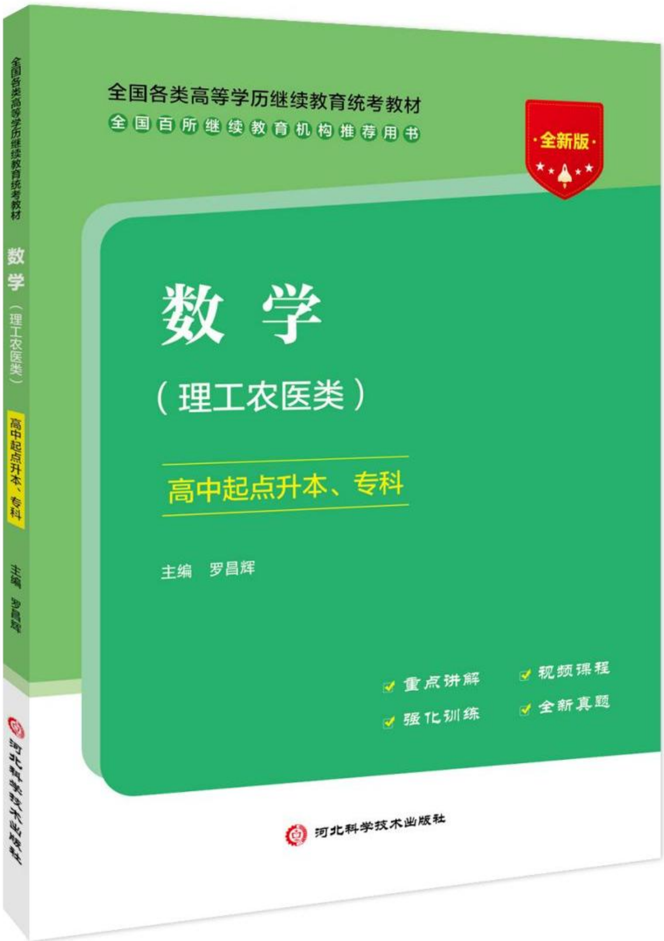
高等学历-数学（理工农医类）



类目：高等学历继续教育统考教材
书名：高等学历-数学（理工农医类）
主编：罗昌辉
出版社： 河北科学技术出版社
开本：大 16 开
书号： 978-7-5717-1299-0
使用层次：成人教育
出版时间：2025 年 1 月
定价：40.00
印刷方式：单色
是否有资源：是

责任编辑：王　宇
责任校对：张京生
美术编辑：张　帆

图书同步精讲课程

-课时多、讲得细、学得快，通过考试更容易-

提升学历就选高等学历继续教育

理论精讲	真题讲练	专题突破	模考训练
明确考情 夯实基础	掌握规律 巩固提升	把握重点 突破难点	模考强化 标准预测

全国各类高等学历继续教育招生考试备考用书
（高中起点升本、专科）

教材系列

- ○ 语文
- ● 数学（理工农医类）
- ○ 历史地理综合
- ○ 数学（文史财经类）
- ○ 英语
- ○ 物理化学综合

试卷系列

- ○ 语文
- ○ 数学（理工农医类）
- ○ 历史地理综合
- ○ 数学（文史财经类）
- ○ 英语
- ○ 物理化学综合

ISBN 978-7-5717-1299-0
定价：40.00元

全国各类高等学历继续教育统考教材
数学（理工农医类）
高中起点升本、专科
主编　罗昌辉
河北科学技术出版社

全国各类高等学历继续教育统考教材
全国百所继续教育机构推荐用书

·全新版·

数学

（理工农医类）

高中起点升本、专科

主编　罗昌辉

- 重点讲解
- 视频课程
- 强化训练
- 全新真题

河北科学技术出版社

全国各类高等学历继续教育统考教材
全国百所继续教育机构推荐用书

数 学

（理工农医类）

高中起点升本、专科

主编　罗昌辉

河北科学技术出版社
·石家庄·

图书在版编目(CIP)数据

数学. 理工农医类 ：高中起点升本、专科 / 罗昌辉主编. -- 石家庄 ：河北科学技术出版社，2022.11(2025.1 重印)

全国各类高等学历继续教育统考教材 / 张东红主编

ISBN 978-7-5717-1299-0

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①罗… Ⅲ. ①数学－成人高等教育－入学考试－自学参考资料 Ⅳ. ①G723.46

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2022)第 201939 号

数学(理工农医类)　高中起点升本、专科

SHUXUE(LI-GONG-NONG-YILEI)　GAOZHONG QIDIAN SHENG BEN-ZHUANKE

主编　罗昌辉

出版发行　河北科学技术出版社

地　　址　石家庄市友谊北大街 330 号(邮编:050061)

印　　刷　唐山唐文印刷有限公司

开　　本　880 毫米×1230 毫米　1/16

印　　张　10.5

字　　数　230 千字

版　　次　2022 年 11 月第 1 版

印　　次　2025 年 1 月第 3 次印刷

定　　价　40.00 元

出版说明

2022年，教育部印发《关于推进新时代普通高等学校学历继续教育改革的实施意见》(以下简称《意见》)，要求推进新时代普通高等学校举办的学历继续教育改革发展。《意见》指出普通高等学校举办的学历继续教育统一通过成人高考入学，统一专业教学基本要求，统一最低修业年限，统一毕业证书。为了满足广大考生备考的需要，使其能够顺利通过成人高校统一入学考试，我们组织了有丰富成教经验的一线教师和专家，认真研究了教育部高校学生司和教育部考试中心2020年修订的《全国各类成人高等学校招生复习考试大纲》，并依据2024年版大纲的要求，在把握成人高考命题变化的基础上，精心编写了全国各类高等学历继续教育统考教材。

本系列教材包括：

高中起点升本、专科：《语文》《英语》《数学(文史财经类)》《数学(理工农医类)》《历史地理综合》《物理化学综合》。

专科起点升本科：《政治》《英语》《大学语文》《高等数学(一)》《高等数学(二)》《艺术概论》《民法》《教育理论》《生态学基础》《医学综合》。

在本系列教材的编写过程中，侧重体现如下几个特点：

1.紧扣大纲，时代性强

本系列教材紧扣最新修订的《全国各类成人高等学校招生复习考试大纲》，内容的编排和选择与新大纲的知识系统完全一致，充分体现了新大纲的知识能力要求。在编写过程中，借鉴和吸收基础教育改革的成果，融入新的命题思想和观点，及时适应成人高考的新变化，具有较强的时代性。

2.结构合理，重点突出

本系列教材根据知识的内在联系和考生的认知规律，既坚持了“少而精”的原则，又注重了教材内容的完整性，遵循从简单到复杂、由浅入深、循序渐进的原则进行编排。学习起点低，重点突出，更加有利于考生对学科知识内容的理解，提高复习效率。

3.针对性强，科学实用

本系列教材针对成人高考的实际需要，注重基础知识复习和能力训练，具有较强的针对性和实用性。

本系列教材不仅可供参加全国各类高等学历继续教育统考的考生使用，也适用于高中及以上学历的学生、教师和教研人员学习、参考。

为进一步提高本系列教材的质量，欢迎广大师生提出宝贵意见和建议，以便及时修订，使之日趋完善。

编　者

超高命中，源自精选

命题专家深度解读历年考试真题，对出题内容、题型比例、考查重点、出题形式有独特的把握，在紧密结合考试大纲的基础上，精心提炼核心考点，辅以精选全真试题，准确洞悉命题方向，连续命中原题，一直保持超高命中率！

《数学（理工农医类）》命中实例

1.设甲：$y=f(x)$的图象有对称轴；乙：$y=f(x)$是偶函数，则（ B ）（2018 年统考题）

A.甲是乙的充分条件但不是必要条件

B.甲是乙的必要条件但不是充分条件

C.甲是乙的充要条件

D.甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

2.已知 $\tan\alpha=\frac{1}{2}$，则 $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=$（ C ）（2019 年统考题）

A. -3　　B. $-\frac{1}{3}$　　C. 3　　D. $\frac{1}{3}$

3. 双曲线$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ 的焦点坐标是（ D ）（2019 年统考题）

A. $(0,-\sqrt{7})$，$(0,\sqrt{7})$　　B. $(-\sqrt{7},0)$，$(\sqrt{7},0)$

C. $(0,-5)$，$(0,5)$　　D. $(-5,0)$，$(5,0)$

说明：由于篇幅所限，命中题目不一一列举，但都在书中以考题的形式出现。

目　录

CONTENTS

第一部分

代　数

第一章 集合和简易逻辑

考点要求

1.了解集合的意义及其表示方法.

2.了解空集、全集、子集、交集、并集、补集的概念及其表示方法.

3.了解符号$\subseteq$、$\subsetneqq$、$=$、$\in$、$\notin$的含义,并能运用这些符号表示集合与集合、元素与集合的关系.

4.理解充分条件、必要条件、充分必要条件的概念,能根据定义和所学知识判断一个命题中的条件是结论成立的充分条件,还是必要条件,或者是充分必要条件.

知识解读

一、集合

(一)集合的意义

1.集合与元素

具有某种属性的一些对象的全体,形成一个集合,集合里的各个对象称为集合的元素.

2.集合中的元素

(1)确定性:对于任何一个对象,都能确定它是不是集合中的元素.

(2)互异性:一个集合中的元素,是互不相同的.

(3)无序性:对于一个集合中的元素,是不考虑它们之间的先后顺序的.

3.集合的分类

(1)有限集合:集合中的元素个数是有限的.如,集合$\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$中,只有 9 个元素.

(2)无限集合:集合中的元素个数有无穷多个.如,集合{大于 5 的数}中,大于 5 的数都是它的元素,而大于 5 的数有无穷多个.

(3)空集:集合中不含任何元素,用符号$\varnothing$表示.

(二)集合的表示方法

1.列举法

把集合中的所有元素都一一列出来,写在大括号内.如,大于 2 且小于 6 的整数集合,用列举法表示为$\{3,4,5\}$.

2.描述法

把集合中的所有元素的公共属性写在大括号内.如,大于 2 且小于 6 的数的集合用描述法表示为$\{x|2<x<6\}$.

3.韦恩图法

集合可以用圆或封闭的曲线表示出来的图来表示.

(三)常用的数集字母

自然数集合(非负数整数集)记作 $\mathbf{N}$,正整数集合记作 $\mathbf{N}^*$(或 $\mathbf{N}_+$),整数集合记作 $\mathbf{Z}$,有理数集合记作 $\mathbf{Q}$,实数集合记作 $\mathbf{R}$,复数集合记作 $\mathbf{C}$.如,$\mathbf{Q}^+$ 表示正有理数集合;$\mathbf{R}^+$ 表示正实数集合.

(四)元素与集合间关系的表示符号

1.如果某个元素是这个集合的元素,则称这个元素属于这个集合,属于的符号为$\in$.如,$\sqrt{2}$是实数,也就是说$\sqrt{2}$是实数集合的元素,可表示为$\sqrt{2}\in\mathbf{R}$.

2.如果某个元素不是这个集合的元素,则称这个元素不属于这个集合,不属于符号为$\notin$.如,-3 不是自然数,也就是说自然数集合中没有-3 这个元素,可表示为$-3\notin\mathbf{N}$.

(五)子集

1.子集的意义

两个集合 A 和B,如果集合 A 的所有元素,在集合 B 中全部都有,且无一例外,那么就说集合 A 是集合B 的子集,记作 $A\subseteq B$ 或$B\supseteq A$.前者读作 A 包含于B,后者读作 B 包含A.如果集合 $M=\{1,2,3\}$,集合 $N=\{1,3,2,4\}$,则 M 是 N 的子集,可表示为 $M\subseteq N$ 或 $N\supseteq M$.

2.子集的性质

(1)任何一个集合都是它本身的子集.如 $A\subseteq A$.

(2)空集是任何集合的子集.如$\varnothing\subseteq A$.

(3)若集合 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq C$,则 $A\subseteq C$.

3.真子集

两个集合 A 与B,若集合 A 的所有元素都是集合B 的元素,且集合 B 至少有一个元素不是集合A 的元素,则称集合 A 是集合B 的真子集,记作 $A\subsetneqq B$ 或 $B\supsetneqq A$,前者读作 A 真包含于B,后者读作 B 真包含A.如,集合 $A=\{1,2,3,4,5\}$,集合 $B=\{1,3,5\}$,则集合 B 是集合A 的真子集,可表示为 $B\subsetneqq A$ 或$A\supsetneqq B$.

4.真子集性质

(1)空集是任何非空集合的真子集.

(2)$A\subsetneqq B$ 且 $B\subsetneqq C$,则 $A\subsetneqq C$.如,$\mathbf{N}\subsetneqq\mathbf{Q}\subsetneqq\mathbf{R}$.

5.相等集合

两个集合 A 和 B,若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$,则称集合 A 与集合 B 相等,记作 $A=B$.

例1 集合$\{a,b,c\}$共有多少个子集?共有多少个真子集?

解 集合$\{a,b,c\}$共有 8 个子集,共有 7 个真子集.

例2 在下列各横线上,填写适当的符号.

0 ________ $\{0,1,2\}$;$\varnothing$ ________ $\{0\}$;$\{1,2,3\}$ ________ $\{2,3,1\}$;
$\{a,b,c,d,e\}$ ________ $\{e,a,c,d,b,f\}$.

解 $0\in\{0,1,2\}$;$\varnothing\subsetneqq\{0\}$;$\{1,2,3\}=\{2,3,1\}$;$\{a,b,c,d,e\}\subsetneqq\{e,a,c,d,b,f\}$.

(六)交集

1.交集的意义

两个集合 A 和 B,由集合 A 与集合 B 的公共元素所组成的集合,称为集合 A 与集合 B 的交集,记作 $A\cap B$.用图 1-1 表示,图中的阴影部分为 $A\cap B$.

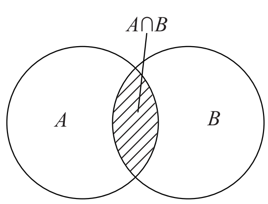


图 1-1

如,集合 $A=\{1,2,3,4\}$,集合 $B=\{3,4,5,7\}$,则 $A\cap B=\{3,4\}$.

2.交集的性质

$$A\cap B=B\cap A,A\cap A=A,A\cap\varnothing=\varnothing.$$

(七)并集

1.并集的意义

由两个集合 A、B 的所有元素组成的集合,称为集合 A 与集合 B 的并集,记作 $A\cup B$,读作 A 并 B,用图 1-2 表示,图中的阴影部分为 $A\cup B$.

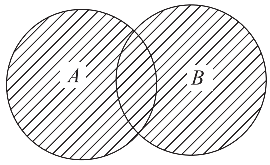


图 1-2

例3 集合 $A=\{a,b,c,d\}$,集合 $B=\{a,c,e,f\}$,则 $A\cup B=$ ________.

解 $A\cup B=\{a,b,c,d,e,f\}$.

例4 集合 $A=\{x|x>2\}$,集合 $B=\{x|x>3\}$,则 $A\cup B=$ ________.

解 $A\cup B=\{x|x>2\}$.

2.并集的性质

$$A\cup A=A,A\cup\varnothing=A,A\cup B=B\cup A.$$

(八)补集

1.全集

在研究集合之间关系时,这些集合都是某个给定集合的子集,则这个给定集合称为全集,用字母 U 表示.

2.补集

已知全集 U,$A\subseteq U$,则在 U 中,不属于集合 A 的元素所组成的集合,称为集合 A 在集合 U 中的补集,记作 $\complement_U A$ 或$\overline{A}$.

例如全集 $U=\{a,b,c,d,e\}$,$A\subseteq U$,集合 $A=\{a,c,d\}$,则集合 A 在集合 U 中的补集 $\complement_U A=\{b,e\}$(或$\overline{A}=\{b,e\}$),用图 1-3 表示,图中的阴影部分为 A 在 U 中的补集.

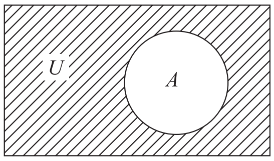


图 1-3

例 5 设全集 $U=\mathbf{R}$,集合 $A=\{x\mid x<2\}$,则 $\complement_U A=$________.

解 在实数集中,除去集合 A 的元素所组成的集合为 $\complement_U A=\{x\mid x\geqslant 2\}$.

3.补集的性质

$$A\cup\complement_U A=U;\ A\cap\complement_U A=\varnothing.$$

例 6 若全集 $U=\mathbf{R}$,$A=\{x\mid x\in\mathbf{R}\}$,则 $\complement_U A=$________.

解 $\varnothing$.

二、简易逻辑

一个数学命题都有条件和结论两部分.如果把条件和结论分别用 A,B 表示,那么命题可以写成“如果 A 成立,那么 B 成立”,或简写成“若 A,则 B”.

如果 A 成立,那么 B 成立,即 $A\Rightarrow B$,这时我们就说条件 A 是 B 成立的充分条件.

如果 B 成立,那么 A 成立,即 $B\Rightarrow A$,这时我们就说条件 A 是 B 成立的必要条件.

如果 A 既是 B 成立的充分条件,又是 B 成立的必要条件,即既有 $A\Rightarrow B$,又有 $B\Rightarrow A$,这时我们就说条件 A 是 B 成立的充分必要条件,简称充要条件.

例 7 三角形全等是三角形面积相等的（　　）

A.充分但不必要条件　　B.必要但不充分条件

C.充要条件　　D.既不充分也不必要条件

解　A

同步练习

一、选择题

1.满足条件$\{1,2\}\subsetneqq M\subsetneqq\{1,2,3,4,5\}$的集合 M 的个数是（ C ）

A.8　　B.7　　C.6　　D.5

2.设 $n\in\mathbf{N}^*$，集合 $P=\{x\mid x=n\}$，$Q=\left\{x\,\middle|\,x=\dfrac{n}{2}\right\}$，$R=\left\{x\,\middle|\,x=n-\dfrac{1}{2}\right\}$，则（ D ）

A.$Q\subseteq P$　　B.$Q\subseteq R$

C.$Q=P\cap R$　　D.$Q=P\cup R$

3.M,N,S 是三个集合，命题 p：$S\subsetneqq M$，命题 q：$S\subsetneqq(M\cup N)$，则 p 是 q 的（ B ）

A.必要不充分条件　　B.充分不必要条件

C.充要条件　　D.既不充分也不必要条件

4.设全集 $U=\{a,b,c,d,e\}$，$M=\{a,c,d\}$，$N=\{b,d,e\}$，那么$(\complement_U M)\cap(\complement_U N)$等于（ A ）

A.$\varnothing$　　B.$\{d\}$

C.$\{a,c\}$　　D.$\{b,e\}$

5.若集合 $A=\{3,a\}$，$B=\{x\mid x^2-3x<0,x\in\mathbf{Z}\}$，且 $A\cap B=\{1\}$，则 $A\cup B$ 等于（ C ）

A.$\{1,3,a\}$　　B.$\{1,2,3,a\}$

C.$\{1,2,3\}$　　D.$\{1,3\}$

6.设全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $M=\{1,2,3,4\}$，集合 $N=\left\{x\,\middle|\,x\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}\right\}$，则 $M\cap(\complement_U N)=$（ B ）

A.$\{4\}$　　B.$\{3,4\}$

C.$\{2,3,4\}$　　D.$\{1,2,3,4\}$

7.设集合 $M=\left\{x\,\middle|\,\dfrac{8}{x+3}\in\mathbf{N},x\in\mathbf{Z}\right\}$，则集合 M 中元素个数为（ B ）

A.2 个　　B.4 个　　C.6 个　　D.8 个

8.若集合 $M=\{x\mid x^2-2x-3<0\}$，$P=\{x\mid |x|<a\}$，且 $P\subsetneqq M$，则实数 a 的取值范围是（ B ）

A.$0<a<1$　　B.$a\leqslant 1$

C. $-1<a\leqslant 3$　　　　D. $a<1$

9.设集合 $M=\{(x,y)|(x-2)^2+y^2=4\}$,集合 $N=\{(x,y)|(x-1)^2+y^2=1\}$,则 M 和 N 的关系是(D)

A. $N\subsetneqq M$　　　　B. $M\cap N=\varnothing$

C. $N\subseteq M$　　　　D. $M\cap N=\{(0,0)\}$

二、填空题

1.若 $A=\{(x,y)|ax-y^2+b=0\}$, $B=\{(x,y)|x^2-ay-b=0\}$, $A\cap B\supseteq\{(1,2)\}$,则 $a=$________, $b=$________.

2. $\neg A$ 是命题 A 的否定,如果 B 是 $\neg A$ 的必要不充分条件,那么 $\neg B$ 是 A 的________条件.

3. $M=\{x|15\leqslant x\leqslant 125,x\in \mathbf{R}\}$, $N=\{x|x=4n+1,n\in \mathbf{N}_+\}$,则 $M\cap N$ 中所有元素之和为________.

4.已知集合 $A=\{-1,2\}$, $B=\{x|mx+1=0\}$,若 $A\cup B=A$,则实数 m 的取值范围是________.

三、解答题

1.已知集合 $A=\{x|x^2-6x+8<0\}$, $B=\{x|m<x<4m\}$.

(1)若 $A\subseteq B$,求实数 m 的取值范围;

(2)是否存在 m 使得 $A\cup B=A$? 若存在,请求出 m 的范围;若不存在,则说明理由.

2.已知 $A=\{x|-2\leqslant x\leqslant 5\}$, $B=\{x|m+1\leqslant x\leqslant 2m-1\}$, $B\subseteq A$,求 m 的取值范围.

参考答案

二、填空题

1. -3　7　　　2.充分不必要　　　3.1988　　　4. $\left\{0,1,-\frac{1}{2}\right\}$

三、解答题

1.(1)依题意得 $\{x|2<x<4\}$,

因为 $A\subseteq B$,所以 $\begin{cases}m\leqslant 2,\\4m\geqslant 4,\end{cases}$ 则 m 的取值范围为 $1\leqslant m\leqslant 2$.

(2)若存在 m 使得 $A\cup B=A$ 成立,即有 $B\subseteq A$,

若 $B=\varnothing$，满足 $B\subseteq A$，由 $m\geqslant 4m$ 得 $m\leqslant 0$，

若 $B\neq\varnothing$，则 $\begin{cases}m<4m,\\ m\geqslant 2,\\ 4m\leqslant 4,\end{cases}$ 该方程组无解，

综上得实数 m 的取值范围为 $\{m\mid m\leqslant 0\}$.

2.当 $m+1>2m-1$，即 $m<2$ 时，$B=\varnothing$，满足 $B\subseteq A$，即 $m<2$；

当 $m+1=2m-1$，即 $m=2$ 时，$B=\{3\}$，满足 $B\subseteq A$，即 $m=2$；

当 $m+1<2m-1$，即 $m>2$ 时，由 $B\subseteq A$，得 $\begin{cases}m+1\geqslant -2,\\ 2m-1\leqslant 5,\end{cases}$ 即 $2<m\leqslant 3$；

综上，$m\leqslant 3$.

第二章　函　数

考点要求

1.理解函数概念,会求一些常见函数的定义域.

2.了解函数的单调性和奇偶性的概念,会判断一些常见函数的单调性和奇偶性.

3.理解一次函数、反比例函数的概念,掌握它们的图象和性质,会求它们的解析式.

4.理解二次函数的概念,掌握它的图象和性质以及函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 与 $y=ax^2(a\neq0)$ 的图象间的关系,会求二次函数的解析式及最大值或最小值,能灵活运用二次函数的知识解决有关问题.

5.了解反函数的意义,会求一些简单函数的反函数.

6.理解分数指数幂的概念,掌握有理指数幂的运算性质,掌握指数函数的概念、图象和性质.

7.理解对数的概念,掌握对数的运算性质,掌握对数函数的概念、图象和性质.

知识解读

一、函数的概念与性质

(一)函数的概念

1.定义

设在一个变化过程中有两个变量 x,y,如果对于 x 的每一个值都有唯一的 y 值与其对应,那么 y 是关于 x 的**函数**,记为 $y=f(x)$,x 为自变量,f 表示 y 随 x 变化的规律,也就是 y 值与 x 值的对应法则.

2.函数的基本要素和派生要素

函数的定义域和对应法则是函数的两个基本要素,值域是派生要素.

(1)定义域:函数 $y=f(x)$的定义域是自变量 x 的取值范围.

(2)对应法则:y 值随 x 值变化的规律.

只要两个函数的定义域相同,对应法则也相同,就称这两个函数为相同的函数,与变量用什么符号

表示无关，如 $y=f(x)$ 与 $u=f(t)$ 是同一函数.

(3)值域：与自变量 x 的取值范围相对应的 y 值的集合.

(二)函数的表示法

1.解析法

用等式来表示两个变量之间的函数关系的方法称为**解析法**，如 $y=2x$.

2.列表法

用数值表来表示两个变量之间的函数关系的方法称为**列表法**，如用列表法表示 $y=2x$，见表 2-1.

表 2-1

x	…	-2	-1	0	1	2	…
y	…	-4	-2	0	2	4	…

3.图象法

用图象来表示两个变量之间的函数关系的方法称为**图象法**.函数图象为满足函数 $y=f(x)$ 的所有点 (x,y) 的集合，即 $\{(x,y)\mid y=f(x)\}$，如用图象法表示 $y=2x$，如图 2-1 所示.

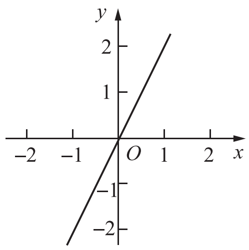


图 2-1

(三)函数的性质

1.单调性

设 $f(x)$ 是定义在区间 (a,b) 内的函数.

对任意 $x_1,x_2\in(a,b)$，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内是单调递增的函数，简称增函数.

对任意 $x_1,x_2\in(a,b)$，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内是单调递减的函数，简称减函数.

单调递增函数和单调递减函数统称为单调函数，若函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内是单调函数，则称区间 (a,b) 为单调区间，(a,b) 用集合表示为 $\{x\mid a<x<b\}$.

单调增函数的图象自左至右是上升的；单调减函数的图象自左至右是下降的.

例 1 判断下列函数的单调性.

(1) $y=5x-5(x\in\mathbf{R})$； (2) $y=-5x-5(x\in\mathbf{R})$.

解 (1)当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，所以 $y=5x-5(x\in\mathbf{R})$ 是增函数；

(2)当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)>f(x_2)$，所以 $y=-5x-5(x\in\mathbf{R})$ 是减函数.

2.奇偶性

设函数 $y=f(x)$的定义域为 D 且关于原点对称.

若对任意 $x\in D$,满足 $f(-x)=f(x)$,则称 $f(x)$在 D 上是偶函数,偶函数的图象关于 y 轴对称.

若对任意 $x\in D$,满足 $f(-x)=-f(x)$,则称 $f(x)$在 D 上是奇函数,奇函数的图象关于原点对称.

有些函数既不是奇函数也不是偶函数,称为非奇非偶函数.

例 2 指出下列函数哪个是奇函数,哪个是偶函数.

(1)$y=2x(x\in\mathbf{R})$;　　(2)$y=-5x+5(x\in\mathbf{R})$;

(3)$y=x^2+5(x\in\mathbf{R})$.

解　由函数奇偶性的定义:

(1)$f(-x)=2(-x)=-2x=-f(x)$,所以 $y=2x(x\in\mathbf{R})$是奇函数;

(2)$f(-x)=5x+5$,所以 $y=-5x+5(x\in\mathbf{R})$是非奇非偶函数;

(3)$f(-x)=x^2+5=f(x)$,所以 $y=x^2+5(x\in\mathbf{R})$是偶函数.

二、一次函数

1.定义

形如 $y=kx+b$ 的函数叫作**一次函数**,其中 k 与 b 是常数且 $k\neq0$.若 $b=0$,则函数 $y=kx$ 为**正比例函数**. 一次函数的定义域和值域都是实数集 $\mathbf{R}$.

2.图象、单调性、奇偶性(图 2-2)

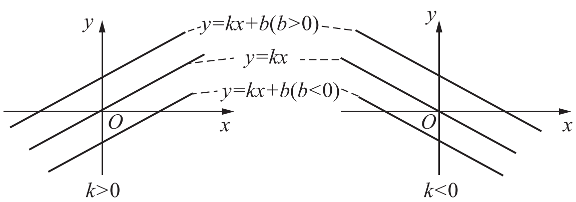


图 2-2

当 $k>0$ 时,$y=kx+b$ 的图象与 x 轴正半轴的夹角为锐角,$y=kx+b$ 是单调增函数;

当 $k<0$ 时,$y=kx+b$ 的图象与 x 轴正半轴的夹角为钝角,$y=kx+b$ 是单调减函数;

当 $b=0$ 时,函数为正比例函数 $y=kx$,图象经过坐标原点$(0,0)$,是奇函数;

当 $b>0$ 时,函数图象从 $y=kx$ 位置沿 y 轴向上平移 b 个单位;

当 $b<0$ 时,函数图象从 $y=kx$ 位置沿 y 轴向下平移$|b|$个单位.

三、二次函数

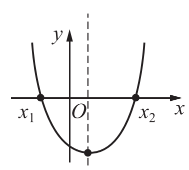
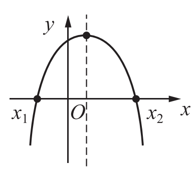
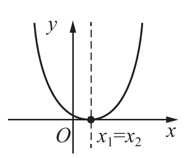
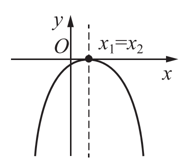
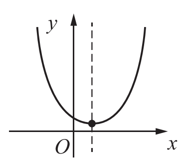
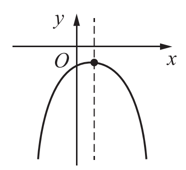
1.定义

函数 $y=ax^2+bx+c$ 叫作**二次函数**，其中 a,b,c 均为常数且 $a\neq 0$.其定义域为实数集 $\mathbf{R}$.

2.图象

函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象见表 2-2.

表 2-2

$y=ax^2+bx+c$	$a>0$	$a<0$	顶点坐标和对称轴
$\Delta>0$			$y=ax^2+bx+c$ $=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c$ $=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right]-\frac{b^2}{4a}+c$ $=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$, 顶点坐标$\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$, 对称轴方程 $x=-\frac{b}{2a}$
$\Delta=0$			
$\Delta<0$			

3.性质

单调性、最大值与最小值、奇偶性、对称性见表 2-3.

表 2-3

	$y=ax^2+bx+c$ $(a>0,b\neq 0)$	$y=ax^2+bx+c$ $(a>0,b=0)$	$y=ax^2+bx+c$ $(a<0,b\neq 0)$	$y=ax^2+bx+c$ $(a<0,b=0)$
开口方向	向上		向下	
单调性	在区间$\left(-\infty,-\frac{b}{2a}\right]$上单调递减； 在区间$\left[-\frac{b}{2a},+\infty\right)$上单调递增	在区间$(-\infty,0]$上单调递减； 在区间$[0,+\infty)$上单调递增	在区间$\left(-\infty,-\frac{b}{2a}\right]$上单调递增； 在区间$\left[-\frac{b}{2a},+\infty\right)$上单调递减	在区间$(-\infty,0]$上单调递增； 在区间$[0,+\infty)$上单调递减
最大值	无	无	$\frac{4ac-b^2}{4a}$	c

续表

	$y=ax^2+bx+c$ $(a>0,b\neq 0)$	$y=ax^2+bx+c$ $(a>0,b=0)$	$y=ax^2+bx+c$ $(a<0,b\neq 0)$	$y=ax^2+bx+c$ $(a<0,b=0)$
最小值	$\dfrac{4ac-b^2}{4a}$	c	无	无
奇偶性	非奇非偶	偶函数	非奇非偶	偶函数
对称性	关于 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 对称	关于 y 轴对称	关于 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 对称	关于 y 轴对称

4. $y=ax^2+bx+c$ 与 $y=ax^2$ 的图象的关系

当 $a\neq 0$ 时，$y=ax^2+bx+c$ 与 $y=ax^2$ 的图象是平移关系.$y=ax^2$ 的顶点坐标是 $(0,0)$，而 $y=ax^2+bx+c$ 的顶点坐标是 $\left(-\dfrac{b}{2a},\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$，两函数开口方向和幅度一致，则将其中一个函数的图象的顶点移动至另一个函数顶点处，即可得到另一个函数的图象.

例 3 已知 $y=(m-1)x^2+2mx+3$ 是偶函数，化简该式并求其最大值或最小值.

解 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 是偶函数的条件是 $b=0$，因 $y=(m-1)x^2+2mx+3$ 是偶函数，所以 $2m=0$，$m=0$，故 $y=-x^2+3$.

因为 $a<0$，故 $y=-x^2+3$ 没有最小值而有最大值，当 $x=0$ 时，y 取得最大值，$y_{max}=3$.

例 4 已知 $y_1=2x^2+5$，$y_2=2x^2+6x+1$，它们的图象的形状是否相同？若相同，如何将 $y_1=2x^2+5$ 的图象平移得到 $y_2=2x^2+6x+1$ 的图象.

解 因函数 y_1 与 y_2 的二次项的系数相等，故两函数图象的形状及开口方向相同.

$$y_2=2x^2+6x+1=2\left[x^2+3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2\right]-\frac{9}{2}+1=2\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{7}{2}.$$

该函数开口向上，且当 $x=-\dfrac{3}{2}$ 时，y 取最小值，$y_{min}=-\dfrac{7}{2}$. 故该函数图象的顶点是 $\left(-\dfrac{3}{2},-\dfrac{7}{2}\right)$，$y_1=2x^2+5$ 的顶点坐标是 $(0,5)$.

因此，将函数 $y_1=2x^2+5$ 的图象向左平移至 $x=-\dfrac{3}{2}$，再向下平移至 $y=-\dfrac{7}{2}$ 即可得到函数 y_2 的图象.

四、反比例函数

1.定义

函数 $y=\dfrac{k}{x}(k,x\neq 0)$叫作**反比例函数**.定义域与值域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

2.图象、奇偶性、对称性、单调性(图 2-3)

$y=\dfrac{k}{x}(k,x\neq 0)$是奇函数,以坐标原点为对称中心.当 $k>0$ 时,在区间$(-\infty,0)$和$(0,+\infty)$内分别单调递减;当 $k<0$ 时,在区间$(-\infty,0)$和$(0,+\infty)$内分别单调递增.

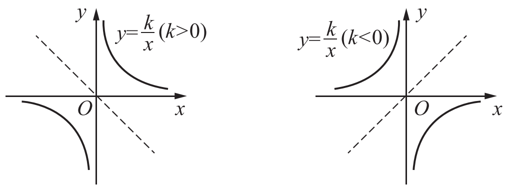


图 2-3

五、指数函数

(一)指数

1.指数的基本概念

(1)正整数指数幂 $a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}_{n个}$($n$ 为正整数);

(2)零指数幂 $a^0=1(a\neq 0)$;

(3)负整数指数幂 $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}(a\neq 0)$;

(4)分数指数幂$\begin{cases}正分数指数幂\quad a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}, \\ 负分数指数幂\quad a^{-\frac{m}{n}}=\dfrac{1}{a^{\frac{m}{n}}}=\sqrt[n]{\dfrac{1}{a^m}}=\dfrac{1}{\sqrt[n]{a^m}};\end{cases}\quad (a>0)$

(5)有理数指数幂 $a^x(x\in\mathbf{R})$.

2.指数幂的运算法则

(1)$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$;

(2)$(a^m)^n=a^{mn}$;

(3)$(ab)^m=a^mb^m$;

(4)$a^m\div a^n=a^{m-n}$.

上式中,$a>0$,$b>0$,m,n 都是实数.

例 5 化简$\left\{\left[1+\left(\dfrac{1}{10^9}\right)^2\right]^{10^9}\right\}^{10^9}$.

解 $\left\{\left[1+\left(\dfrac{1}{10^9}\right)^2\right]^{10^9}\right\}^{10^9}=\left[1+\left(\dfrac{1}{10^{18}}\right)\right]^{10^9\times 10^9}=\left(1+\dfrac{1}{10^{18}}\right)^{10^{18}}$.

例 6 化简$(x^{-1}+y^{-1})(x^{-2}-x^{-1}y^{-1}+y^{-2})$.

解　原式$=(x^{-1})^3+(y^{-1})^3=x^{-3}+y^{-3}$.

例 7 化简$\dfrac{a^{-1}-1}{a^{-1}+1}-\dfrac{a^{-1}+1}{a^{-1}-1}$.

解　原式$=\dfrac{(a^{-1}-1)^2-(a^{-1}+1)^2}{(a^{-1}+1)(a^{-1}-1)}=\dfrac{-4a^{-1}}{a^{-2}-1}=\dfrac{4a^{-1}}{1-a^{-2}}=\dfrac{4a^{-1}\cdot a^2}{a^2-1}=\dfrac{4a}{a^2-1}$.

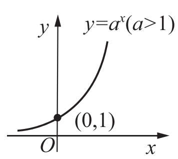
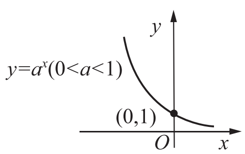
(二)指数函数

1.定义

形如 $y=a^x(a>0,a\neq1)$的函数叫作**指数函数**.其定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$(0,+\infty)$.

2.图象和性质(表 2-4)

表 2-4

	$a>1$	$0<a<1$
图象		
性质	$y>0$,图象在 x 轴的上方	
	当 $x=0$ 时,$y=1$,图象经过点$(0,1)$	
	当 $x>0$ 时,$y>1$; 当 $x<0$ 时,$0<y<1$	当 $x>0$ 时,$0<y<1$; 当 $x<0$ 时,$y>1$
	在$(-\infty,+\infty)$内是增函数	在$(-\infty,+\infty)$内是减函数

六、对数函数

(一)对数

1.定义

如果 $a(a>0,a\neq1)$的 b 次幂等于 N,那么 b 叫作以 a 为底 N 的**对数**,记作 $\log_a N=b$.

2.对数的性质

(1)零和负数没有对数(因为 $a>0,a^b=N$,使 N 为零或负数的 b 并不存在);

(2)$\log_a 1=0,\log_a a=1$;

(3)恒等式:$a^{\log_a N}=N$;

(4)单调性:$y=\log_a x\,(a>1)$在区间$(0,+\infty)$内是增函数.$y=\log_a x\,(0<a<1)$在区间$(0,+\infty)$内是减函数.

3.对数运算法则

(1)$\log_a(MN)=\log_a M+\log_a N$;　　(2)$\log_a\left(\dfrac{M}{N}\right)=\log_a M-\log_a N$;

(3)$\log_a M^n=n\log_a M$;　　(4)$\log_a\sqrt[n]{M}=\dfrac{1}{n}\log_a M$.

4.换底公式

设 $a,b,N>0$ 且 $a\neq1,b\neq1$,则有 $\log_a N=\dfrac{\log_b N}{\log_b a}$,

同理可得 $\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$,$\log_{a^n} b=\dfrac{1}{n}\log_a b$.

5.常用对数与自然对数

以 10 为底的对数叫作常用对数:$\log_{10}N$,简记为 $\lg N$.

以 e 为底的对数叫作自然对数:$\log_e N$,简记为 $\ln N$,$e=2.718\ 281\ 828\ 459\cdots$.

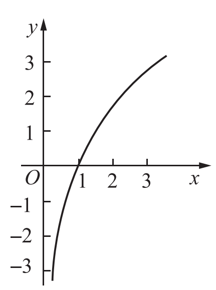
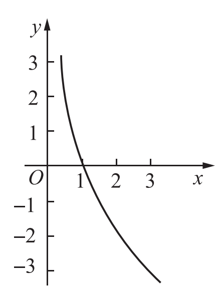
(二)对数函数

1.定义

函数 $y=\log_a x\,(a>0$ 且 $a\neq1)$叫作**对数函数**.其定义域为$(0,+\infty)$,值域为$(-\infty,+\infty)$.

2.图象和性质(表 2-5)

表 2-5

<table>
<tr><th></th><th>$a>1$</th><th>$0<a<1$</th></tr>
<tr><td>图象</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="4">性质</td><td colspan="2">图象在 y 轴的右侧</td></tr>
<tr><td colspan="2">当 $x=1$ 时,$y=0$,图象经过点$(1,0)$</td></tr>
<tr><td>当 $x>1$ 时,$y>0$;
当 $0<x<1$ 时,$y<0$</td><td>当 $x>1$ 时,$y<0$;
当 $0<x<1$ 时,$y>0$</td></tr>
<tr><td>在$(0,+\infty)$内是增函数</td><td>在$(0,+\infty)$内是减函数</td></tr>
</table>

例 8 求 $y=\log_a(\log_a x)$ 的定义域.

解 要使 $y=\log_a(\log_a x)$ 有意义，则

$$\begin{cases}\log_a x>0,\\ x>0,\end{cases} \text{即} \begin{cases}\log_a x>\log_a 1, & ①\\ x>0, & ②\end{cases}$$

当 $0<a<1$ 时，随 x 增大，$\log_a x$ 减小，则要使 $\log_a x>\log_a 1$ 成立，必有 $x<1$，又由②得 $x>0$，所以 x 的取值范围是 $0<x<1$；

当 $a>1$ 时，随 x 增大，$\log_a x$ 增大，则要使 $\log_a x>\log_a 1$ 成立，必有 $x>1$，又由②得 $x>0$，所以 x 的取值范围是 $x>1$.

因此 $y=\log_a(\log_a x)$ 的定义域为 $\begin{cases}0<x<1(0<a<1),\\ x>1(a>1).\end{cases}$

例 9 设 $3<\left(\frac{1}{3}\right)^x<27$，求 x 的取值范围.

解 原式两边取以 3 为底的对数，$\log_3 3<x(\log_3 1-\log_3 3)<\log_3 27$，

得 $1<-x<3$，即 $-3<x<-1$.

例 10 求 $\log_2(6-5x-x^2)$ 的定义域.

解 要使 $\log_2(6-5x-x^2)$ 有意义，则必有 $6-5x-x^2>0$. 故 $\log_2(6-5x-x^2)$ 的定义域是使 $6-5x-x^2>0$ 成立的 x 值的集合.

由 $6-5x-x^2>0$ 得 $x^2+5x-6<0$，得 $(x+6)(x-1)<0$，即定义域为 $-6<x<1$.

同步练习

一、选择题

1. 函数 $y=\sqrt{x^2}$ 是(A)

A. 偶函数　　B. 奇函数

C. 非奇非偶函数　　D. 既是奇函数又是偶函数

2. 既不是奇函数也不是偶函数的是(D)

A. $y=3x$　　B. $y=3x^2$　　C. $y=\frac{3}{x}$　　D. $y=3^x$

3.$y=ax^2-4x+a-3$ 的最大值为负值，则 a 的取值范围是（ B ）

A.$(-1,0)$　　B.$(-\infty,-1)$

C.$(-\infty,-1)\cup(-1,0)$　　D.$(4,+\infty)$

4.抛物线 $x^2=-2y+2$ 的开口方向和顶点坐标分别是（ D ）

A.开口向左，顶点$(0,-1)$　　B.开口向左，顶点$(0,1)$

C.开口向下，顶点$(0,-1)$　　D.开口向下，顶点$(0,1)$

5.已知 $4<\left(\frac{1}{4}\right)^x<64$，则（ C ）

A.$-1<x<3$　　B.$x>3$ 或 $x<-1$

C.$-3<x<-1$　　D.$1<x<3$

6.在区间$(0,+\infty)$上为增函数的是（ C ）

A.$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$　　B.$y=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$

C.$y=x^2-\frac{1}{2}$　　D.$y=\log_{\frac{1}{2}}x$

7.下列函数的图象与 $y=f(x)$的图象关于原点对称的是（ C ）

A.$y=-f(x)$　　B.$y=f(-x)$

C.$y=-f(-x)$　　D.$y=|f(x)|$

8.下列函数的图象向右平移一个单位长度之后，与 $y=f(x)$的图象重合的是（ A ）

A.$y=f(x+1)$　　B.$y=f(x-1)$

C.$y=f(x)+1$　　D.$y=f(x)-1$

9.已知函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$，那么该函数（ D ）

A.是奇函数，且在$(-\infty,0)$上单调增加

B.是偶函数，且在$(-\infty,0)$上单调减少

C.是奇函数，且在$(0,+\infty)$上单调增加

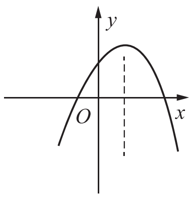
D.是偶函数，且在$(0,+\infty)$上单调减少

10.已知 $y=f(x)(x\in\mathbf{R})$是以 3 为周期的奇函数，且 $f(1)>1$，$f(2)=a$，那么（ B ）

A.$a>1$　　B.$a<-1$

C.$a>2$　　D.$a<-2$

11.如图是二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象，则 a,b,c 和 Δ 的取值范围是（ B ）



A.$a>0,b<0,c>0,\Delta>0$

B.$a<0,b>0,c>0,\Delta>0$

C.$a>0,b<0,c>0,\Delta<0$

D.$a<0,b<0,c>0,\Delta>0$

12.二次函数 $y=-2(x-3)^2+1$ 的图象由函数 $y=-2x^2$ 的图象经过下列平移得到的是(A)

A.先向右平移 3 个单位,再向上平移 1 个单位

B.先向左平移 3 个单位,再向上平移 1 个单位

C.先向右平移 3 个单位,再向下平移 1 个单位

D.先向左平移 3 个单位,再向下平移 1 个单位

13.$f[f(x)]=x^4-6x^2+6$,则(C)

A.$f(x)=x^2-12$　　B.$f(x)=x^2+6$

C.$f(x)=x^2-3$　　D.$f(x)=x^2-6$

14.下列函数中,在区间$(0,+\infty)$上是增函数的是(B)

A.$y=-x^2$　　B.$y=x^2-2$　　C.$y=\left(\dfrac{1}{5}\right)^x$　　D.$y=\log_2\dfrac{1}{x}$

15.已知函数 $f(x)$为奇函数,当 $x\in(0,1)$时,$f(x)=\lg(x+1)$,那么当 $x\in(-1,0)$时,$f(x)$的表达式为(B)

A.$-\lg(x+1)$　　B.$-\lg(1-x)$

C.$\lg(1-x)$　　D.$\dfrac{1}{2}\lg(x+1)^2$

16.已知函数 $f(3x)=\log_2\sqrt{\dfrac{9x+5}{2}}$,则 $f(1)=$(A)

A.1　　B.$\log_2\sqrt{7}$　　C.-1　　D.$-\log_2\sqrt{7}$

17.设 $f(x)=\dfrac{1+x}{1-x}$,则 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=$(C)

A.$\dfrac{1-x}{1+x}$　　B.$\dfrac{1+x}{1-x}$

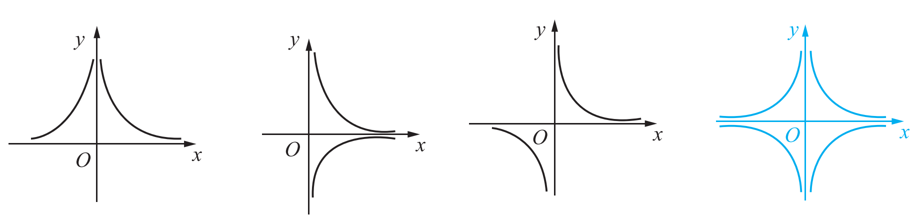
C.$\dfrac{x+1}{x-1}$　　D.$\dfrac{x-1}{x+1}$

18.下列函数中,定义域为全体实数的是(D)

A.$y=\sqrt{x^2-x}$　　B.$\dfrac{1}{\lg|x+1|}$

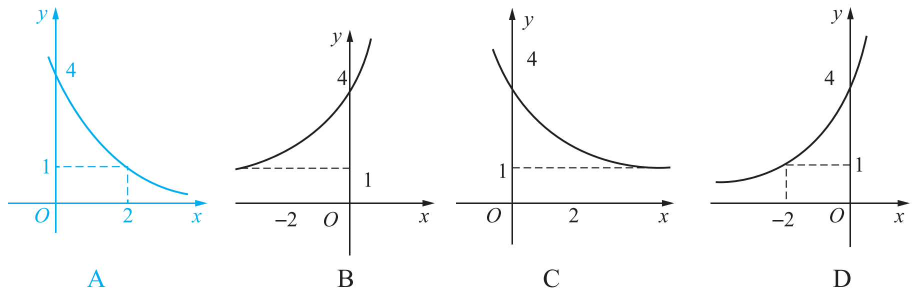
C.$y=\dfrac{x}{(x+2)^2-1}$　　D.$y=\sqrt{(x+2)^2+1}$

19.函数$|y|=\dfrac{1}{|x|}$的图象是(D)

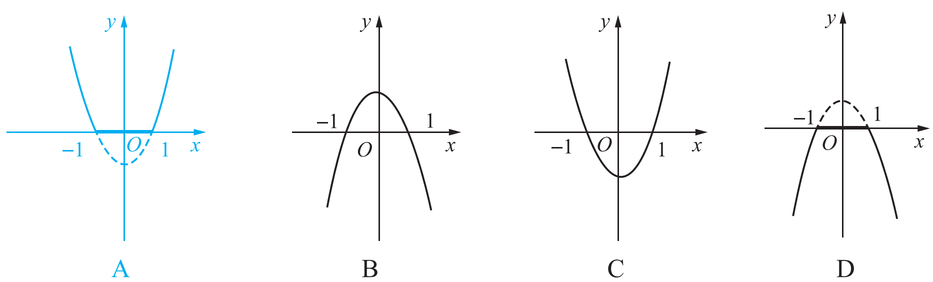


A　　B　　C　　D

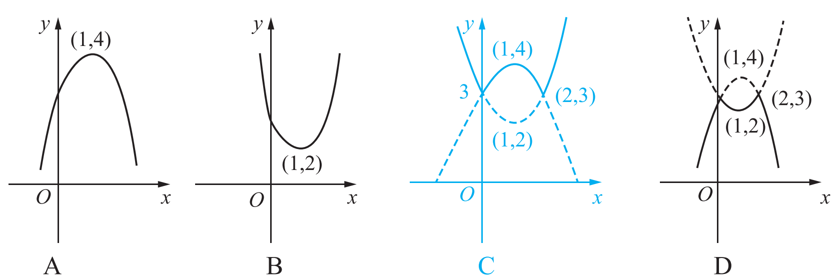
20.函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}$ 的图象是（ A ）



21.函数 $y=\frac{1}{2}[|x^2-1|+(x^2-1)]$的图象是（ A ）



22.函数 $y=|x^2-2x|+3$ 的图象是（ C ）

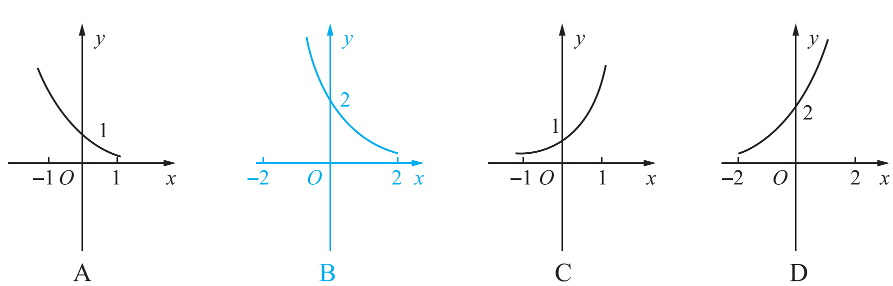


23.下列函数中，既是奇函数，又是单调递减的函数是（ D ）

A.$y=-x^{-1}$　　　　B.$y=\log_{0.3}0.5x$

C.$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$　　　　D.$y=\log_{0.3}2^{x}$

24.函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$ 的图象是（ B ）



25.如果指数函数 $y=-a^x$ 的图象经过点$(2,-16)$，则 $a=$(C)

A.2　　B.-2　　C.4　　D.-4

26.函数 $y=\sqrt{x^2+3x+2}+\log_2 3x$ 的定义域为(C)

A.$x>-1$　　B.$x\geqslant-2$　　C.$x>0$　　D.$-2<x<-1$

二、填空题

1.函数 $y=\lg(4x-x^2-3)$的单调区间是________.

2.已知 $\log_{\frac{1}{2}}2x<\log_{\frac{1}{2}}(x+2)$，则 $x\in$________.

3.函数 $y=\sqrt{8-2^{x+1}}+\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x-1)}$的定义域是________.

4.二次函数 $y=20+x-\frac{x^2}{5}$的最大值为________，此时 $x=$________.

5.二次函数 $y=f(x)$的最小值 $f(1)=-45$，且它的图象经过点$(0,-40)$，则 $a=$________，$b=$________，$c=$________.

6.正方形边长是 3，若边长增加 x，面积增加 y，则 y 与 x 的函数关系式为________.

7.已知函数 $f(x)=kx+5$，设 $f(2)=3$，则使得 $f(x)>0$ 的 x 的取值范围是________.

8.已知二次函数的图象以点$(1,3)$为顶点，并经过点$(2,5)$，则此二次函数的解析式为 $y=$________.

9.已知函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象经过点$(0,24)$，且当 $x=\frac{1}{2}$时，y 达到最大值 25，则 $a=$________，$b=$________，$c=$________.

10.函数 $y=|x^2-4|-3x$ 在区间$[-2,5]$中，当 $x=$________时，取最大值为________；当 $x=$________时，取最小值为________.

三、判断函数奇偶性

1.已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$，判断 $f(x)$的奇偶性.

2.函数 $f(x)=a^x-a^{-x}(a\neq1)$，判断 $f(x)$的奇偶性.

四、解答题

1.求函数 $y=(1+x)^0-\frac{\sqrt{1+x}}{x}$的定义域.

2.已知一个长为4，宽为3的矩形，当长增加x时，宽减少$\frac{x}{2}$.问当x取何值时矩形面积最大，最大面积为多少？

3.(1)已知函数$f(x)=ax+c$，$f(1)=1$，$f(2)=4$，求a与c的值.

(2)已知$f(x)=1-ax^2$，$g(x)=2x+b$，且$f(1)+g(-2)=-1$，$f(-2)-g(1)=2$，求a和b的值.

(3)设函数$y=f(x)$为一次函数，已知$f(2)=8$，$f(-6)=4$，求$f(22)$.

4.等腰直角三角形的腰长为l，要使其内接矩形的面积为最大，那么矩形的长与宽应各为多少？

5.已知$f(x)=x^2+2mx+m^2-\frac{m}{2}-\frac{3}{2}$，当$x\in(0,+\infty)$时$f(x)>0$，求$m$的取值范围.

6.设$2x-3y-z=0$，$x+3y-14z=0$，$x\neq 0$，求$\frac{x^3y+5xyz+xz}{y^2+z^2}$的最小值.

7.弹簧伸长的长度与下面所挂砝码的重量成正比.已知弹簧挂20g重的砝码时长度是12cm，挂35g重的砝码时长度是15cm.写出弹簧长度y(cm)与砝码重x(g)的函数关系式，并求弹簧不挂砝码时的长度.

8.火车由A站出发，经过B站开往C站.已知A、B两站相距150km，B、C两站相距180km，火车速度为60km/h.写出火车越过B站的距离y(km)与时间t(h)的函数关系式，并求出函数的定义域与值域.

9.一圆柱形水桶,底面半径为 20cm,桶高 80cm,把体积 $V(cm^3)$表示为水面高 h(cm)的函数关系式,并求出函数的定义域与值域.

10.一台机器每年的折旧率为 4%,大约经过多少年,它的价值相当于原来的$\frac{1}{2}$?(已知 $\lg2=0.3010$,$\lg3=0.4771$)

参考答案

二、填空题

1.(1,2],[2,3)　　2.$(2,+\infty)$　　3.$1<x\leqslant2$　　4.$\frac{85}{4}$　$\frac{5}{2}$

5.5　-10　-40　　6.$y=x^2+6x$　　7.$x<5$　　8.$2x^2-4x+5$

9.-4　4　24　　10.$-\frac{3}{2}$　$\frac{25}{4}$　2　-6

三、判断函数奇偶性

1.$f(x)$的定义域为 $\mathbf{R}$,$\because f(-x)=\frac{1}{2}(e^{-x}-e^{-(-x)})=-\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})=-f(x)$,

$\therefore f(x)=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$是奇函数.

2.$f(x)$的定义域为 $\mathbf{R}$,$\because f(-x)=a^{-x}-a^x=-f(x)$,$\therefore f(x)$为奇函数.

四、解答题

1.$\{x|x>-1$ 且 $x\neq0\}$

2.当 $x=1$ 时矩形面积最大,最大面积为 12.5

3.(1)$a=3$,$c=-2$　(2)$a=-1$,$b=1$　(3)18

4.长为$\frac{\sqrt{2}}{2}l$,宽为$\frac{\sqrt{2}}{4}l$

5.$m<-3$ 或 $m>\frac{3}{2}$

6.$\frac{1}{8}$

7.$y=\frac{1}{5}x+8$，8cm

8.函数关系式 $y=60t-150$　定义域是 $0\leqslant t\leqslant 5.5$

相应值域是 $-150\leqslant y\leqslant 180$

9.函数式为 $V=400\pi h$　定义域为 $0\leqslant h\leqslant 80$

值域为 $0\leqslant V\leqslant 32000\pi$

10.$x\approx 17$ 年

第三章 不等式和不等式组

考点要求

1.理解不等式的性质,会用不等式的性质和基本不等式 $a^2+b^2\geqslant 2ab(a,b\in\mathbf{R})$,$|a+b|\leqslant|a|+|b|(a,b\in\mathbf{R})$解决一些简单的问题.

2.会解一元一次不等式、一元一次不等式组和可化为一元一次不等式组的不等式.会解一元二次不等式.会表示不等式或不等式组的解集.

3.了解绝对值不等式的性质,会解形如 $|ax+b|\geqslant c$ 和 $|ax+b|\leqslant c$ 的绝对值不等式.

知识解读

一、不等式的有关概念

(一)不等式的概念

1.不等式的意义

用不等号连接的两个式子,称为不等式.若 $a,b\in\mathbf{R}$,有 $a-b>0\Leftrightarrow a>b$;$a-b=0\Leftrightarrow a=b$;$a-b<0\Leftrightarrow a<b$.

2.不等式的性质

(1)如果 $a>b$,那么 $b<a$;如果 $a<b$,那么 $b>a$;

(2)如果 $a>b,b>c$,那么 $a>c$;

(3)如果 $a>b$,那么 $a+c>b+c$;

(4)如果 $a>b,c>0$,那么 $ac>bc$;如果 $a>b,c<0$,那么 $ac<bc$;

(5)如果 $a>b,c>d$,那么 $a+c>b+d$;

(6)如果 $a>b>0,c>d>0$,那么 $ac>bd$;

(7)如果 $a>b,ab>0$,则 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$;

(8)如果 $a>b>0$，那么 $a^n>b^n(n\in\mathbf{Z}^+$，且 $n>1)$；

(9)如果 $a>b>0$，那么 $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}(n\in\mathbf{Z}^+$，且 $n>1)$；

(10)$|a+b|\leqslant|a|+|b|(a,b\in\mathbf{R}$，且当 a,b 同号时取等号).

3.几个常用的不等式

设 $a,b\in\mathbf{R}$，

(1)$a^2\geqslant0$；

(2)$a^2+b^2\geqslant2ab$（当且仅当 $a=b$ 时等号成立）；

(3)若 $a\geqslant0,b\geqslant0$ 则 $a+b\geqslant2\sqrt{ab}$；

(4)若 $a>0$，则 $a+\dfrac{1}{a}\geqslant2$（当且仅当 $a=1$ 时等号成立）.

例 1 若 $-a>a^2$，则实数 a 的取值范围是(　　)

A.$a\in\varnothing$　　B.$a<0$　　C.$-1<a<0$　　D.$a>-1$

解　C.

例 2 若 a,b,c,d 都为正实数，且 $ad\neq bc$，求证：$(a^2+b^2)(c^2+d^2)>(ac+bd)^2$.

证明　$(a^2+b^2)(c^2+d^2)-(ac+bd)^2=a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2-a^2c^2-2abcd-b^2d^2=a^2d^2-2abcd+b^2c^2=(ad-bc)^2$，因为 $ad\neq bc$，所以 $(ad-bc)^2>0$，所以 $(a^2+b^2)(c^2+d^2)>(ac+bd)^2$.

(二)不等式解的有关概念

1.不等式的解

能使不等式成立的未知数的值的集合，称为不等式的解集.

若任何实数都不能使不等式成立，则此不等式的解集为空集.如，不等式 $x^2+1<0$ 的解集为空集.

2.解不等式

求不等式解的过程，称为解不等式.

3.同解不等式

两个不等式的解相同，那么这两个不等式称为同解不等式.

4.同解原理

(1)在不等式的不等号两边同时加上(或减去)同一个数或同一个式子，所得到的不等式与原不等式的解相同；

(2)在不等式的不等号两边同时乘以(或除以)一个正数，所得到的不等式与原不等式的解相同；

(3)在不等式的不等号两边同时乘(或除以)一个负数,改变原不等号方向后,与原不等式的解相同.

二、一元一次不等式

(一)一元一次不等式

1.意义

含有一个未知数,且未知数的最高次数为 1 的不等式,称为一元一次不等式.

2.解法

一般解法的步骤与解一元一次方程类似.即去分母、去括号、移项合并同类项、两边同除以未知数的系数.但要注意,两边同除以未知数的系数,若是负数,就要改变原不等号方向.

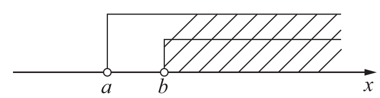
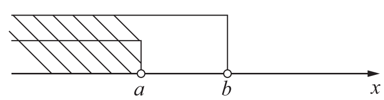
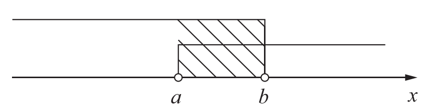
(二)一元一次不等式组

1.定义

由两个或两个以上的一元一次不等式组成的不等式组,称为一元一次不等式组.

2.一元一次不等式组的解集可以归纳为 4 种类型(表 3-1)

表 3-1

类型(设 $a<b$)	解集	数轴表示
$\begin{cases}x>a\\x>b\end{cases}$	$x>b$	
$\begin{cases}x<a\\x<b\end{cases}$	$x<a$	
$\begin{cases}x>a\\x<b\end{cases}$	$a<x<b$	
$\begin{cases}x<a\\x>b\end{cases}$	空集	

一元一次不等式组中,各个不等式解的交集,为这个一元一次不等式组的解.

例3 解下列不等式组：

(1) $\begin{cases}1-\dfrac{x+1}{2}<2-\dfrac{x+2}{3},\\ x(x-1)\geqslant(x+3)(x-3);\end{cases}$ (2) $\begin{cases}3+x<4+2x,\\ 5x-3<4x-1,\\ 7+2x>6+3x.\end{cases}$

解 (1)分别解不等式组中的两个不等式，解得$\begin{cases}x>-5,\\ x\leqslant 9,\end{cases}$所以原不等式组的解为$-5<x\leqslant 9$.

(2)分别解不等式组中的3个不等式，解得$\begin{cases}x>-1,\\ x<2,\\ x<1,\end{cases}$ 3个不等式的交集为$-1<x<1$，即原不等式组的解为$-1<x<1$.

例4 求不等式组$\begin{cases}\dfrac{x+1}{2}<2,\\ \dfrac{x+2}{3}<1+\dfrac{x+1}{2}\end{cases}$的最大整数解.

解 分别解不等式组中的两个不等式，得$x<3$且$x>-5$，所以原不等式组的解为$-5<x<3$，在$-5<x<3$中最大的整数为2，所以原不等式组的最大整数解为2.

例5 当y在什么范围内取值时，代数式$\dfrac{y+1}{3}-\dfrac{y-1}{2}-\dfrac{y-1}{6}$的值为非负数？

解 依题意$\dfrac{y+1}{3}-\dfrac{y-1}{2}-\dfrac{y-1}{6}\geqslant 0$，整理得$-2y+6\geqslant 0$，所以$y\leqslant 3$，即当$y\leqslant 3$时，原代数式的值为非负数.

三、绝对值不等式

(一)绝对值不等式的概念

含有绝对值符号，且绝对值符号内含有未知数的不等式，称为绝对值不等式，如，$|3x-1|<2$，$|5x|>1$.

(二)绝对值不等式的解法

绝对值不等式的解法可分为两种类型.

(1) $|x|>a\ (a>0)$，其解集为$\{x\mid x>a$ 或 $x<-a\}$；

(2) $|x|<a\ (a>0)$，其解集为$\{x\mid -a<x<a\}$.

若 $a\leqslant 0$ 时，不等式 $|x|<a$ 的解集为空集；若 $a<0$ 时，不等式 $|x|>a$ 的解集是实数集.

例 6 解不等式 $|3x+2|-5>0$.

解　因为 $|3x+2|>5$，所以 $3x+2>5$ 或 $3x+2<-5$，即 $x>1$ 或 $x<-\frac{7}{3}$，

所以原不等式的解为 $\left\{x \mid x>1 \text{ 或 } x<-\frac{7}{3}\right\}$.

例 7 若不等式 $|x+a|<a$ 的解集为 $\{x \mid -2<x<0\}$，则 a 的取值范围为________.

解　因为 $|x+a|<a$，又因为其解为 $\{x \mid -2<x<0\}$，所以 $a>0$，所以 $-a<x+a<a$，所以 $-2a<x<0$，所以 $a=1$.

四、一元二次不等式

(一)一元二次不等式的有关概念

1.一元二次不等式的概念

含有一个未知数，且未知数的指数最高为二次的不等式，称为一元二次不等式.

2.一元二次不等式的一般形式

$$ax^2+bx+c>0(a>0),\quad ax^2+bx+c<0(a>0).$$

(二)一元二次不等式的解法

在解一元二次不等式时，首先要把一元二次不等式化为一般形式再解，再看判别式 $\Delta=b^2-4ac$ 的符号，再根据 b^2-4ac 的符号，用不同的方法来解.

1.$\Delta=b^2-4ac>0$

若 $\Delta=b^2-4ac>0$，则设 $ax^2+bx+c=0$，解出此方程的两根 x_1, x_2，且 $x_1<x_2$.

若 $ax^2+bx+c>0(a>0)$，则它的解为 $x>x_2$ 或 $x<x_1$；若 $ax^2+bx+c<0(a>0)$，则它的解为 $x_1<x<x_2$.

另一解法：因为 $\Delta>0$，所以不等式 $ax^2+bx+c>0(a>0)$ 可分解得 $(x-x_1)(x-x_2)>0$，所以 $x-x_1$ 与 $x-x_2$ 同号，因此可分为两个不等式组，即 $\begin{cases}x-x_1>0,\\x-x_2>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x-x_1<0,\\x-x_2<0,\end{cases}$ 这两个不等式组的解为原不等式的解.

若 $ax^2+bx+c<0(a>0)$，可分解为 $(x-x_1)(x-x_2)<0$，也可分为两个不等式组，即 $\begin{cases}x-x_1>0,\\x-x_2<0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x-x_1<0,\\x-x_2>0,\end{cases}$ 这两个不等式组的解为原不等式的解.

例 8 解下列不等式：

(1)$2x^2-x-1>0$；　　(2)$-3x^2-5x+1>0$.

解 (1)解法一：因为 $\Delta=1-4\times2\times(-1)>0$，所以设 $2x^2-x-1=0$，解出此方程的两个实数解 $x_1=-\frac{1}{2}$，$x_2=1$，因为 $2x^2-x-1>0$，所以它的解集为$\left\{x\,|\,x>1 \text{ 或 } x<-\frac{1}{2}\right\}$.

解法二：因为 $\Delta>0$，所以 $2x^2-x-1=(2x+1)(x-1)$，所以$(2x+1)(x-1)>0$，所以可分为两个不等式组，即为$\begin{cases}2x+1>0,\\x-1>0\end{cases}$或$\begin{cases}2x+1<0,\\x-1<0,\end{cases}$解这两个不等式组，所以原不等式的解集为$\left\{x\,|\,x>1 \text{ 或 } x<-\frac{1}{2}\right\}$.

(2)将原不等式两边同乘以-1得 $3x^2+5x-1<0$，$\Delta=b^2-4ac=25-4\times3\times(-1)>0$，设 $3x^2+5x-1=0$，解得 $x=\frac{-5\pm\sqrt{37}}{6}$，所以原不等式的解为$\frac{-5-\sqrt{37}}{6}<x<\frac{-5+\sqrt{37}}{6}$.

2.$\Delta=b^2-4ac=0$

如果 $\Delta=b^2-4ac=0$，则 ax^2+bx+c 可表示为完全平方形式，即原不等式可化为$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2>0$或$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2<0$.因为 $a>0$，所以 $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2>0$ 的解为 $x\neq-\frac{b}{2a}$的一切实数，$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2<0$ 的解集为空集，即不等式 $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2<0$ 无解.

例 9 解不等式 $4x^2+4x+1>0$.

解 因为 $\Delta=b^2-4ac=4^2-4\times4\times1=0$，所以原不等式可化为$(2x+1)^2>0$，所以原不等式的解为 $x\neq-\frac{1}{2}$的一切实数.

例 10 解不等式 $x^2+6x+9<0$.

解 因为 $\Delta=36-4\times9=0$，所以原不等式可表示为$(x+3)^2<0$，又因为任何实数的平方都不会小于 0，所以$(x+3)^2<0$ 无解，则原不等式的解集为空集.

3.$\Delta=b^2-4ac<0$

如果 $\Delta=b^2-4ac<0$，则原不等式可化为 $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}>0$ 或 $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}<0$，因

为 $b^2-4ac<0$，所以 $4ac-b^2>0$，又 $a>0$，所以 $\frac{4ac-b^2}{4a}>0$，又因为 $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\geqslant 0$，所以 $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}>0$，所以当 x 取任何实数时，不等式都成立，所以原不等式的解为一切实数.

同理：当不等式 $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}<0$，不论 x 取任何实数，不等式都不能成立，即原不等式无解.

例 11　解不等式 $x^2+3x+5>0$.

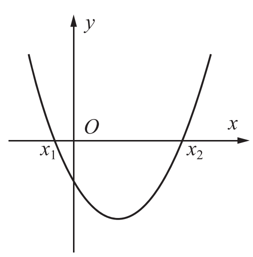
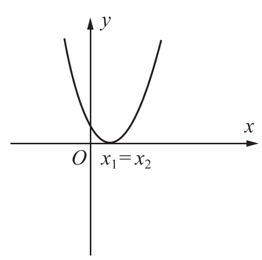
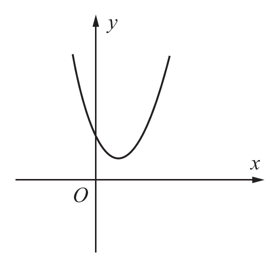
解　因为 $\Delta=9-4\times5<0$，所以原不等式可化为 $\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{11}{4}>0$，所以 x 取任何实数，原不等式都成立，即原不等式的解集为实数集.

例 12　解不等式 $2x^2-5x+6<0$.

解　因为 $\Delta=25-4\times2\times6<0$，又因为 $a=2>0$，所以 x 取任何值时，不等式都不能成立，所以原不等式无解.

说明　一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0(a>0)$ 或 $ax^2+bx+c<0(a>0)$ 的解法，归纳为表 3-2.

表 3-2

判别式 $\Delta=b^2-4ac$	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
二次函数 $y=ax^2+bx+c(a>0)$ 的图象			
一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的根	有两个不相等的实数根 $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ $(x_1<x_2)$	有两个相等的实数根 $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$	没有实数根
一元二次不等式的解集 $ax^2+bx+c>0$ $(a>0)$	$x<x_1$ 或 $x>x_2$	$x\neq-\frac{b}{2a}$ 的所有实数	全体实数
一元二次不等式的解集 $ax^2+bx+c<0$ $(a>0)$	$x_1<x<x_2$	空集	空集

注意 首项系数为负数时，只要将不等式两边同乘以-1，并把不等号改变方向，就可以化为以上类型.

例 13 关于x的不等式$ax^2+ax+1>0$的解集为实数集，求a的取值范围.

解 因为不等式$ax^2+ax+1>0$的解集为$\mathbf{R}$，所以由不等式解法可知$\Delta=b^2-4ac<0$，又$a>0$，所以$\begin{cases}a^2-4a<0,\\a>0,\end{cases}$所以$0<a<4$，若$a=0$时，原不等式仍成立，所以$a$的取值范围为$0\leqslant a<4$.

例 14 不等式$ax^2+bx+2>0$的解集是$\left\{x\mid -\frac{1}{2}<x<\frac{1}{3}\right\}$，求$a+b$的值.

解 由一元二次不等式的解法可设$ax^2+bx+2=0$，再将$x=-\frac{1}{2}$，$x=\frac{1}{3}$分别代入得

$\begin{cases}\frac{1}{4}a-\frac{1}{2}b+2=0,\\\frac{1}{9}a+\frac{1}{3}b+2=0,\end{cases}$解方程组得$a=-12$，$b=-2$，所以$a+b=-14$.

同步练习

一、选择题

1.一元二次不等式$ax^2+bx-4>0$的解集是$(-1,3)$，则$a+b$的值是（ D ）

A.4　　B.-4　　C.$\frac{4}{3}$　　D.$-\frac{4}{3}$

2.设集合$A=\left\{x\,\middle|\,\frac{1}{x}<2\right\}$，$B=\left\{x\,\middle|\,x>\frac{1}{3}\right\}$，则$A\cap B$等于（ B ）

A.$\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$　　B.$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$

C.$\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{3},+\infty\right)$　　D.$\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$

3.关于x的不等式$\left(k^2-2k+\frac{5}{2}\right)^x<\left(k^2-2k+\frac{5}{2}\right)^{1-x}$的解集是（ B ）

A.$\left\{x\,\middle|\,x>\frac{1}{2}\right\}$　　B.$\left\{x\,\middle|\,x<\frac{1}{2}\right\}$

C.$\{x\mid x>2\}$　　D.$\{x\mid x<2\}$