 图

【解】在该体系中, 我们把 AEB 部分看作刚片系, 杆 AE 和 BE 分别为刚片 I 和刚片 II, 余下部分作为结点系, 有两个结点, 结点 1 和结点 2, 如图 2-12(b) 所示。则 $m = 2$, $j = 2$, 没有刚结点, 所以 $g = 0$ 。铰 E 为单铰, $h = 1$ 。结点系中有 8 根单链杆, $b = 8$ 。故由混合法公式可得:

$$W = (3m + 2j) - (3g + 2h + b) = (3 \times 2 + 2 \times 2) - (3 \times 0 + 2 \times 1 + 8) = 0$$

可知, 体系的计算自由度为零。

2.3 平面几何不变体系的基本组成规则

上述关于计算自由度的讨论,无法明确给出结构体系是否几何不变的结论。因此,本节讨论无多余约束的几何不变体系的基本组成规则,这是几何组成分析的基础。

2.3.1 基本组成规则

1. 一个点与单个刚片之间的连接方式

规律一 一个刚片与一个点以两根链杆相连,且3个铰不在一条直线上,则组成几何不变体系,并且没有多余约束(图2-13)。

将图2-14所示的部分称为二元体,则规律一也可以表述为“在一个刚片上加上1个二元体,仍为无多余约束的几何不变体系”或“在结构体系中加上或去掉1个二元体,不改变原结构体系的几何组成性质”,这一规律称为二元体法则。

利用二元体法则,可以组成所需的几何不变体系,如图2-15所示。

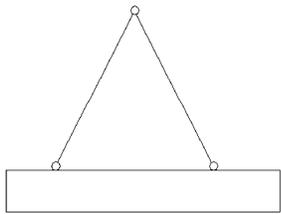


图 2-13 点与刚片连接

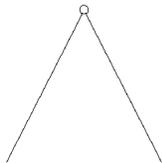


图2-14 二元体

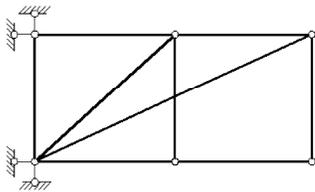


图 2-15 几何不变体系

2. 两个刚片之间的连接方式

在图2-13中,若将其中一根链杆看作刚片,则结构体系如图2-16所示。这时二者在几何组成性质上是等价的,即图2-16所示结构也为无多余约束的几何不变体系。于是,我们可以得到以下规律:

规律二 两个刚片用一个铰和一根链杆相连接,且3个铰不在一条直线上,则组成几何不变体系,并且无多余约束。这一规律称为两刚片法则。

前面说过:一根链杆相当于一个约束,一个单铰相当于两个约束,因此一个单铰可以用两根链杆来代替。于是,图2-16与图2-17的结构在几何组成性质上是等价的。因此,两刚片法则又可以描述如下:

规律三 两刚片用3根不全平行也不交于同一点的链杆相连,则组成几何不变体系,并且无多余约束。

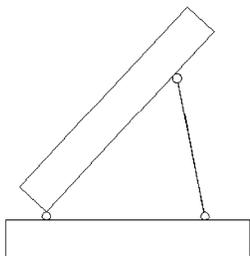


图 2-16 两刚片法则

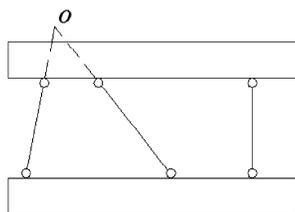
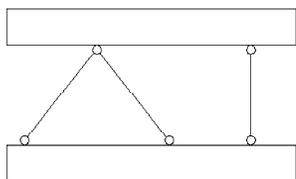


图 2-17 两刚片法则

3. 三个刚片之间的连接方式

在图 2-13 中,若将结构中的两根链杆均被看作刚片,如图 2-18 所示,这样的结构体系依然为无多余约束的几何不变体系。于是可以得到以下规律:

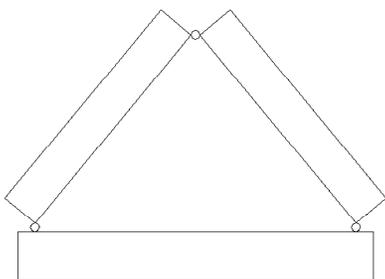


图 2-18 三刚片法则

规律四 三个刚片用 3 个单铰两两相连,且 3 个单铰不在一条直线上,则组成几何不变体系,并且无多余约束。这一规律称为三刚片法则。

以上四条规律,实际上可以归纳为一个基本规律——三角形规则,即一个铰结三角形,如果三个铰不共线,则其形状不变且没有多余约束。

2.3.2 瞬变体系

当上述四条规律中的部分条件不能成立则结构体系几何可变,在几何可变体系中还存在瞬变体系。

(1) 两个刚片用 3 根互相平行的链杆相连。

若 3 根链杆不等长,如图 2-7 所示,由 2.1 节中的内容可知其为瞬变体系。若连接两刚片的 3 根链杆既互相平行又等长,则体系是可变的,如图 2-19 所示。

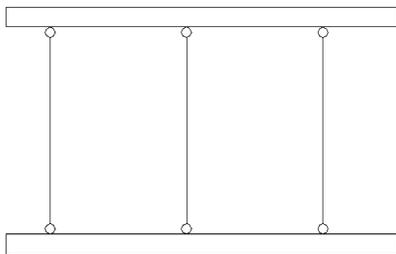


图 2-19 几何可变体系



瞬变体系

(2) 两个刚片用 3 根链杆连接, 三根链杆(或其延长线) 交于一点。

图 2-20 中 3 根链杆的延长线交于点“ O ”, 两刚片在瞬间就会发生绕点“ O ”的相对转动, 但是在短暂的运动发生以后, 3 根链杆的延长线不再交于一点, 体系成为几何不变。这样的体系为瞬变体系, “ O ” 称为虚铰或瞬铰。若 3 根链杆直接交于点“ O ”, 如图 2-21 所示, 则形成常变体系, 此时“ O ” 称为实铰。

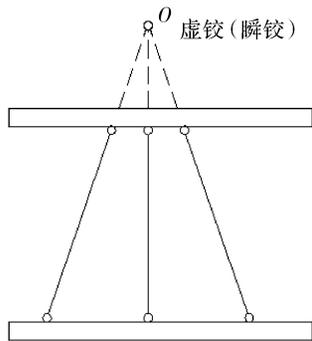


图 2-20 瞬变体系

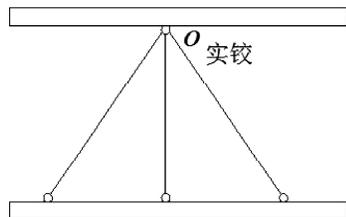


图 2-21 常变体系

(3) 三刚片用 3 个在一条直线上的单铰两两连接。

图 2-22 中, 两刚片(I、II) 在点 C 可沿公共切线有共同的微小运动趋势, 但运动发生以后, 3 个铰不再共线, 体系成为几何不变体系, 这一结构为瞬变体系。

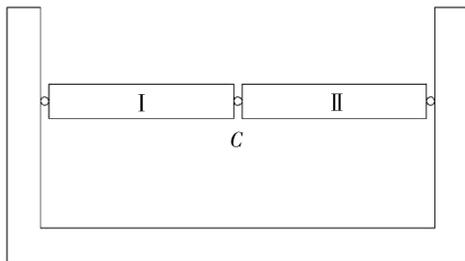
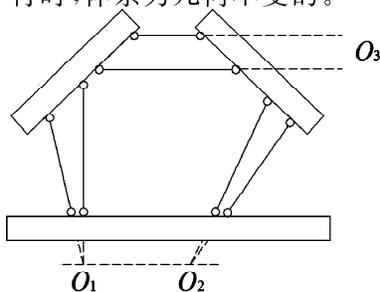


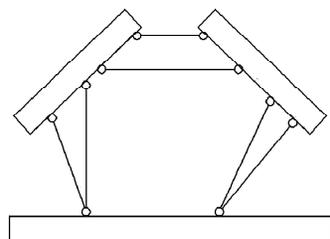
图 2-22 瞬变体系

(4) 三刚片用 3 对链杆连接。

1) 一对平行链杆(一个无穷远虚铰)。图 2-23(a) 中, 两虚铰(O_1 、 O_2) 的连线与组成无穷远虚铰(O_3) 的两根链杆平行, 体系是瞬变的。若两虚铰变成两实铰, 如图 2-23(b) 所示, 且连线与组成无穷远虚铰的链杆平行, 体系也是瞬变的。仅当两铰(实铰或虚铰) 的连线与组成无穷远虚铰的链杆不平行时, 体系为几何不变的。



(a) 两虚铰连线与组成无穷远虚铰的两链杆平行



(b) 两实铰连线与组成无穷远虚铰的两链杆平行

图 2-23 一对平行链杆



2) 两对平行链杆。组成无穷远虚铰的两对链杆互相平行不等长,体系是瞬变的,如图 2-24(a) 所示。组成无穷远虚铰的两对链杆互相不平行,体系是几何不变的,如图 2-24(b) 所示。若组成无穷远虚铰的两对链杆互相平行且等长,结构为常变体系。

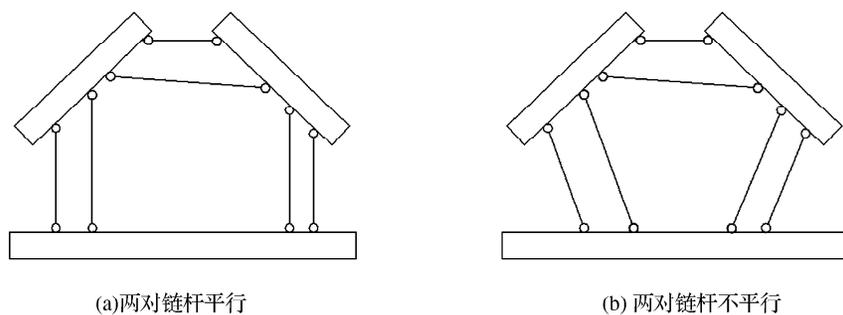


图 2-24 两对平行链杆

3) 三对平行链杆。图 2-25 所示结构中,结构中 3 个瞬铰由 3 对两两平行的链杆形成,相当于三个无穷远虚铰在无穷远处交于一点,所形成的结构体系为瞬变的。

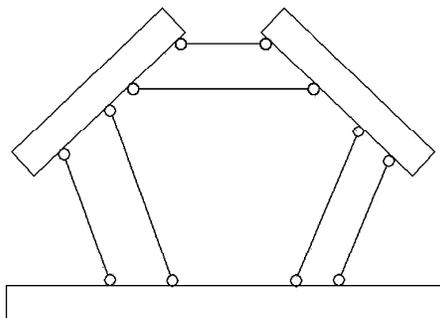


图 2-25 三对平行链杆

瞬变体系在经过微小位移后即成为几何不变体系,但瞬变体系不能作为结构使用,这是由瞬变体系的受力特征决定的。如图 2-26 所示结构为一瞬变体系经过微小的位移 β 后,成为几何不变体系。

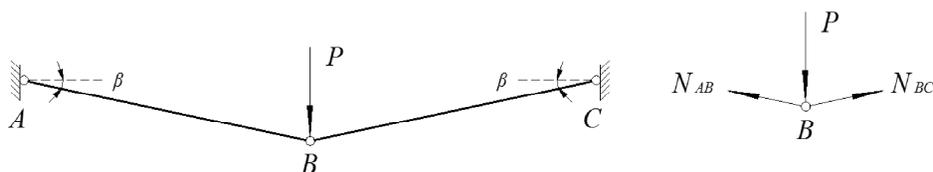


图 2-26 瞬变体系

以 B 结点为隔离体,研究其静力平衡条件,有:

$$\sum Y = 0 \quad 2N_{AB} \sin\beta = P$$

得到:

$$N_{AB} = \frac{P}{2\sin\beta}$$

若 β 很小, N_{AB} 就趋向无穷大,即便在微小位移的情况下,结构也会产生无穷大内力,由此可以看出,瞬变体系是不能作为结构使用的。

2.3.3 几何组成与结构的静定特性

实际工程中的结构体系,其几何组成必须是几何不变的。几何不变体系又可分为无多余约束的和有多余约束的体系。有多余约束几何不变体系中,约束数量除了满足结构几何不变性的要求外,尚有多余的。

无多余约束的几何不变体系,结构的全部支座反力和内力都可用静力平衡条件求得,且为唯一解,这类结构称为静定结构。

有多余约束的几何不变体系,由于多余约束的存在,结构中的未知力的个数超过了静力平衡方程的个数,所以此类结构的反力和内力不能由静力平衡条件全部求出,必须补充其他条件(比如补充变形协调条件)才能求出所有反力和内力,这类结构称为超静定结构。

2.4 平面体系几何组成分析示例

利用平面杆系结构几何组成的基本规则,可以形成各种各样的几何不变体系,也可对已有的结构体系进行几何组成分析。

2.4.1 组装几何不变体系

(1) 从基础出发进行组装。将基础作为一个刚片,运用各条规律将基础和上部构件组装成一个不变体系。



组装几何不变体系

以图 2-27(a) 为例,基础为几何不变部分,可把它看作刚片,在此基础上依次添加二元体。由二元体法则,该体系为无多余约束的几何不变体系。

图 2-27(b) 中,也可将基础看作刚片(包含固定铰支座),在此基础上增加两个二元体,体系为无多余约束的几何不变体系。

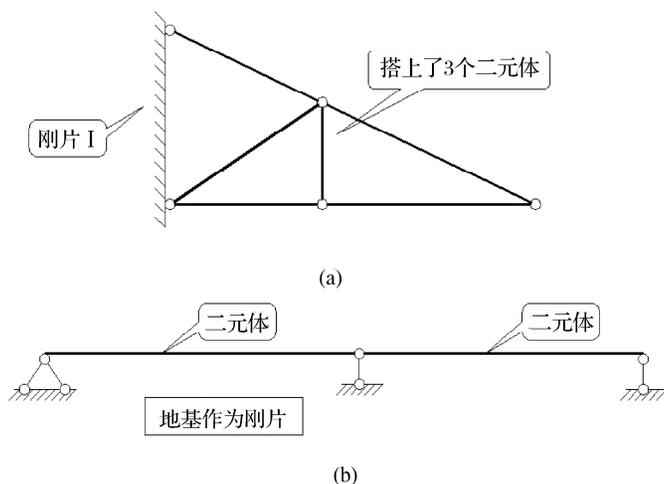


图 2-27 从基础开始组装几何不变体系



(2) 从结构某一几何不变的部分出发进行组装。先运用基本规则将上部结构组装成一个几何不变体系,然后以规律 3 将其与基础相连。

如图 2-28 所示,上部体系可看作在一个铰接三角形 DBC 上依次增加二元体组成,其可看作一个大刚片,再将上部刚片与基础用一个固定铰支座(a) 和一个活动铰支座(b) 相连,由两刚片规则知,该体系为无多余约束的几何不变体系。

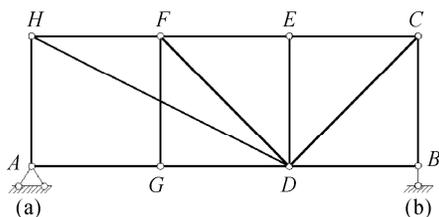


图 2-28 从上部结构开始组装几何不变体系

2.4.2 几何组成分析示例

例 2-5 试分析图 2-29 所示体系的几何组成。

分析: 由于 AFG 部分由基础简支,所以可只分析 AFG 部分。去掉二元体 BAC 只分析 $BFGC$ 部分。把三角形 BDF 、 CEG 分别看作刚片 I 和 II,刚片 I 和 II 由三根平行的链杆相连,因而整个体系为瞬变体系。

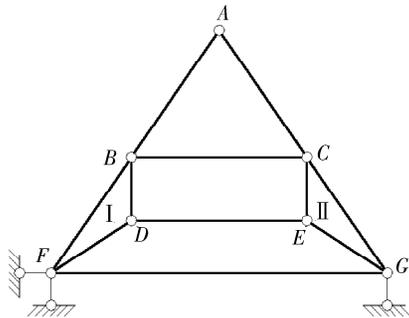


图 2-29 例 2-5 图

例 2-6 试分析如图 2-30(a) 所示体系的几何组成。

分析: 先去掉基础,再去掉二元体 CAE 、 CBD ,并不改变原结构体系的几何组成性质,剩下如图 2-30(b) 所示部分,外边三角形 CDE 和里边的小三角形 GHF 通过链杆 1、2、3 相连,三根链杆不平行也不相交于一点,所以原体系是无多余约束的几何不变体系。

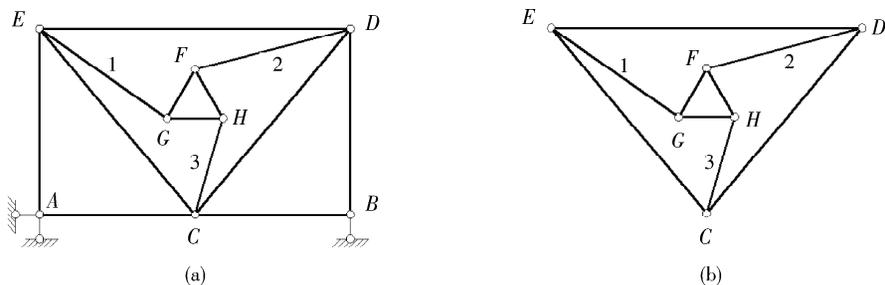


图 2-30 例 2-6 图

例 2-7 试分析如图 2-31 所示体系的几何组成。

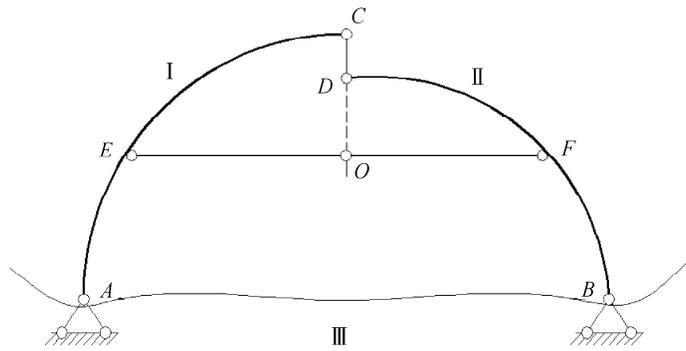


图 2-31 例 2-7 图

分析:分别将图中构件 AEC 、 BFD 和基础视为刚片 I、II、III,刚片 I 和 III 以铰 A 相连,刚片 II 和 III 以铰 B 相连,刚片 I 和 II 由链杆 CD 和 EF 相连,两杆的交点 O 相当于一个虚铰,如图 2-31 所示。连接三刚片的三个铰 A、B、O 不在一直线上,该体系是几何不变体系,且无多余约束。

例 2-8 试分析图 2-32 所示体系的几何组成。

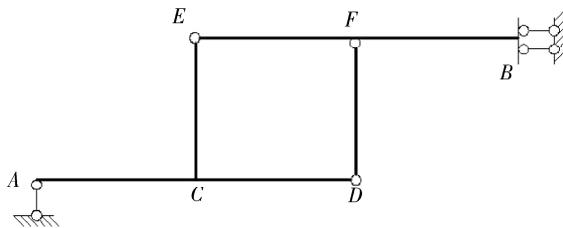


图 2-32 例 2-8 图

分析:将图中 $ACDE$ 视为刚片 I,将 EFB 视为刚片 II,刚片 I 和 II 用铰 E 和链杆 DF 相连,满足两刚片规则,所以刚片 I、II 形成扩大刚片 $ACDEFB$,这个扩大刚片又和基础通过 A、B 两个支座的三根既不都平行又不交于一点的链杆连接,故整个体系为无多余约束的几何不变体系。

例 2-9 试分析图 2-33 所示体系的几何组成。

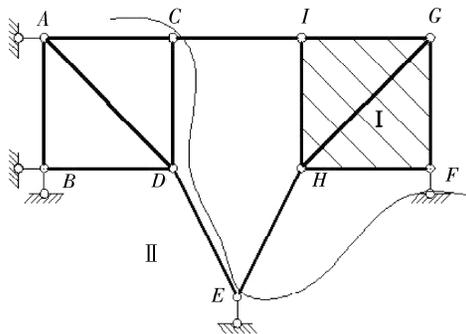


图 2-33 例 2-9 图

分析:三角形 ABD 基础上增加二元体 ACD 得到大刚片,再与基础通过 A 和 B 处三根不平行也不交于一点的链杆相连得到扩大刚片,再增加二元体固定点 E 形成刚片 II。三角形 HGF 基础上增加二元体 GIH 形成刚片 I。刚片 I 和刚片 II 通过三根不平行也不交于一点,链杆 GI 、 EH 和支杆 F 相连组成无多余约束的几何不变体系。



例 2-10 试分析如图 2-34 所示体系的几何组成。

分析:将三角形 AEC 视为刚片 I, 将杆 BD 视为刚片 II, 将地基视为刚片 III, 刚片 I 与刚片 II 以无穷远虚铰 $O_{I,II}$ 相连, 刚片 II 与刚片 III 以无穷远虚铰 $O_{II,III}$ 相连, 刚片 III 与刚片 I 以铰 E 相连, 组成两个无穷远铰的两对平行链杆互不平行, 因此所示体系为几何不变体系, 无多余约束。

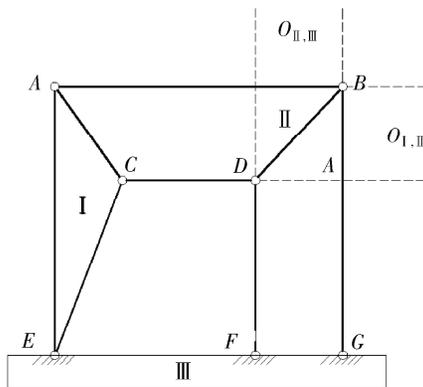


图 2-34 例 2-10 图

例 2-11 试分析如图 2-35(a) 所示体系的几何组成。

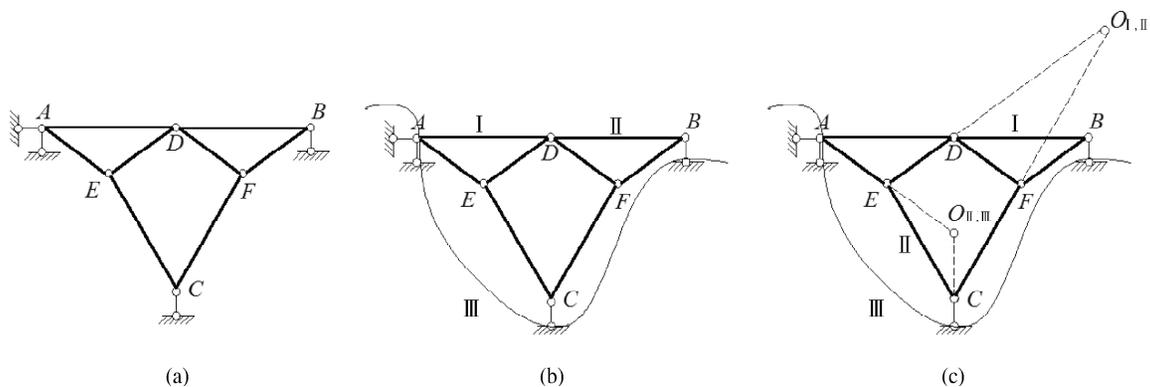


图 2-35 例 2-11 图

分析:假设局部不变体系 ADE 为刚片 I, 然后通过铰 A, D , 很自然就会把局部不变体系 BDF 和基础作为刚片 II 和 III, 如图 2-35(b) 所示。可是根据这样的考虑, 接下来的分析就有困难了: 直接连接刚片 II 和 III 的只有一根支座链杆 B , 而支座链杆 C 、链杆 CF 、链杆 CE 均未能直接用上。显然, 这种划分刚片的方式, 不能直接套用不变体系的组成规律, 需要采用其他的划分方法。

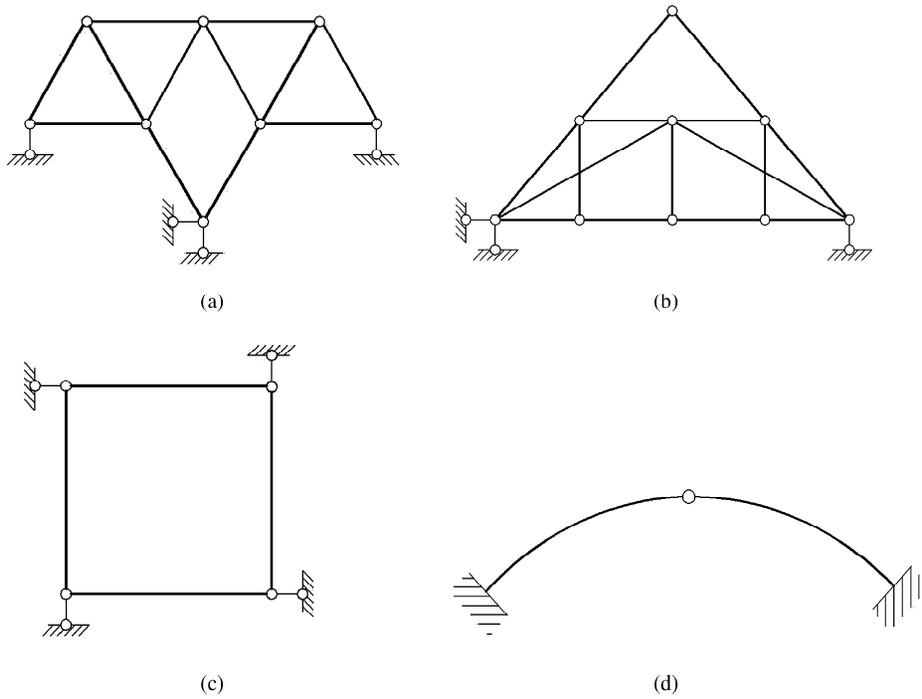
如图 2-35(c) 所示, 先假设局部不变体系 BDF 为刚片 I。由于结点 A 是固定铰支座, 故可将其看作基础上的点。与刚片 I 连接的共有四根链杆, 其中链杆 DE 和链杆 FC 与杆件 EC 相连, 而链杆 AD 和支座链杆 B 与基础相连。因此, 把杆件 EC 和基础分别看作刚片 II 和刚片 III。还能发现, 刚片 II 和刚片 III 之间也有两根链杆(链杆 AE 、支座链杆 C)相连。这样, 三个刚片两两之间各有两根链杆相连, 相应的三个虚铰不在一条直线上, 符合三刚片规则, 故体系为几何不变体系, 且没有多余约束。

由以上的例题分析可见: 对于固定铰支座和直接连接于基础上的几何不变部分, 均可划入基础刚片的范围; 单链杆支座不能归为基础刚片; 在确定刚片时, 应考虑到两两之间应有足够的直接联系; 在分析过程中, 链杆与刚片之间常可按解题需要相互替换。同一结构体系, 可从不同的角度或采用不同的刚片分析其几何构造, 所得的结论是相同的。

最后,值得一提的是,两刚片和三刚片组成规则是几何不变体系最基本也是最常用的组成规则。但对于一些几何构造比较复杂的体系,不能按上述规则进行分析。有关这类结构的几何构造分析可采用零载法完成。

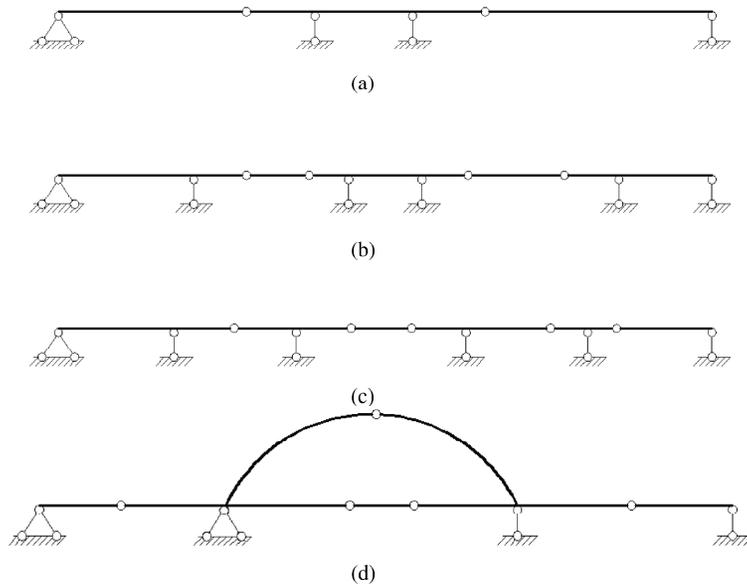
复习思考题

2-1 计算题 2-1 图所示各体系的自由度。



题 2-1 图

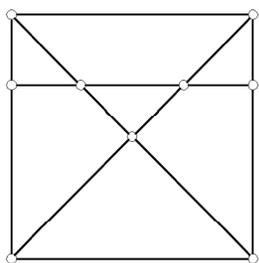
2-2 分析题 2-2 图所示体系的几何组成。



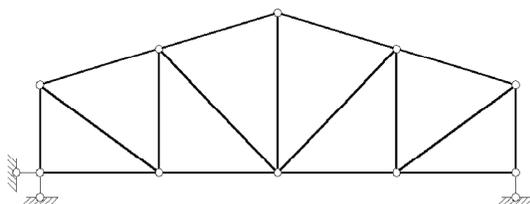
题 2-2 图



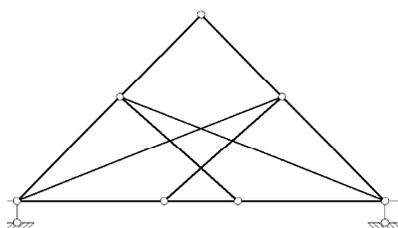
2-3 分析题 2-3 图 ~ 题 2-22 图所示体系的几何组成。



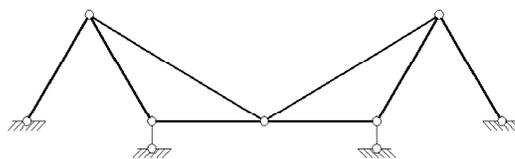
题 2-3 图



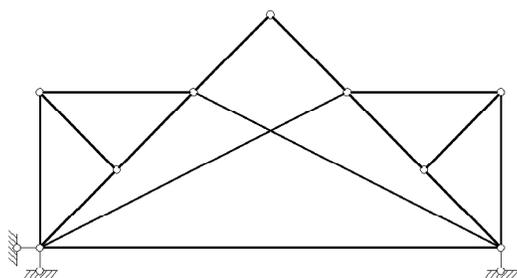
题 2-4 图



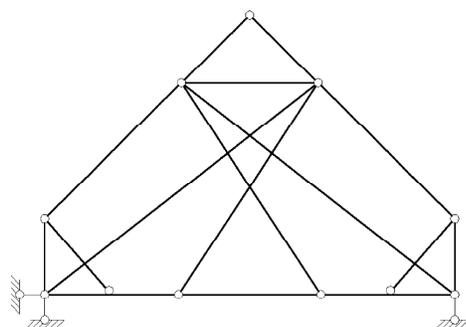
题 2-5 图



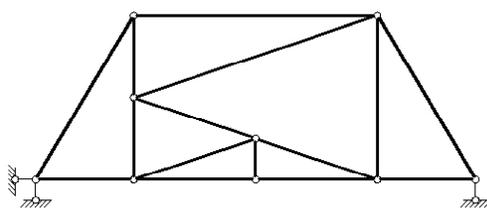
题 2-6 图



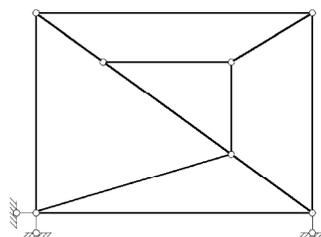
题 2-7 图



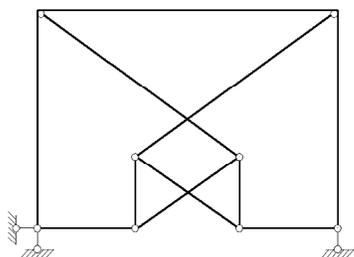
题 2-8 图



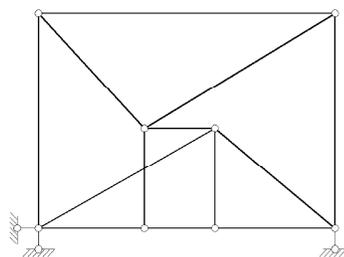
题 2-9 图



题 2-10 图

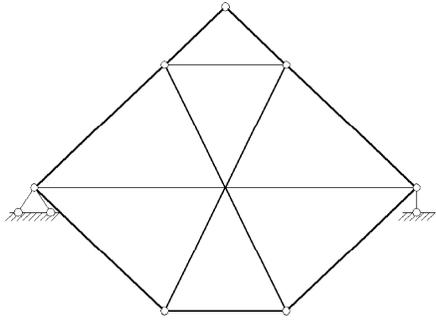


题 2-11 图

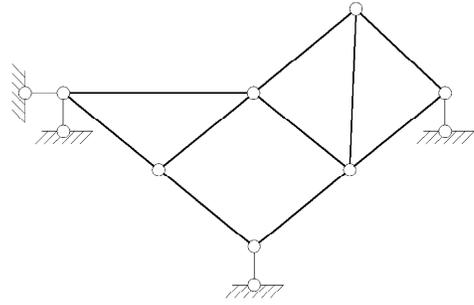


题 2-12 图

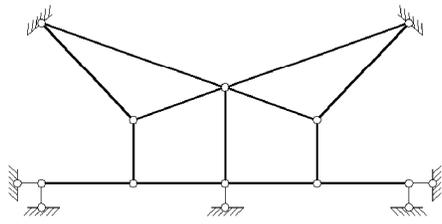




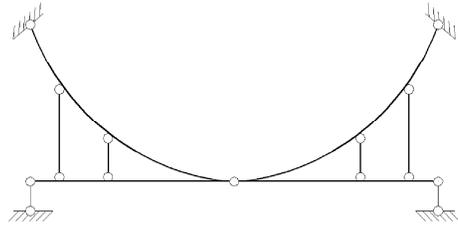
题 2-13 图



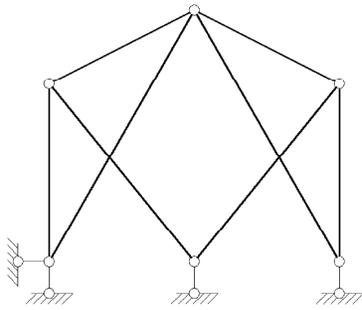
题 2-14 图



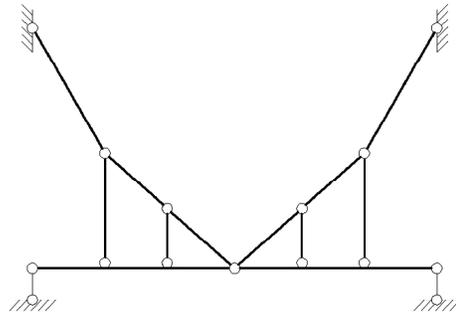
题 2-15 图



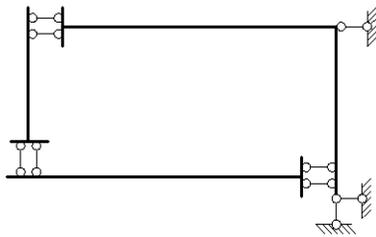
题 2-16 图



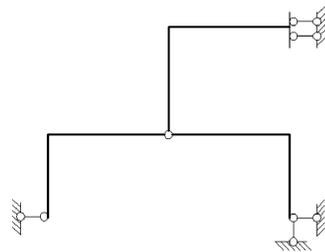
题 2-17 图



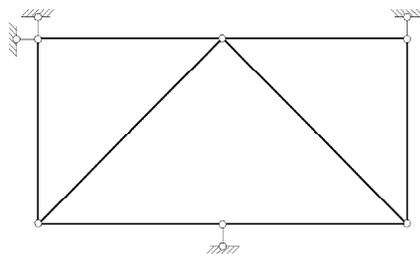
题 2-18 图



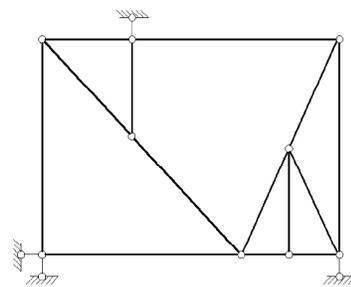
题 2-19 图



题 2-20 图



题 2-21 图



题 2-22 图

3

静定结构的内力计算

本章以平面力系的平衡原理为基础,讨论几种典型静定杆系结构(梁、刚架、桁架、拱)受力分析问题。主要研究隔离体的选取方式、平衡方程的列取、荷载和内力的关系,从而确定各类结构由荷载所引起的内力计算和内力图形的绘制。

本章内容包括静定平面梁、静定平面刚架、静定平面桁架、拱、组合结构的支座反力和内力的计算、内力图的绘制、各种结构受力性能的分析。通过本章学习掌握内力(轴力、弯矩和剪力)的概念及其正负规定;灵活运用结点法、截面法和内力与荷载之间的微分关系计算静定结构的支座反力和各截面内力并绘制内力图;理解不同结构的受力特性。

3.1 静定梁

静定梁内力在材料力学等课程上已有研究,本节在此基础上讨论问题的深度和广度有所提高。

3.1.1 静定结构内力计算概述

杆件结构内力计算的基本方法是截面法——将杆件沿拟求内力截面截开,取截面任一侧部分为隔离体,利用平衡条件计算所求内力。

杆件截面上有三个内力分量,分别为轴力 F_N 、剪力 F_Q 和弯矩 M ,由截面法的运算可知:

- (1) 轴力 F_N 等于截面一侧所有外力(包括荷载和反力)沿截面法线方向的投影代数和。
- (2) 剪力 F_Q 等于截面一侧所有外力沿截面切线方向的投影代数和。
- (3) 弯矩 M 等于截面一侧所有外力对截面形心的力矩的代数和。

对于直梁,当所有外力均垂直于梁轴线时,横截面上只有剪力和弯矩,没有轴力。

用截面法绘制隔离体受力图时,应注意以下几点:

- (1) 截取的隔离体与其周围相连接的约束要全部截断,以相应的约束反力代替。
- (2) 作用于隔离体上的力有两类:一类是荷载,另一类是被截断约束处的约束反力。
- (3) 待求截面处的未知内力,先假定为正向,已知力按实际方向画出。未知内力计算所得到的正负号就是实际的正负号。

内力正负号规定:轴力 F_N 以拉为正;剪力 F_Q 以绕隔离体顺时针转者为正;弯矩 M 通常不设正负,对于水平直杆,当弯矩使杆件下部受拉时为正值。

结构的内力图中,轴力图和剪力图要注明正负号;弯矩图的纵坐标画在杆件纤维受拉的一边,不注明正负号。

3.1.2 内力与荷载集度的微分关系

连续梁内力计算中,以 x 表示梁中某一截面的位置,则此截面上的三个内力分量均为 x 函数,称之为内力函数,据此作出的图形就是内力图。

在荷载连续分布的直杆段内,取微段 dx 为隔离体,如图 3-1 所示。由平衡条件可得微分关系式(3-1)。

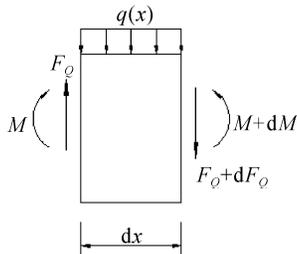


图 3-1 微段隔离体



$$\left. \begin{aligned} \frac{dF_Q}{dx} &= -q(x) \\ \frac{dM}{dx} &= F_Q \\ \frac{d^2 M}{dx^2} &= -q(x) \end{aligned} \right\} \quad (3-1)$$

一般情况下,按照分布于梁上的荷载可将其划分为:无荷载区($q=0$)、均布荷载(q 为常量)区段、线性分布荷载(q 为 x 的一次函数)区段。根据式(3-1)的微分关系,对于不同荷载区段剪力图和弯矩图有如下规律。

(1) 当 $q(x)=0$ 时,该梁段内各横截面上剪力图为平行于 x 轴的直线;弯矩 $M(x)$ 是 x 的一次函数,弯矩图必为斜直线;

(2) 当 $q(x)=\text{常数} \neq 0$ 时,该梁段内各横截面上的剪力 $F_Q(x)$ 为 x 的一次函数,剪力图必为斜直线;弯矩 $M(x)$ 是 x 的二次函数,弯矩图必为二次抛物线。

(3) 当 $q(x)$ 为一次函数时,该梁段内各横截面上的剪力 $F_Q(x)$ 为 x 的二次函数,剪力图为二次抛物线;弯矩 $M(x)$ 是 x 的三次函数,弯矩图为三次曲线。

集中荷载作用点、集中力矩作用点以及分布荷载的两端,是荷载分布的间断点,在这些点处,内力图的形状会发生一定的改变,这些点称为内力特征点。

集中荷载作用点处,剪力图发生突变,弯矩图发生转折;集中力矩作用点处,弯矩图发生转折,剪力图无变化;分布荷载的两端处,弯矩图的直线段与曲线段相切。

3.1.3 内力与荷载集度的积分关系

从直杆中取出荷载连续分布的梁段 AB ,如图3-2所示,由式(3-1)积分可得:

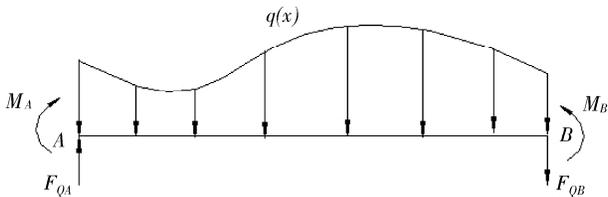


图 3-2 梁段 AB 受力

$$\int_a^b dF_Q(x) = \int_a^b -q(x) dx$$

可写为

$$F_{QB} - F_{QA} = \int_a^b -q(x) dx$$

$$F_{QB} = F_{QA} - \int_a^b q(x) dx \quad (3-2)$$

式中, F_{QA} 、 F_{QB} 分别表示两端横截面($x=a$ 和 $x=b$)处的剪力。

式(3-2)表明, B 端的剪力等于 A 端的剪力减去该段荷载图的面积。

同理,由式(3-1)可以得出:

$$M_B = M_A + \int_a^b dF_Q(x) \quad (3-3)$$

式中, M_A, M_B 分别表示两端横截面 ($x = a$ 和 $x = b$) 处的弯矩。

式(3-3)表明, B 端弯矩等于 A 端的弯矩加上此段剪力图的面积。



分段叠加法绘制弯矩图

3.1.4 分段叠加法绘制弯矩图

绘制梁式直杆弯矩图形时, 可依内力特征点将杆件分段, 在每一区段上利用叠加法绘出弯矩 (M) 图。利用弯矩图的叠加可使绘制工作简化, 易于工程计算。叠加法的原理和步骤如下。

首先, 讨论简支梁的弯矩图的绘制, 以图 3-3(a) 所示为例。简支梁上作用的荷载包括两部分: 跨间均布荷载 q 和端部集中力偶荷载 M_A 和 M_B 。当端部集中力偶荷载单独作用时, 梁的弯矩图为一 直线, 如图 3-3(c) 所示; 当跨间均布荷载 q 单独作用时, 梁的弯矩图为一 条二次抛物线, 如图 3-3(d) 所示, 两者共同作用时, 梁的弯矩图如图 3-3(e) 所示, 它是图 3-3(c) 和图 3-3(d) 两个图形, 采用纵坐标叠加的方式获得的新的弯矩图。

弯矩图的叠加, 是纵坐标的叠加而不是图形的简单拼合。即图 3-3(e) 中, 纵坐标 M_q 与 M_F 一样, 垂直于杆轴线 AB , 而不是垂直于图中虚线。弯矩图中三个纵标 $M(x)$ 、 $M_F(x)$ 、 $M_q(x)$ 之间的叠加关系为:

$$M = M_F(x) + M_q(x)$$

式中, $M(x)$ 为 x 截面处弯矩值; $M_F(x)$ 为端部集中力偶单独作用时 x 截面弯矩值; $M_q(x)$ 为均布荷载单独作用时 x 截面弯矩值。

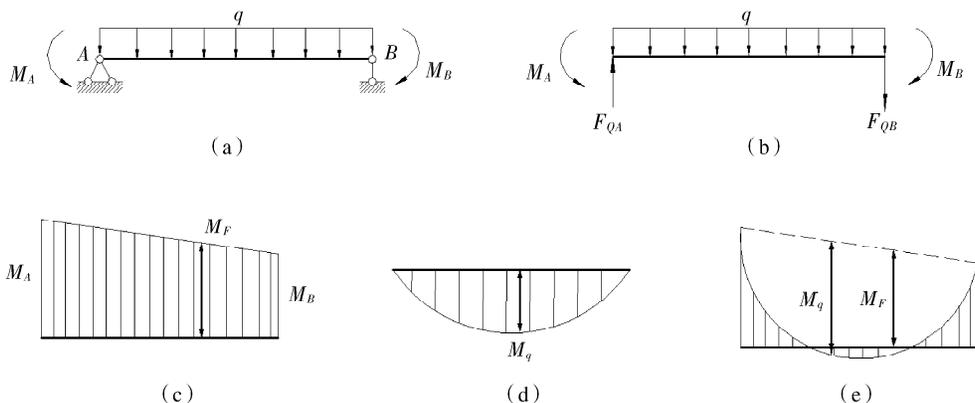


图 3-3 叠加关系图

其次, 讨论结构中任意直线段弯矩图的绘制。以图 3-3(b) 中杆段 AB 为研究对象, 其上的作用力, 除均布荷载 q 外, 还有 A 、 B 两个端面上的内力。比较 AB 段和图 3-3(a) 所示简支梁 (又称为 AB 段的相应简支梁), 发现两者的受力是完全相同的, 因此, 二者的弯矩图也完全相同。于是, 作任意直杆段弯矩图的问题, 就归结为作相应简支梁弯矩图的问题。与简支梁弯矩绘制的叠加原理相同, 具体的作法分为两步。首先根据 A 、 B 两个截面上的弯矩 M_A 、 M_B , 作直线弯矩图 M_F [如图 3-3(c)]; 然后以这条直线为基线, 以竖标叠加的方式, 叠加 AB 段在均布荷载 q 作用下的弯矩图 M_q [图 3-3(d)]; 得结构的弯矩图 [图 3-3(e)]。

3.1.5 单跨静定梁内力图

利用上述荷载与内力的关系和叠加法绘制内力图的原理如下: 对于单跨静定梁先选定内力