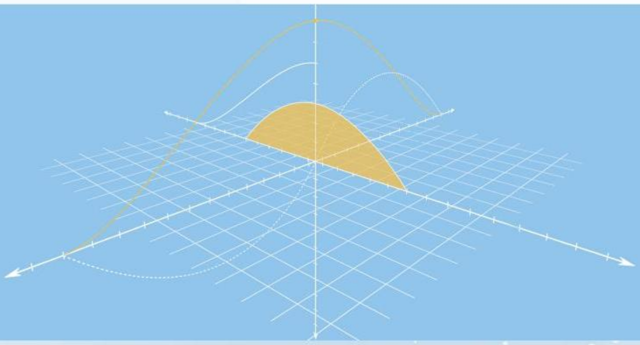
数学分析

类目：数学类
书名：数学分析
主编：陈轶嵩 苏新富 龚雪
出版社：中国建设科技出版社
开本：大 16 开
书号：978-7-5160-4356-1
使用层次：通用
出版时间：2025 年 3 月
定价：48.00 元
印刷方式：双色
是否有资源：否

策划编辑：李亚博
责任编辑：汪永涛
封面设计：旗语书装



数学分析

专·精·志·远
为您提供专业服务
编　辑　部：010-63567684
事业发展中心：010-63567692
网　上　书　店：www.jskjcbs.com

本社微信公众号　本社天猫旗舰店

ISBN 978-7-5160-4356-1
定价：48.00元

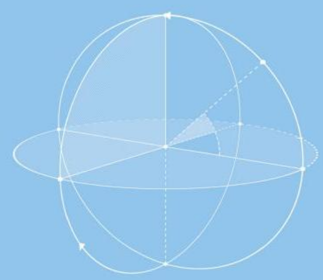
数学类创新融合精品规划教材
“互联网+”教育改革新理念教材

数学分析

主编 ◎ 陈轶嵩　苏新富　龚　雪

中国建材工业出版社有限责任公司

数学类创新融合精品规划教材
“互联网+”教育改革新理念教材



数学分析

主编 ◎ 陈轶嵩　苏新富　龚　雪

中国建材工业出版社有限责任公司
China Construction Science and Technology Press Co., Ltd.

数学类创新融合精品规划教材
“互联网+”教育改革新理念教材

数学分析

主　编◎陈轶嵩　苏新富　龚　雪

中国建设科技出版社有限责任公司
China Construction Science and Technology Press Co., Ltd.
北　京

图书在版编目（CIP）数据

数学分析 / 陈铁嵩，苏新富，龚雪主编. -- 北京 ：中国建设科技出版社有限责任公司，2025. 3. --（数学类创新融合精品规划教材“互联网+”教育改革新理念教材）. -- ISBN 978-7-5160-4356-1

Ⅰ. O17

中国国家版本馆 CIP 数据核字第 2024V7F249 号

数学分析
SHUXUE FENXI
陈铁嵩　苏新富　龚　雪　主　编

出版发行：中国建设科技出版社有限责任公司
地　　址：北京市西城区白纸坊东街 2 号院 6 号楼
邮政编码：100054
经　　销：全国各地新华书店
印　　刷：唐山唐文印刷有限公司
开　　本：880mm×1230mm　1/16
印　　张：12
字　　数：280 千字
版　　次：2025 年 3 月第 1 版
印　　次：2025 年 3 月第 1 次
定　　价：48.00 元

本社网址：www. jskjcbs. com，微信公众号：zgjskjcbs

编　委　会

主　编　陈铁嵩　苏新富　龚　雪

副主编　崔静霞　张　汝　池春姬

前言

PREFACE

本书是按照教育部颁布的教学基本要求和人才培养目标及规格组织编写的，以培养应用型人才为目标，以“强化能力，立足应用”为原则，结合应用数学的教学特点，以及当前教学改革实际和专业需求，力求做到课程融入思政元素，内容精简适用、条理清晰、深入浅出、通俗易懂，突出应用。

本书共分为 9 章，从极限、函数及其性质、导数与微分、微分中值定理及其应用、不定积分、定积分及其应用、级数、多元函数微分学、微分方程进行讲述。根据高素质应用型人才培养的要求，我们对传统的数学分析教材内容进行了整合，使教学内容与技能型人才的培养需要相衔接，与我国目前学生的实际数学水平相衔接。本书注重与实际应用联系较多的数学基础知识、基本方法和基本技能的训练，不追求复杂的计算和证明。内容呈现与讲授过程中，强调直观描述和几何解释，适度淡化理论推导或证明。注重揭示概念的本质，强化数学知识与专业知识和生活实际的联系。培养学生树立正确的人生观、价值观、世界观和良好的科学素养。

书中精心编写了大量与专业和实际生活密切联系的、适合数学教学的应用案例，通过引例的引导学习、习题的强化渗透，使学生能够借助实际问题和专业背景理解数学概念的实质，再利用数学概念和数学思想促进对专业问题和工程原理的认识，从而进一步利用数学方法解决专业中的更多实际问题。

本书在编写过程中借鉴了一些专家、学者的观点，在此对他们表示衷心的感谢。由于编写时间较紧，所以在编写中难免存在局限性，恳请广大读者提出宝贵意见，也请专家、学者给予批评指正，我们将不断努力提高、改进，在此表示衷心感谢。

编　者

2024 年 12 月

CONTENTS
目　录

CONTENTS

目　录

1 极 限

学习目标

知识目标

1. 理解极限的概念，理解极限的唯一性、有界性和保号性，掌握极限的四则运算法则.
2. 理解无穷小量、无穷大量的概念，掌握无穷小量的性质、无穷小量与无穷大量的关系.

能力目标

1. 能根据极限概念描述函数的变化趋势，理解函数在一点处极限存在的充分必要条件.
2. 会比较无穷小量的阶，会运用等价无穷小量替换求极限.

素质目标

1. 提高学生的思维逻辑能力，培养学生的抽象思维能力.
2. 培养学生的问题解决能力，增强学生的数学素养，培养学生的实际应用能力.

1.1 极限的概念

1.1.1 $x \to x_0$ 时 $f(x)$ 的极限

1. 瞬时速度

从旋停在地震灾区上空 50 m 高处的直升机上投放一包救灾物品，忽略空气阻力，记开始下落的时刻为 $t=0$. 试考察在下落的第 3 秒末这一时刻物品的速度.

由于物品下落的速度 v 是不断改变的，因此不能用匀速运动的速度公式

$$v=\frac{s}{t}=\frac{\text{下落路程}}{\text{所用时间}} \tag{1-1}$$

我们注意到，虽然物品下落速度随时间改变，但时间间隔越短，速度的改变就越小，因此，在很小的时间区间$[3,t]$(也可以取$[t,3]$)，下落可近似看成是匀速的. 这样就可以用在$[3,t]$内下落的平均速度$[$记作 $\bar{v}(t)]$来近似代替第 3 秒末这一时刻的速度.

下面计算 $\bar{v}(t)$. 根据自由落体公式 $s(t)=\frac{1}{2}gt^2$(g 为重力加速度)，在时间段$[3,t]$内物品下落的距离为

$$\Delta s=s(t)-s(3)=\frac{1}{2}g(t^2-9)$$

所用时间为 $\Delta t=t-3$. 由上面的平均速度公式式(1-1)，得

$$\bar{v}(t)=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{1}{2}g\cdot\frac{t^2-9}{t-3} \tag{1-2}$$

取 t 的一系列越来越接近 3 的值计算，见表 1-1，其中 t 和 $\bar{v}(t)$ 的单位分别为 s 和 m/s.

表 1-1

t	3.1	3.001	3.000 01	3.000 0001	…	$\to 3$
$\bar{v}(t)$	$3.05g$	$3.0005g$	$3.000\,005g$	$3.0000\,0005g$	…	$\to 3g$

t 的值越接近 3，$\bar{v}(t)$的值作为第 3 秒末这一时刻速度的近似值，其近似程度越高，越能客观反映这一时刻速度的状况，从表中可以看出，当 t 的值无限趋近于 3 时，$\bar{v}(t)$的值无限趋近于 $3g$. 把这个常数 $3g$ 叫作函数 $\bar{v}(t)$当 t 趋向于 3 时的极限，记作 $\lim\limits_{t\to 3}\bar{v}(t)$，即

$$\lim_{t\to 3}\bar{v}(t)=\lim_{t\to 3}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{t\to 3}\frac{s(t)-s(3)}{t-3}=\lim_{t\to 3}\frac{1}{2}g\cdot\frac{t^2-9}{t-3}=3g(\text{m/s})$$

我们就定义这个极限值 $3g$ 为第 3 秒末物品下落的速度，即这一时刻的瞬时速度.

2. $x \to x_0$ 时 $f(x)$ 的极限

首先说明邻域的概念,设 δ 为正实数,称区间 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 为点 x_0 的 δ 邻域,点 x_0 称为邻域中心,δ 称为邻域半径;把 $(x_0-\delta, x_0) \cup (x_0, x_0+\delta)$ 称为点 x_0 的去心 δ 邻域.

设 x_0 是一个定值,x 从 x_0 的两侧以任何方式趋近于 x_0,但始终不等于 x_0,用"$x \to x_0$"表示,读作"x 趋向于 x_0".

定义 1-1 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义(在 x_0 可以没有定义),如果当 $x \to x_0$ 时,$f(x)$ 无限趋近于一个常数 L,那么就说 L 是当 x 趋向于 x_0 时函数 $f(x)$ 的极限,记作

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \text{ 或 } f(x) \to L(x \to x_0)$$

从图形上看,当 $x \to x_0$ 时 L 是 $f(x)$ 的极限,就是在 x_0 附近,当 x 无论从 x_0 的左侧还是右侧趋向于 x_0 时,$y=f(x)$ 图形上的点都无限趋近于点 (x_0, L). 点 (x_0, L) 可以是函数图形上的点[图 1-1(a)],也可以不是函数图形上的点[图 1-1(b)、图 1-1(c)]. 当 $f(x)$ 在 x_0 有定义时,可能有 $L=f(x_0)$[图 1-1(a)],也可能有 $L \neq f(x_0)$[(图 1-1(b)],$f(x)$ 也可以在 x_0 无定义[图 1-1(c)].

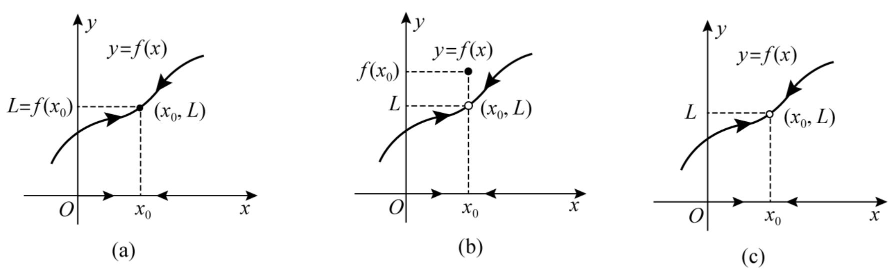


图 1-1

说明: 当极限存在时,极限是唯一的.

上面我们讨论了救灾物品在下落的第 3 秒末这一时刻的速度. 一般来说,设物体沿直线运动,运动方程为 $s=s(t)$,s 表示物体相对于原点的位移,函数 $s=s(t)$ 称为位置函数,对于物体在运动中的某一时刻 t_0,如果当 t 趋向于 t_0 时,在 $[t_0, t]$(或 $[t, t_0]$)内的平均速度 $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ 的极限存在,即

$$\lim_{t \to t_0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$$

存在,那么这个极限就叫作物体在 $t=t_0$ 这一时刻的速度,也称瞬时速度.

科学技术中的许多概念都需要用极限来说明,许多问题的解决需要用到极限这一工具.

例 1-1 考察函数 $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ 当 $x \to 2$ 时的极限.

解 因为当 $x \neq 2$ 时,$\dfrac{x^2-4}{x-2}=x+2$,所以函数 $y=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ 的图形就是函数 $y=x+2(x \neq 2)$ 的图形,如图 1-2 所示. 从图 1-2 中可以看出,当 $x \to 2$ 时 $f(x)$ 有极限,且

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4$$

从常值函数 $y=C$ 的图形(图 1−3)和函数 $y=x$ 的图形(图 1−4)可以看出:

$$\lim_{x\to x_0} C=C(C\ \text{为常数});\ \lim_{x\to x_0} x=x_0$$

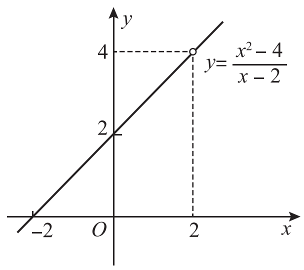


图 1−2

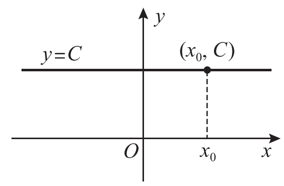


图 1−3

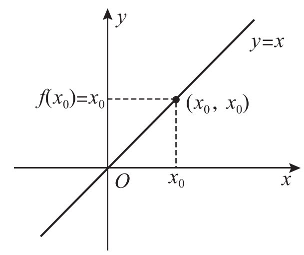


图 1−4

当函数 $y=f(x)$ 是基本初等函数时,由函数图形容易知道,若 x_0 是 $f(x)$ 定义区间内部的点(端点除外),则有

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

即极限值等于函数值. 例如, $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=\sin 0=0$, $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=\cos 0=1$, $\lim\limits_{x\to 3}x^2=3^2=9$,等等.

3. 左、右极限

x 仅从 x_0 的左侧,即小于 x_0 的一侧无限趋近于 x_0,记作 $x\to x_0^-$;x 仅从 x_0 的右侧,即大于 x_0 的一侧无限趋近于 x_0,记作 $x\to x_0^+$.

定义 1−2 设函数 $y=f(x)$,如果当 $x\to x_0^-$ 时,$f(x)$ 无限趋近于一个常数 L,那么就说 L 是当 x 趋向于 x_0 时函数 $f(x)$ 的**左极限**,记作

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=L,\text{或}\ f(x_0^-)=L$$

如果当 $x\to x_0^+$ 时,$f(x)$ 无限趋近于一个常数 L,那么就说 L 是当 x 趋向于 x_0 时函数 $f(x)$ 的**右极限**,记作

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=L,\text{或}\ f(x_0^+)=L$$

由定义 1−1 和定义 1−2 就得到极限存在的一个充分必要条件,即 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$ 的充分必要条件是

$$f(x_0^-)=f(x_0^+)=L$$

例 1−2 设函数 $f(x)=\begin{cases}-1, & x<1\\ x-1, & x\geqslant 1\end{cases}$,考察 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ 是否存在.

解 作出 $y=f(x)$ 的图形,如图 1−5 所示.

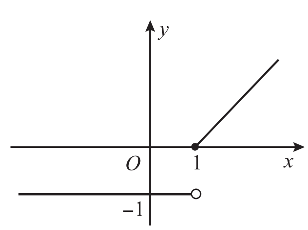


图 1−5

在 $x=1$ 左侧附近 $f(x)=-1$. 所以

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}(-1)=-1$$

在 $x=1$ 右侧附近 $f(x)=x-1$，所以

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}(-1)=0$$

左、右极限都存在但不相等，由上面的充分必要条件可知，$\lim\limits_{x\to1}f(x)$不存在 .

1.1.2 $x\to\infty$ 时 $f(x)$ 的极限

x 无限增大，记作 $x\to+\infty$，读作“x 趋向于正无穷大”；x 无限减小，记作 $x\to-\infty$，读作“x 趋向于负无穷大”；$|x|$无限增大，记作 $x\to\infty$，读作“x 趋向于无穷大”.

1. $x\to\infty$ 时 $f(x)$ 的极限

先看一个问题：

设火箭所要达到的最大高度为 h，那么发射火箭所需要的初速度为

$$v=f(h)=\sqrt{\frac{2gRh}{h+R}}, h\in(0,+\infty)$$

式中，g 代表重力加速度；R 代表地球半径 .

现在来考察当 $h\to+\infty$ 时，函数 $v=f(h)$ 的变化趋势 . 将函数式改写成

$$v=f(h)=\sqrt{\frac{2gR}{1+\dfrac{R}{h}}}$$

容易看出，当 $h\to+\infty$ 时，$\dfrac{R}{h}\to0$，从而 $f(h)\to\sqrt{2gR}$，函数图形见图 1-6. 我们把常数 $\sqrt{2gR}$ 称为当 $h\to+\infty$ 时，函数 $f(h)$ 的极限，记作 $\lim\limits_{h\to+\infty}f(h)$，即

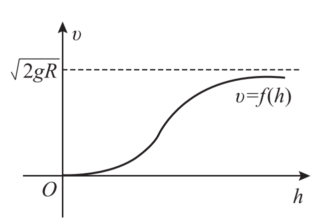


图 1-6

$$\lim_{h\to+\infty}f(h)=\lim_{h\to+\infty}\sqrt{\frac{2gRh}{h+R}}=\sqrt{2gR}=11\ 200(\mathrm{m/s})$$

式中，g 取 $9.8\ \mathrm{m/s^2}$，R 取 $6.4\times10^6\ \mathrm{m}$. 这个极限值就是第二宇宙速度 .

定义 1-3 设函数 $y=f(x)$，如果当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)$无限趋近于一个常数 L，那么就说 L 是当 x 趋

向于正无穷大时函数 $f(x)$ 的极限，记作

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=L，或 f(x)\to L(x\to+\infty)$$

例如，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$（图 1-7），$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$（图 1-8）.

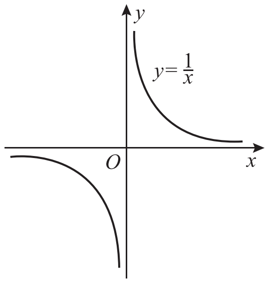


图 1-7

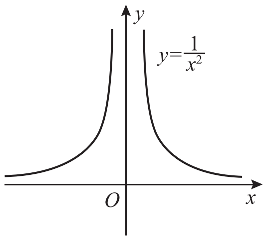


图 1-8

一般地，如果 q 是一个正有理数，那么有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^q}=0$$

又如，观察指数函数的图形可以看出，当 $0<a<1$ 时，有 $\lim\limits_{x\to+\infty}a^x=0$.

类似地，如果当 $x\to-\infty$ 时，$f(x)$ 无限趋近于一个常数 L，那么就说 L 是当 x 趋向于负无穷大时函数 $f(x)$ 的极限，记作

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=L，或 f(x)\to L(x\to-\infty)$$

例如，$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$（图 1-7）.

定义 1-4　设函数 $y=f(x)$，如果 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=L$，且 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=L$，那么就说常数 L 是当 x 趋向于无穷大时函数 $f(x)$ 的极限，记作

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=L，或 f(x)\to L(x\to\infty)$$

由此可知：

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=L$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=L$.

由 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$ 和定义 1-4，可知 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

容易知道，$\lim\limits_{x\to\infty}C=C$，$C$ 为常数.

例 1-3　考察 $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 是否存在.

解　由图 1-9 可以看出

$$\lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}，\lim_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}.$$

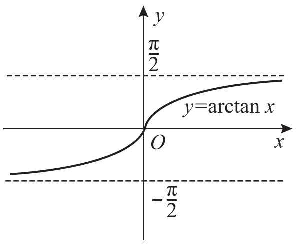


图 1-9

$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x$ 和 $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x$ 虽然都存在，但不相等，所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在.

2. 水平渐近线

从图形上看，$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$ 表明，当 $x\to+\infty$ 时，曲线 $y=\arctan x$ 无限接近于水平直线 $y=\dfrac{\pi}{2}$；$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$ 表明，当 $x\to-\infty$ 时，曲线 $y=\arctan x$ 上的点无限接近于水平直线 $y=-\dfrac{\pi}{2}$. 直线 $y=\dfrac{\pi}{2}$ 和 $y=-\dfrac{\pi}{2}$ 都叫作曲线 $y=\arctan x$ 的水平渐近线．

一般地，设函数 $y=f(x)$，如果

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=b \text{ 或 } \lim_{x\to-\infty}f(x)=b$$

那么就称直线 $y=b$ 为曲线 $y=f(x)$ 的**水平渐近线**．

例如，由 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$ 可知，$y=0$ 是曲线 $y=\dfrac{1}{x}$ 的一条水平渐近线．

1.1.3 数列的极限

n 取正整数且无限增大，记作 $n\to\infty$，读作"n 趋向于无穷大".

定义 1-5 设 $\{u_n\}$ 是一个无穷数列，如果当 $n\to\infty$ 时，u_n 无限趋近于一个常数 L，那么就说 L 是数列 $\{u_n\}$ 的极限，记作

$$\lim_{x\to\infty}u_n=L，\text{或 } u_n\to L(n\to\infty)$$

数列有极限时，称它收敛，否则称它发散．

数列极限与 $x\to+\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限都是指函数值无限趋近于常数，区别仅在于 x 可取任何实数，$x\to+\infty$ 时连续增大，而 n 只取正整数，$n\to\infty$ 时是离散增大．例如，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^x=0$，同样有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n=0$.

以下的数列极限较为常用：

$\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$（$q$ 为常数，且 $|q|<1$）；$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^\alpha}=0$（$\alpha$ 是正常数）.

例如，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}=0$ 等．

下面是一个判定数列极限存在的法则，称为**单调有界原理**：

单调有界数列必有极限．

1.1.4 无穷小与无穷大

1. 无穷小

如果当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时，函数 $f(x)$ 的极限为零，那么就说 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时，$f(x)$ 是**无穷小**

量，简称无穷小．例如：

因为 $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$，所以 $x\to 0$ 时，$\sin x$ 是无穷小；

因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$，所以 $x\to\infty$ 时，$\dfrac{1}{x}$ 是无穷小；

因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^x=0$，所以 $x\to+\infty$ 时，$\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$ 是无穷小．

$x\to x_0$ 时 $f(x)$ 无限趋近于常数 L，换一种说法就是，$x\to x_0$ 时 $f(x)-L$ 无限趋近于零．这就是说，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=L$ 与 $x\to x_0$ 时 $f(x)-L$ 是无穷小是一回事．若记 $f(x)-L=\alpha(x)$，则 $f(x)=L+\alpha(x)$．可以得出极限与无穷小的以下关系：

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=L$ 的充分必要条件是 $f(x)=L+\alpha(x)$，其中 $\alpha(x)$ 是 $x\to x_0$ 时的无穷小．

上面的讨论也适用于趋向于无穷大时的情形．

无穷小具有这样的性质：**有界函数与无穷小的乘积仍是无穷小．**

例如，求 $\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\dfrac{1}{x}$，虽然 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在，但 $\sin\dfrac{1}{x}$ 有界，又 x^2 是 $x\to 0$ 时的无穷小，所以 $\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\dfrac{1}{x}=0$.

2. 无穷大

当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时：

如果 $f(x)$ 的绝对值无限地增大，那么称函数 $f(x)$ 是 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的无穷大量，简称无穷大，记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\infty\ \left[\text{或}\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty\right];$$

如果仅有 $f(x)$ 的值无限增大，则也称 $f(x)$ 是正无穷大，可记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=+\infty\ \left[\text{或}\lim_{x\to\infty}f(x)=+\infty\right];$$

如果仅有 $f(x)$ 的值无限减小，则也称 $f(x)$ 是负无穷大，可记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=-\infty\ \left[\text{或}\lim_{x\to\infty}f(x)=-\infty\right].$$

例如，$y=\dfrac{1}{x}$ 是 $x\to 0$ 时的无穷大（图 1-7），可记作 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=\infty$；$y=\ln x$ 是 $x\to 0^+$ 时的负无穷大，也是 $x\to+\infty$ 时的正无穷大（图 1-10），可分别记作 $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$ 和 $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$．

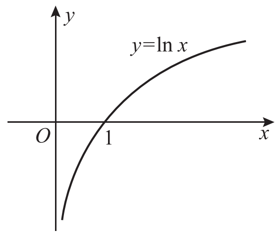


图 1-10

显然,无穷大与无穷小之间具有以下关系:

无穷大的倒数是无穷小,无穷小(不为零)的倒数是无穷大.

例如,$x\to 0$ 时,x 是无穷小,而 $\dfrac{1}{x}$ 是无穷大.

说明:当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时,$f(x)$ 是无穷大,这时 $f(x)$ 是没有极限的,记号 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$ [$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$],仅仅是用来表示函数这类变化趋势的记号而已,并不表明极限存在.

3. 铅直渐近线

从图 1-10 上看,$\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$,意味着当 x 从 0 的右侧无限趋近于 0 时,曲线 $y=\ln x$ 向下无限延伸,并无限接近垂直于 x 轴的直线 $x=0$,直线 $x=0$ 叫作曲线 $y=\ln x$ 的铅直渐近线. 一般地,有

设函数 $y=f(x)$,a 为定值,如果

$$\lim_{x\to a^+}f(x)=+\infty\ (-\infty)\ \text{或}\ \lim_{x\to a^-}f(x)=+\infty\ (-\infty)$$

那么称直线 $x=a$ 为曲线 $y=f(x)$ 的**铅直渐近线**.

例如,$x=0$ 是曲线 $y=\dfrac{1}{x}$ 的一条铅直渐近线(图 1-7);因为 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\tan x=+\infty$(图 1-11),所以 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 是曲线 $y=\tan x$ 的一条铅直渐近线.

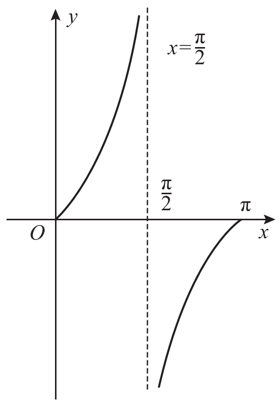


图 1-11

例 1-4 讨论下列数列的极限.

(1)$x_n=\dfrac{1}{2^n}$; (2)$x_n=2-\dfrac{1}{n^2}$; (3)$x_n=-3$;

(4)$x_n=3^n$; (5)$x_n=(-1)^{n+1}$.

解 (1)$x_n=\dfrac{1}{2^n}$ 的项依次为 $\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{8},\dfrac{1}{16},\cdots$,当 n 无限增大时,x_n 无限趋近于 0,所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^n}=0$.

(2) $x_n = 2 - \frac{1}{n^2}$ 的项依次为 $2 - \frac{1}{1^2}, 2 - \frac{1}{2^2}, 2 - \frac{1}{3^2}, \cdots$，当 n 无限增大时，x_n 无限趋近于 2，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2 - \frac{1}{n^2}\right) = 2$.

(3) $x_n = -3$ 为常数数列，无论 n 取怎样的正整数，x_n 始终为 -3，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}(-3) = -3$.

(4) $x_n = 3^n$ 的项依次为 3, 9, 27, 81, …，当 n 无限增大时，x_n 也无限增大，不会趋近于一个确定的常数，所以该数列的极限不存在.

(5) $x_n = (-1)^{n+1}$ 的项依次为 1, −1, 1, −1, …，当 n 无限增大时，x_n 不会趋近于一个确定的常数，所以该数列的极限不存在.

1.2 极限的四则运算

定理 1-1（四则运算法则） 若 $\lim\limits_{x\to *} f(x) = A$，$\lim\limits_{x\to *} g(x) = B$，则

(1) $\lim\limits_{x\to *}[f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x\to *} f(x) \pm \lim\limits_{x\to *} g(x) = A \pm B$；

(2) $\lim\limits_{x\to *}[f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to *} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to *} g(x) = A \cdot B$；

(3) $\lim\limits_{x\to *}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to *} f(x)}{\lim\limits_{x\to *} g(x)} = \frac{A}{B} (B \neq 0)$.

注意：使用极限的四则运算法则时，应该注意前提条件是否满足，只有当每个函数的极限都存在时，才能使用和、差、积的求极限法则；只有当分子、分母的极限都存在，且分母极限不为零时，才能使用商的求极限法则.

法则(1)和(2)可以推广到有限个函数的情形.

由法则(2)可以得到以下推论.

推论 设 $\lim\limits_{x\to *} f(x) = A$，$A$ 和 c 为常数，n 为正整数，则有

(1) $\lim\limits_{x\to *} c \cdot u(x) = c \cdot \lim\limits_{x\to *} u(x) = cA$；

(2) $\lim\limits_{x\to *}[u(x)]^n = [\lim\limits_{x\to *} u(x)]^n = A^n$.

结论(1)说明，在求函数极限时，常数可以提到极限号外面；结论(2)说明，在求函数极限时，正整数次幂的运算与极限运算可以交换次序.

例 1-5 求 $\lim\limits_{x\to 2}(3x^2 + x - 2)$.

解 $\lim\limits_{x\to 2}(3x^2 + x - 2) = 3 \cdot (\lim\limits_{x\to 2} x)^2 + \lim\limits_{x\to 2} x - \lim\limits_{x\to 2} 2 = 12$.

例 1-6 求 $\lim\limits_{x\to x_0}(a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n)$.

解
$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}(a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n) &= \lim_{x\to x_0} a_0x^n + \lim_{x\to x_0} a_1x^{n-1} + \cdots + \lim_{x\to x_0} a_{n-1}x + \lim_{x\to x_0} a_n \\ &= a_0x_0^n + a_1x_0^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x_0 + a_n\end{aligned}$$

可见,对于多项式函数 $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$,当 $x\to x_0$ 的极限值等于多项式 $P(x)$ 在 x_0 点的函数值,即

$$\lim_{x\to x_0}P(x)=P(x_0)$$

例 1-7 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^5+7x-6}{x^3+6}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^5+7x-6}{x^3+6}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 0}(x^5+7x-6)}{\lim\limits_{x\to 0}(x^3+6)}=\dfrac{-6}{6}=-1.$

一般地,设有理函数为

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}(a_0\neq 0,b_0\neq 0)$$

且 $Q(x_0)\neq 0$,当 $x\to x_0$ 时,该有理函数的极限值等于它在 x_0 点的函数值,即

$$\lim_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x_0)}{Q(x_0)} \tag{1-3}$$

例 1-8 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x-3}{x^2-3x+2}$.

解 因为 $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-3x+2)=0$, 而 $\lim\limits_{x\to 1}(4x-3)=1\neq 0$, 所以考虑先求原来函数的倒数 $\dfrac{x^2-3x+2}{4x-3}$ 的极限,再利用无穷小和无穷大的关系可得最终结果.

因为 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{4x-3}=0$,所以 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x-3}{x^2-3x+2}=\infty$.

一般地,如果有理函数 $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ 的分母在 x_0 点的函数值 $Q(x_0)=0$,而分子在 x_0 点的函数值 $P(x_0)\neq 0$,那么当 $x\to x_0$ 时,该有理函数为无穷大量,即

$$\lim_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)}=\infty \tag{1-4}$$

例 1-9 求 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}$.

解 因为 $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-3x+2)=0$, $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-4)=0$,故不能使用式(1-3)和式(1-4)计算. 注意到分子和分母可以分解因式化简,于是化简后再求极限.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)(x-2)}{(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x-1}=4$$

例 1-10 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$.

解 因为 $\lim\limits_{x\to 0}(\sqrt{x+1}-1)=0$,故不能使用式(1-3)和式(1-4)计算. 把分子有理化,化简后求极限.

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{x(\sqrt{x+1}+1)}=\lim_{x\to0}\frac{x}{x(\sqrt{x+1}+1)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}=\frac{1}{2}$$

例 1-11　求下列各极限:

(1) $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)$;　(2) $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{3}{1-x}-\frac{2}{1-x^2}\right)$.

解　(1) $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)=\lim\limits_{x\to1}\left[\frac{1+x+x^2}{(1-x)(1+x+x^2)}-\frac{3}{1-x^3}\right]=\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{(1-x)(1+x+x^2)}$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)}=-\lim_{x\to1}\frac{x+2}{1+x+x^2}=-1$$

(2) $\lim\limits_{x\to1}\left[\frac{3}{1-x}-\frac{2}{1-x^2}\right]=\lim\limits_{x\to1}\left[\frac{3(1+x)}{1-x^2}-\frac{2}{1-x^2}\right]=\lim\limits_{x\to1}\frac{1+3x}{1-x^2}=\infty$

例 1-11 的结果说明,在自变量的同一个变化过程中,两个无穷大的差不一定是无穷大,也不一定是无穷小．解题时,不要盲目地把无穷小的性质照搬到无穷大;也不要把无穷大"∞"当作一个常数对待,误认为 $\infty-\infty=0$.

例 1-12　求下列各极限:

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^4-3x-2}{6x^4+2x^2+1}$;(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x^6-5x^2+1}{9x^8+x+4}$;(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^6-1}{2x^4-x^2-8}$.

解　(1)由于当 $x\to\infty$ 时,分子、分母的极限不存在,故不能用极限的四则运算法则．作适当变形,分子、分母同除以最高次幂 x^4,得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^4-3x-2}{6x^4+2x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{5-\frac{3}{x^3}-\frac{2}{x^4}}{6+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^4}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}5-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x^3}-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x^4}}{\lim\limits_{x\to\infty}6+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x^2}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^4}}=\frac{5-0-0}{6+0+0}=\frac{5}{6}$$

(2)作适当变形,分子、分母同除以最高次幂 x^8,得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x^6-5x^2+1}{9x^8+x+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{7}{x^2}-\frac{5}{x^6}+\frac{1}{x^8}}{9+\frac{1}{x^7}+\frac{4}{x^8}}=0$$

(3)先求 $\frac{x^6-1}{2x^4-x^2-8}$ 的倒数 $\frac{2x^4-x^2-8}{x^6-1}$ 的极限,得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^4-x^2-8}{x^6-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^4}-\frac{8}{x^6}}{1-\frac{1}{x^6}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x^2}-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^4}-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8}{x^6}}{\lim\limits_{x\to\infty}1-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^6}}=\frac{0-0-0}{1-0}=0$$

所以当 $x\to\infty$ 时，$\dfrac{2x^4-x^2-8}{x^6-1}$ 是无穷小，它的倒数是无穷大，即 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^6-1}{2x^4-x^2-8}=\infty$.

例 1-12 的结论可以推广到一般的有理函数的情形 .

一般地，设 $a_0\neq 0, b_0\neq 0$, m, n 为正整数时，

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}=\begin{cases}0, & \text{当 } m>n \text{ 时}\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & \text{当 } m=n \text{ 时}\\ \infty, & \text{当 } m<n \text{ 时}\end{cases}\tag{1-5}$$

例 1-13 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x+1)^3(x+3)}{x^5-3x^2-1}$.

解 由于分子次数是 4 次，而分母的次数是 5 次，故 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x+1)^3(x+3)}{x^5-3x^2-1}=0.$

例 1-14 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(4x^2-1)(x+3)^3}{1+x^3+2x^5}$.

解 由于分子的最高次项是 $4x^5$，而分母的最高次项是 $2x^5$，故 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(4x^2-1)(x+3)^3}{1+x^3+2x^5}=\dfrac{4}{2}=2.$

例 1-15 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}$.

解 由于 $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{1}{2}n(n+1)$，此时函数分子、分母的次数都是 2 次，故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2}=\frac{1}{2}.$$

1.3 两个重要极限及无穷小的比较

1.3.1 两个重要极限

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$（重要极限 1）

观察表 1-2 和图 1-12，可以看出：当 $x\to 0$ 时，函数 $y=\dfrac{\sin x}{x}$ 的值无限趋近于 1. 根据极限定义可知，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 成立 .

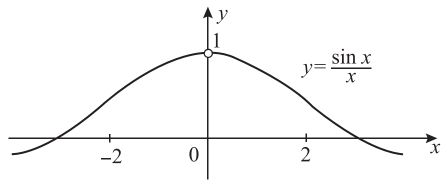


图 1-12

表 1-2

x	-0.5	-0.1	-0.05	-0.02	-0.01	→	0
$\frac{\sin x}{x}$	0.958 85	0.998 33	0.999 58	0.999 93	0.999 98	→	1
x	0.5	0.1	0.05	0.02	0.01	→	0
$\frac{\sin x}{x}$	0.958 85	0.998 33	0.999 58	0.999 93	0.999 98	→	1

例 1-16 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}3\cdot\frac{\sin 3x}{3x}\xlongequal{令\ 3x=u}3\lim\limits_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}=3\times 1=3$

在例 1-16 中使用了换元法,换元的步骤有时可以省略,如下面的例子.

例 1-17 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}\times 1^2=\frac{1}{2}$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$(重要极限 2)

由表 1-3 可以看出:当 $x\to\infty$ 时,$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ 无限趋近于无理数 e,即 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$ 成立. 这里的 e 就是作为自然对数底的无理数,小数点后取 5 位时,$\mathrm{e}\approx 2.718\ 28$. e 和圆周率 π 都是科学技术中十分有用的常数,具有特殊地位.

表 1-3

x	1000	10 000	100 000	1000 000
$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$	2.716 924	2.718 159	2.718 268	2.718 280
x	-1000	-10 000	-100 000	-1000 000
$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$	2.719 642	2.718 418	2.718 295	2.718 283

说明:(1)因为当 $x\to\infty$ 时,$1+\frac{1}{x}\to 1$,所以称 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$ 为 1^{∞} **型的未定式**.

(2)令 $t=\frac{1}{x}$,则当 $x\to\infty$ 时,$t\to 0$. 于是,得 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$ 的另一种形式

$$\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=\mathrm{e}.$$

对于数列这一结果也成立,即 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=\mathrm{e}$.

例 1-18 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}}\right]^{3}=\mathrm{e}^{3}$.

例 1-19 求 $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\{[(1+(-2x)]^{-\frac{1}{2x}}\}^{-2}=\mathrm{e}^{-2}$.

对于复杂的求极限问题,可以利用 MATLAB 软件来求解.

1.3.2 无穷小的比较

在无穷小的性质中,两个无穷小的和、差、积均为无穷小,但没有涉及两个无穷小的商,这是因为两个无穷小的商的极限有多种可能,例如,当 $x\to 0$ 时,x^3、$\sin x$、$\sin 3x$、$2x$ 均是无穷小,但是(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3}{\sin x}=0$;(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^3}=\infty$;(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$;(4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{2x}=\frac{3}{2}$. 究其原因,是因为分子、分母虽然都是无穷小,但它们趋于零的“速度”是不同的. 在第(1)个例子中,分子的“速度”比分母快,于是极限为零;在第(2)个例子中,分母的“速度”比分子快,于是极限为 ∞;在第(3)、(4)两个例子中,分子和分母的“速度”相当,于是极限为非零常数. 因此便产生了无穷小比较的概念.

1. 无穷小比较的概念

定义 1-6 设当 $x\to *$ 时,α,β 均为无穷小,

(1)如果 $\lim\limits_{x\to *}\frac{\beta}{\alpha}=0$,则称 β 是比 α 高阶的无穷小,记作 $\beta=o(\alpha)$;

(2)如果 $\lim\limits_{x\to *}\frac{\beta}{\alpha}=\infty$,则称 β 是比 α 低阶的无穷小;

(3)如果 $\lim\limits_{x\to *}\frac{\beta}{\alpha}=c\neq 0$,则称 β 与 α 是同阶的无穷小;特别地,如果 $\lim\limits_{x\to *}\frac{\beta}{\alpha}=1$,则称 β 与 α 是等价无穷小,记作 $\alpha\sim\beta$.

例 1-20 比较下列各题中两个无穷小的阶:

(1)当 $x\to 0$ 时,$1-\cos x$ 与 $\frac{1}{2}x^2$;(2)当 $x\to\frac{\pi}{2}$ 时,$\cos x$ 与 $2x-\pi$;

(3)当 $x\to 0$ 时，x^4 与 $\tan x$；(4)当 $x\to\infty$ 时，$\frac{2}{x}$ 与 $\frac{1}{x^2}$.

解 (1)因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\frac{1}{2}x^2}=2\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=2\lim_{x\to 0}\frac{1-\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)}{x^2}=2\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=1$$

所以，当 $x\to 0$ 时，$1-\cos x$ 与 $\frac{1}{2}x^2$ 是等价无穷小，$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$.

(2)因为 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{2x-\pi}\xlongequal{令\ 2x-\pi=t}\lim\limits_{t\to 0}\frac{\cos\frac{t+\pi}{2}}{t}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{-\sin\frac{t}{2}}{t}=-\frac{1}{2}$，所以，当 $x\to\frac{\pi}{2}$ 时，$\cos x$ 与 $2x-\pi$ 是同阶无穷小.

(3)因为 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^4}{\tan x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^4\cos x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\times x^3\cos x=0$，所以，当 $x\to 0$ 时，x^4 是比 $\tan x$ 高阶的无穷小.

(4)因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x}}{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}2x=\infty$，所以，当 $x\to\infty$ 时，$\frac{2}{x}$ 是比 $\frac{1}{x^2}$ 低阶的无穷小.

2. 无穷小的性质及应用

定理 1-2(等价无穷小代换定理) 如果当 $x\to *$，$\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$，且 $\lim\limits_{x\to *}\frac{\beta'}{\alpha'}$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to *}\frac{\beta}{\alpha}=\lim\limits_{x\to *}\frac{\beta'}{\alpha'}$.

等价无穷小代换定理表明，求两个无穷小商的极限时，分子、分母可分别用各自的等价无穷小替换. 这是简化极限运算的一种方法.

下面列出当 $x\to 0$ 时常用的几个无穷小：

$$\sin x\sim x;\ \tan x\sim x;\ \arcsin x\sim x;\ 1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2;\ \ln(1+x)\sim x;\ e^x-1\sim x.$$

例 1-21 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 5x}{\sin 3x}$.

解 因为当 $x\to 0$ 时，$\tan 5x\sim 5x$，$\sin 3x\sim 3x$，所以

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan 5x}{\sin 3x}=\lim_{x\to0}\frac{5x}{3x}=\frac{5}{3}$$

例 1–22 下列解法是否正确:因为当 $x\to0$ 时, $\tan x\sim x$, $\sin x\sim x$,所以

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim_{x\to0}\frac{x-x}{x^3}=0$$

解 错误的 . 因为这种做法相当于事先有 $(\tan x-\sin x)\sim(x-x)$ 成立,而事实上

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-x}{\tan x-\sin x}=0\neq1$,即 $\tan x-\sin x$ 与 $x-x$ 不是等价无穷小,所以不能替换 .

正确的做法:

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin x}{\cos}-\sin x}{\sin^3 x}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2\cos x}=\frac{1}{2}$$

说明:只有当分子或分母是函数的连乘积时,各个因式才可以用它们的等价无穷小替换 . 而对于和或差中的函数,一般是不能替换的 .

数学文化

关于极限的故事

庄子的“一尺之棰,日取其半,万世不竭”

早在战国时期,哲学家庄周就在他的著作《庄子 · 天下篇》中提出了一个关于极限的思想 . 他说:“一尺之棰,日取其半,万世不竭 .”这句话的意思是,有一根一尺长的木棒,每天截去一半,永远都截不完 . 每天截后剩下的部分长度分别为:第一天剩尺,第二天剩尺,第三天剩尺,……,第 n 天剩尺,……显然,在这个例子中,我们能发现,当 n 趋于无穷大时,将趋于 0,这就是我们所说的极限 .

章节小练

1. 设函数 $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$,考察 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$, $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$, $\lim\limits_{x\to0}f(x)$.

2. 求极限 $\lim\limits_{x \to 0} x^2 \arctan \dfrac{1}{x^2}$.

3. 设函数 $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$,考察:(1) x 怎样变化时 $f(x)$ 是无穷小? x 怎样变化时 $f(x)$ 是无穷大?(2)曲线 $y=f(x)$ 是否有水平渐近线或铅直渐近线? 若有,请求出.

4. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x \to 2}(x^2-3x+1)$;

(2) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{3x^4-2x^3-9}{2x^3-5x+3}$;

(3) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x+3}{x^2+1}$;

(4) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2+2x}{(x-1)^2}$;

(5) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x+2}{x^2+8}$;

(6) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-x-2}{x^2-3x+2}$.

5. 求下列极限：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^{n+1}+5^{n+1}}{3^n+5^n}$；

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\dfrac{2+4+\cdots+2n}{n+3}\right)$；

（3）$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{3x^2+1}}{x-2}$；

（4）$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+2x}-x)$.

6. 求下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}$；

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}$；

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$；

（4）$\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}$；

（5）$\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{\pi-x}$；

（6）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$.

7. 求曲线的水平渐近线或铅直渐近线：

(1) $y=\dfrac{1-2x}{2x+1}$；

(2) $y=\dfrac{3x^2+1}{x^2-4}$；

(3) $y=\dfrac{x^2-3x}{x^3-27}$；

(4) $y=1+\dfrac{10-x}{10+x}$.

2　函数及其性质

学习目标

知识目标

1. 理解函数的定义及其表示法；掌握反函数的概念和应用．

2. 熟悉函数的性质，如奇偶性、周期性等；理解函数的连续性的概念和条件．

能力目标

1. 能够准确描述函数的定义，并区分不同类型的函数；能够找到函数的反函数，并分析其性质及应用．

2. 能够判断函数的奇偶性、周期性等性质；能够分析函数在某点或某区间上的连续性，包括利用极限的方法进行判断和计算．

素质目标

1. 培养学生对函数的深刻理解和抽象思维能力，使其能够理解和运用函数在数学和实际问题中的广泛应用．

2. 培养学生的创新意识和探索精神，通过发现函数的性质和连续性条件，激发学生对数学问题更深层次的思考和探索．

2.1 函 数

在自然现象或生产过程中，同时出现的某些变量，往往存在相互依赖、相互制约的关系，其中，有的变量间的关系在数学上称为函数.

2.1.1 函数的定义

定义 2-1 设 x 和 y 是两个变量，D 是 $\mathbf{R}$ 的非空子集，对于任意 $x\in D$，变量 y 按照某个对应关系 f 有唯一确定的实数与之对应，则称 y 是 x 的函数，记为 $y=f(x)$. x 称为自变量，y 称为因变量，D 称为函数的定义域，数集 $\{f(x)\mid x\in D\}$ 称为函数 $f(x)$ 的值域. 当 $x=x_0$ 时对应的函数值记为 $f(x_0)$.

由函数的定义可以看出，确定函数有两个要素：定义域和对应法则. 所以，两个函数相同的充分必要条件是两函数的定义域和对应法则均相同.

在实际问题的应用中，函数的定义域要根据问题的实际意义来确定. 在数学的研究学习中，有时候不需要考虑函数的实际意义，对于用解析式表示的函数，定义域就是使解析式有意义的自变量的全体. 例如，函数 $y=\arcsin x$ 的定义域为 $[-1,1]$，函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的定义域为 $(-1,1)$.

例 2-1 判断下列函数是否表示相同的函数关系.

(1) 函数 $y=\dfrac{x^2}{x}$ 和 $y=x$；

(2) 函数 $y=|x|$ 与 $y=\sqrt{x^2}$.

解 (1) 因为函数 $y=\dfrac{x^2}{x}$ 的定义域为 $x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq 0$，而函数 $y=x$ 的定义域为 $x\in\mathbf{R}$，它们的定义域不同，所以说函数 $y=\dfrac{x^2}{x}$ 与 $y=x$ 不同.

(2) 函数 $y=|x|$ 与 $y=\sqrt{x^2}$ 的定义域都是 $x\in\mathbf{R}$，而 $y=\sqrt{x^2}=|x|$，因此函数 $y=|x|$ 与 $y=\sqrt{x^2}$ 有相同的定义域和对应法则，所以说函数 $y=|x|$ 与 $y=\sqrt{x^2}$ 表示相同的函数关系.

例 2-2 求函数 $y=\dfrac{\lg(x+1)}{x-1}$ 的定义域.

解 根据对数的真数必须为正数，分数的分母不能为零，可以得到该函数的自变量应满足不等式组

$$\begin{cases}x+1>0\\ x-1\neq 0\end{cases}$$

解得

$$x>-1 \text{ 且 } x \neq 1$$

即

$$D=(-1,1)\cup(1,+\infty)$$

2.1.2　函数的表示法

表示一个函数通常有三种方法:表格法、图像法和公式法.

(1)表格法:就是用表格来表达函数关系.这种方法的优点是查找函数值比较方便,缺点是数据有限、不直观,不便于确定自变量和因变量的对应关系.

例如,某公司 2021 年上半年某产品的销量(单位:个)如表 2-1 所示.

表 2-1

月份 t	1	2	3	4	5	6
销量 y	1900	1850	2000	1950	1920	1890

(2)图像法:就是用图像来表达函数关系.这种方法直观性强,并可观察函数的变化趋势.但根据函数图形所求出的函数值一般准确度不高,且不便于研究两变量之间的关系.

例如,某海域昼夜水温 T 和时间 t 是两个变量,通过自动温度记录仪可以描绘出一条曲线,如图 2-1 所示.

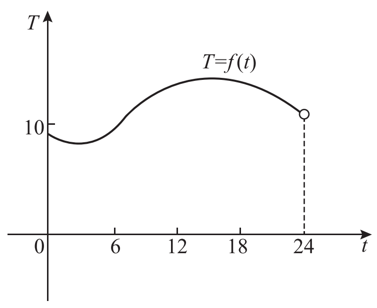


图 2-1

这个图形表示了气温 T 和时间 t 之间的函数关系.

再如,股票曲线反映股票当天的价格随时间的变化波动情况,该曲线是以时间为自变量,以价格为函数的函数图像,

(3)公式法:就是用数学表达式表示函数关系.例如 $y=(1+x)^2$,这种方法的优点是形式简明,便于作理论研究与数值计算,缺点是不够直观.

在用公式法表示的函数中,有以下两种需要指明的情形.

①分段函数:在自变量的不同变化范围中,对应法则用不同式子来表示的函数,称为分段函数.

例如,绝对值函数 $y=|x|=\begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$

电学中的常用函数：单位阶跃函数 $u(t)=\begin{cases}1, & t\geqslant 0\\ 0, & t<0\end{cases}$

例 2-3　求分段函数 $f(x)$ 的定义域和值域.

$$f(x)=\begin{cases}-x+1, & 0<x<1\\ 0, & x=0\\ -x-1, & -1\leqslant x<0\end{cases}$$

解　如图 2-2 所示，$f(x)$ 的定义域为

$$D=\{x \mid -1\leqslant x<1\};$$

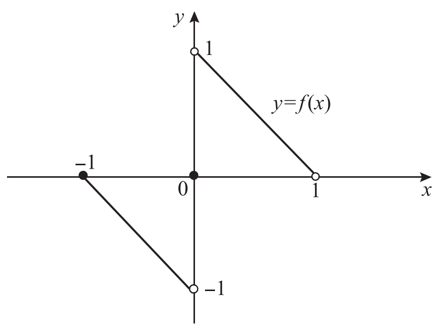


图 2-2

其值域为 $Z=\{f(x) \mid -1<f(x)<1\}$.

函数由解析式给出时，其定义域是使解析式有意义的一切自变量的值. 为此，求函数的定义域时应遵守以下原则：

- 分式中分母不能为零；
- 偶次根式的被开方数非负；
- 对数函数中真数部分大于零；
- 反三角函数 $\arcsin x$，$\arccos x$，要满足 $|x|\leqslant 1$；
- 多个函数和、差、积、商后所形成的函数的定义域，应是这几个函数定义域的交集；
- 分段函数的定义域是各段定义域的并集.

②显函数与隐函数：若因变量 y 用自变量 x 的解析式直接表示出来，即等号一端只有 y，而另一端是 x 的表达式，这样的函数称为显函数. 例如，$y=\sqrt{1-x^2}$，$y=\ln(x+1)$ 都是显函数.

若两个变量 x 与 y 之间的函数关系用方程 $F(x,y)=0$ 来表示，则称为隐函数. 我们称方程 $F(x,y)=0$ 在区间 I 内确定了一个隐函数. 例如 $3x+y-1=0$，$e^{x+y}-xy=0$ 都是隐函数.

有的隐函数，可以从关系式 $F(x,y)=0$ 中解出 y 来，此时隐函数转换为显函数. 例如，由 $3x+y-1=0$ 解出 y，得显函数 $y=-3x+1$，把一个隐函数换成显函数的过程，称为“隐函数的显化”. 而多数隐函数却不能从关系式 $F(x,y)=0$ 中解出 y，因此不能转换为显函数，例如，$e^{x+y}-xy=0$.

2.1.3　反函数

很多问题都有相应的反问题,对函数 $y=f(x)$ 来说,给定自变量 x 的值去求因变量 y 的值很容易,直接将 x 的值代入函数表达式即可．但有时实际问题中可能遇到已知函数 y 的值,而要求自变量 x 的对应取值．为了方便研究,我们引入反函数的概念

定义 2-2　设 $y=f(x)$ 是 x 的函数,其值域为 $\mathbf{Z}$,如果对于 $\mathbf{Z}$ 中的每一个 y 值,都有一个确定的且满足 $y=f(x)$ 的 x 值与之对应,则得到一个定义在 $\mathbf{Z}$ 上的以 y 为自变量,x 为因变量的新函数,我们称之为 $y=f(x)$ 的**反函数**,记作 $x=f^{-1}(y)$．习惯上,我们总是用 x 表示自变量,用 y 表示因变量,所以通常把 $x=f^{-1}(y)$ 改写为 $y=f^{-1}(x)$.

对于函数而言,单调函数一定有反函数,而且单调增加(减少)函数的反函数也是单调增加(减少)的．若从几何图形看,一个函数当且仅当它的图形与任意一条水平直线至多相交一次时,才具有反函数．如果函数在其定义域内不是单调的,则它没有反函数．此时,我们可以限制自变量的取值范围,使得在这个范围内,函数具有单调性,从而求得此范围内的反函数．例如,对于 $y=x^2$,在定义域内不单调,所以没有反函数．但如果限制 $x\in[0,+\infty)$,则可得到反函数 $y=\sqrt{x}$;若限制 $x\in(-\infty,0]$,则可得到反函数 $y=-\sqrt{x}$.

在同一直角坐标系下,函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称.

由反函数的定义我们可以发现,函数 $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 互为反函数,且 $f^{-1}[f(x)]=x$,$f[f^{-1}(y)]=y$.

例 2-4　求 $y=2^{x-1}$ 的反函数.

解　由 $y=2^{x-1}$ 解得 $x=1+\log_2 y$,然后交换 x 和 y,得 $y=1+\log_2 x$. 即 $y=1+\log_2 x$ 是 $y=2^{x-1}$ 的反函数.

2.2　函数的性质

下面所讨论的函数的定义域都假设为 D.

1. 奇偶性

如果函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称,若对于任意 $x\in D$ 都有 $f(-x)=f(x)$,则称函数 $f(x)$ 为**偶函数**;若对于任意 $x\in D$ 都有 $f(-x)=-f(x)$,则称函数 $f(x)$ 为**奇函数**.

关于函数的奇偶性,有以下结论:

(1)偶函数的图像关于 y 轴对称,奇函数的图像关于原点对称.

(2)判断一个函数是奇函数还是偶函数,首先要看它的定义域是否关于原点对称,然后再来判断它的奇偶性.

(3)奇(偶)函数的运算性质:

①奇函数的代数和仍是奇函数,偶函数的代数和仍是偶函数.

②奇数个奇函数的乘积是奇函数,偶数个奇函数的乘积是偶函数.

③偶函数与偶函数的乘积仍是偶函数,奇函数与偶函数的乘积是奇函数.

④奇函数和奇函数的复合是奇函数,奇函数与偶函数的复合是偶函数,偶函数与偶函数的复合是偶函数.

例 2-5 判断下列函数的奇偶性:

(1) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$; (2) $f(x)=\lg\dfrac{1-x}{1+x}$.

解 (1)函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ 的定义域为 $D=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,$D$ 关于原点对称. 任意取 $x\in D$,则 $-x\in D$,有

$$f(-x)=\frac{\sin(-x)}{-x}=\frac{\sin x}{x}=f(x)$$

所以 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ 是偶函数.

(2)函数 $f(x)=\lg\dfrac{1-x}{1+x}$ 的定义域为 $D=(-1,1)$,D 关于原点对称. 任意取 $x\in D$,则 $-x\in D$,有

$$f(-x)=\lg\frac{1+x}{1-x}=\lg\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-1}=-\lg\frac{1-x}{1+x}=-f(x)$$

所以 $f(x)=\lg\dfrac{1-x}{1+x}$ 是奇函数.

2. 单调性

如果函数 $f(x)$ 在区间 I 内随 x 的增大而增大,即对于 I 内的任意两点 $x_1,x_2\in I$,且当 $x_1<x_2$ 时,有 $f(x_1)<f(x_2)$,则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的;反之,当 $x_2<x_1$ 时,有 $f(x_1)>f(x_2)$,则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调减少的.

例如,$f(x)=x^3$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 是单调增加的;$f(x)=x^2+1$ 在区间 $[0,+\infty)$ 是单调增加的,在区间 $(-\infty,0]$ 是单调减少的. 可见,函数的单调性一定要针对某个区间而言,同一函数在不同区间上的单调性有可能是不同的.

3. 周期性

对于函数 $f(x)$,如果存在一个常数 $T\neq 0$,对任意 $x\in D$,有 $x+T\in D$,且 $f(x+T)=f(x)$,则称函数 $f(x)$ 为**周期函数**,T 为函数的周期. 通常我们所说的周期函数的周期 T 是指满足上述条件的最小正周期.

例如:$y=\sin x$,$y=\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数,$y=\tan x$,$y=\cot x$ 都是以 π 为周期的周期函数.

关于函数的周期性,我们有以下结论:

(1)若函数的周期为 T,则在每个长度为 T 的相邻区间上函数图像有相同形状.

(2)若函数的周期为 T,则 $nT(n\in\mathbf{Z})$ 也是函数的周期.

(3)若 $f(x)$ 的周期为 T,则函数 $f(ax+b)$ 的周期为 $\dfrac{T}{|a|}$ $(a,b\in\mathbf{R}$ 且 $a\neq0)$.

4. 有界性

对于函数 $f(x)$,若存在正常数 M,在区间 $I\subseteq D$ 内,对任意 $x\in I$,对应的函数值均有 $|f(x)|\leqslant M$(可以没有等号),则称 $f(x)$ 在区间 I 内有界;如果不存在这样的正常数 M,则称函数 $f(x)$ 在区间 I 内无界.

例如,$y=\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界,$y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 内无界;$y=x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内无界,但在 $[-1,2]$ 上有界. 与单调性类似,函数的有界性也必须针对相应的区间而言,同一函数在不同区间上的有界性也可能不同.

常见的在整个定义域上有界的函数有 $y=\sin x$,$y=\cos x$,$y=\arctan x$,$y=\operatorname{arccot} x$ 等.

5. 函数的连续性

(1)连续函数的概念

函数:$y=f(x)$ 在点 x_0 处连续 $\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

通俗来说,在该点的极限等于该点的函数值时,函数在该点连续.

不连续的点也称为间断点.

(2)判断函数连续性的方法

方法 1　图像法:如图 2-3 所示,图像不断,则连续.

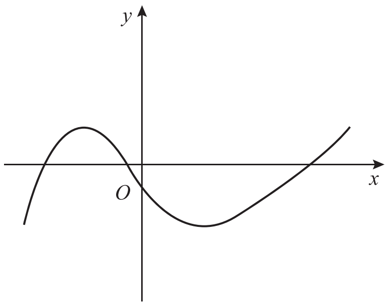


图 2-3

方法 2　利用连续的概念:若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$,则 $f(x)$ 在点 x_0 处连续. 简记为在该点的极限等于该点的函数值.

方法 3　分段函数:$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$ 且 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$,即 $f(x)$ 在点 x_0 处既左连续,又右连续.

方法 4　对于一般的初等函数，通过定义域可以观察出来．比如：

$y=\sin(3x^3+1)$，定义域为 $\mathbf{R}$，此函数在 $\mathbf{R}$ 上连续．

$y=\dfrac{1}{x+2}$，定义域为 $\{x|x\neq -2\}$，此函数在 $x=-2$ 处间断，其余点均为连续点．

$y=\sqrt{1-\cos x}$，定义域为 $\mathbf{R}$，显然，此函数在 $\mathbf{R}$ 上连续．

当然，在利用方法 4 时，单纯通过求定义域来判断连续性是不行的，如 $y=\sqrt{\cos x-1}$，其定义域为 $\{x|x=2k\pi, k$ 为整数$\}$，但通过画图可知该函数是由分散的点组成的图像，故该函数在 $\mathbf{R}$ 上处处不连续．

(3)间断点的分类

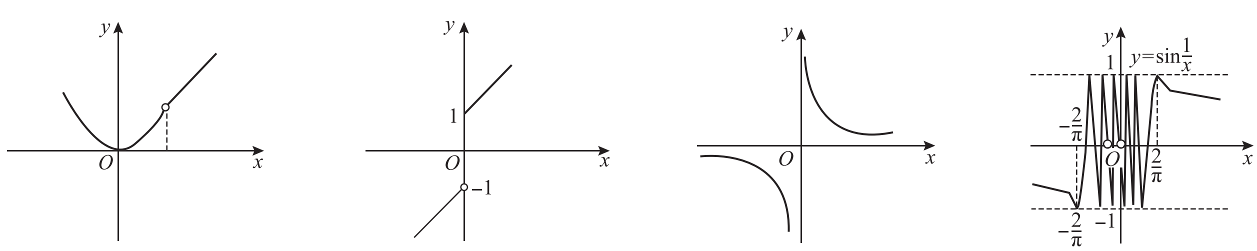
第一类间断点(左、右极限均存在)分为

$$\begin{cases}\text{可去间断点(左极限 = 右极限)，如 } y=\begin{cases}x, & x\neq 1\\ 0, & x=1\end{cases}\\ \text{跳跃间断点(左极限}\neq\text{右极限)，如 } y=\begin{cases}x+1, & x\geqslant 1\\ x-1, & x<1\end{cases}\end{cases}$$

第二类间断点(左、右极限至少有一个不存在)分为

$$\begin{cases}\text{无穷间断点，如 } y=\dfrac{1}{x}, x=0 \text{ 为无穷间断点}\\ \text{振荡间断点，如 } y=\sin\dfrac{1}{x}, x=0 \text{ 为振荡间断点}\end{cases}$$

用图像来说明 $y=f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上的连续性，如图 2-4 所示．



(a)可去间断点　(b)跳跃间断点　(c)无穷间断点　(d)振荡间断点

图 2-4

(4)闭区间上连续函数的性质

①有界性：闭区间上的连续函数一定有界．

②最值性：闭区间上的连续函数一定能取得最大值和最小值．

③零点定理：若 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)f(b)<0$，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=0$.

提示:零点定理用来判断根的存在性,如果再结合单调性,可判断根的个数.

例 2-6　设 $y=\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$,要使 $f(x)$ 在 $x=3$ 处连续,应补充定义,$f(3)=$________.

解　要使 $f(x)$ 在 $x=3$ 处连续,由连续的概念知,必须有 $\lim\limits_{x\to3}f(x)=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}=f(3)$. 又由 $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x-3}{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}=\dfrac{1}{4}$,知 $f(3)=\dfrac{1}{4}$,所以应补充定义 $f(3)=\dfrac{1}{4}$.

由此可以看出,$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}, & x\neq3\\ \dfrac{1}{4}, & x=3\end{cases}$ 在 $\mathbf{R}$ 上连续.

例 2-7　$x=0$ 是函数 $f(x)=\begin{cases}e^{\frac{1}{x}}, & x<0\\ 0, & x\geqslant0\end{cases}$ 的(　　).

A. 连续点　　B. 第一类可去间断点

C. 第一类跳跃间断点　　D. 第二类间断点

解　观察此题知,应先求 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的左极限.

当 $x\to0^-$ 时,$\dfrac{1}{x}\to-\infty$,所以有 $e^{\frac{1}{x}}\to0$,$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=0=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=f(0)$,$\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$,由连续的概念知,$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,故选 A.

若把函数改为 $f(x)=\begin{cases}e^{\frac{1}{x}}, & x<0\\ 2, & x=0\\ 0, & x>0\end{cases}$,则 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=0=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$,所以 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0\neq f(0)=2$,$x=0$ 为可去间断点,故选 B.

若把函数改为 $f(x)=\begin{cases}e^{\frac{1}{x}}, & x<0\\ 3, & x\geqslant0\end{cases}$,则 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=0\neq\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=3$,所以 $x=0$ 为跳跃间断点,故选 C.

若把函数改为 $f(x)=\begin{cases}e^{\frac{1}{x}}, & x\neq0\\ 0, & x=0\end{cases}$,则 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=0$,而 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$,$x=0$ 属于第二类间断点,故选 D.

例 2-8　设 $f(x)=\begin{cases}x+2, & x\leqslant0\\ x^2+a, & 0<x<1\\ bx, & x>1\end{cases}$ 在 $\mathbf{R}$ 上连续,则 $a=$________,$b=$________.

解 根据连续性,左极限必须等于右极限,易知 $a=2,b=3$.

例 2-9 指出下列函数的间断点并说明其类型.

(1) $f(x)=\dfrac{1}{x}+\sin x$;

(2) $f(x)=\dfrac{\sin x}{|x|}$;

(3) $f(x)=|\cos x|,x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$;

(4) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{\sin x}, & x<0\\ 1, & x=0\\ e^{\frac{1}{x-2}}, & x>1\end{cases}$.

解 (1) $x=0$ 为无穷间断点.

(2) $x=0$ 为第一类跳跃间断点.

(3) 因为 $f(x)=|\cos x|=\left[\begin{array}{ll}0, & x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},0\right)\\ 1, & x=0\\ 0, & x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]\end{array}\right.$,所以 $x=0$ 为可去间断点.

(4) 间断点是:$x=k\pi,k\in\mathbf{Z}^-,x=2,x=0$.

对于 $x=0,f(0+0)=e^{-\frac{1}{2}}$,$f(0-0)=\infty$,$x=0$ 为第二类间断点;

对于 $x=k\pi,k\in\mathbf{Z}^-$,$\underset{x\to k\pi}{f(x)}=\infty$,所以 $x=k\pi,k\in\mathbf{Z}^-$ 为第二类无穷间断点;

对于 $x=2,f(2-0)=0,f(2+0)=\infty$,$x=2$ 为第二类间断点.

注意: 要牢记函数连续性的概念和间断点类型.

例 2-10 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{\tan(\sin 2x)}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$,若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,求 a.

解 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\tan(\sin 2x)}=\dfrac{1}{2}=f(0)=a$,故 $a=\dfrac{1}{2}$.

例 2-11 $f(x)=\begin{cases}ax^2\sin\dfrac{1}{x}+\dfrac{\ln(1-2x)}{\sin 2x}, & x<0\\ b, & x=0\\ c\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{2}{x}}, & x>0\end{cases}$,若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,求 a、b、c.

解　$f(0-0)=\lim\limits_{x\to0^-}\left[ax^2\sin\dfrac{1}{x}+\dfrac{\ln(1-2x)}{\sin 2x}\right]=a\lim\limits_{x\to0^-}x^2\sin\dfrac{1}{x}+\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\ln(1-2x)}{\sin 2x}=-1$，$f(0+0)=\lim\limits_{x\to0^+}c\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{2}{x}}=ce^{-4}$.

由 $f(0-0)=f(0+0)=f(0)$，得 $-1=b=ce^{-4}$. 故 $b=-1$，$c=-e^4$，a 为任意实数.

例 2-12　$f(x)=\begin{cases}g\left(\dfrac{1}{x}\right)\sin x, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，其中 $g(x)$ 为有界函数，问 $f(x)$ 在 $x=0$ 是否连续？

解　因为 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}g\left(\dfrac{1}{x}\right)\sin x=0=f(0)$，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

例 2-13　$f(x)=\dfrac{\sin|x-1|}{x-1}$ 在 $x=1$ 处可能连续吗？

解　$f(1-0)=\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{|x-1|}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{1-x}{x-1}=-1$，$f(1+0)=\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{|x-1|}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x-1}{x-1}=1$.

故不论 $f(1)$ 取何值，$f(x)$ 均不能连续.

例 2-14　讨论 $f(x)=\begin{cases}e^{\frac{1}{x}}, & x<0\\ 0, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ \dfrac{\ln x}{x-1}, & x>1\end{cases}$ 在 $x=0$，$x=1$ 处的连续性.

解　在 $x=0$ 处，因为 $\lim\limits_{x\to0^-}e^{\frac{1}{x}}=0$，$\lim\limits_{x\to0^+}0=0$，且 $f(0)=0$，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续；在 $x=1$ 处，因为 $\lim\limits_{x\to1^-}0=0$，$\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\ln x}{x-1}\xlongequal{x-1=t}\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln(1+t)}{t}=1$，所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 不连续.

例 2-15　求 $f(x)=\dfrac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x}}$ 的间断点，并判别间断点的类型.

解　间断点为 $x=0$，$x=-1$，$x=1$. $f(x)=\dfrac{1}{x(x+1)}\times\dfrac{x(x-1)}{1}=\dfrac{x-1}{x+1}$. 在 $x=0$ 处，因为 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-1}{x+1}=0$，所以 $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类可去间断点；在 $x=1$ 处，因为 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{x+1}=0$，所以 $x=1$ 是 $f(x)$ 的第一类可去间断点；在 $x=-1$ 处，因为 $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x-1}{x+1}=\infty$，所以 $x=-1$ 是 $f(x)$ 的第二类无穷间断点.

例 2-16　证明 $x^4-2x-4=0$ 在区间 $(-2,2)$ 内至少有两个实根.

证　因为 $f(x)$ 在 $[-2,0]$ 连续，且 $f(0)=-4<0$，$f(-2)=16>0$，所以由零点定理知，$f(x)=0$ 在

$(-2,0)$上至少有一个实根.

又因为$f(x)$在$[0,2]$连续,且$f(0)=-4<0$,$f(2)=16-8=8>0$,所以由零点定理知,$f(x)=0$在$(0,2)$上至少有一个实根.

综上所述,$f(x)=0$在$(-2,2)$上至少有两个实根.

例 2-17　方程$x^5+x-1=0$实根的个数为(　　).

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

解　设$f(x)=x^5+x-1$,当$x<0$时,$f(x)<0$;当$x>1$时,$f(x)>0$. 所以$f(x)$在$(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$上不会产生零点,所以可以在区间$[0,1]$上找零点.

显然,$f(x)$在$[0,1]$上连续,又因为$f(0)f(1)<0$,由零点定理知,至少存在一点$\xi\in(0,1)$,使得$f(\xi)=0$,ξ即为零点.

又因为$f'(x)=5x^4+1>0$,所以$f(x)$在$[0,1]$上单调递增. 因此,$f(x)$在$[0,1]$上有且仅有一个根,故选 B.

例 2-18　方程$x-2\sin x=0$在$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$上的实根个数为(　　).

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

解　设$f(x)=x-2\sin x$,显然$f(x)$在$\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$上连续,且$f\left(\frac{\pi}{2}\right)f(\pi)<0$,由零点定理知,至少存在一点$\xi\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$,使得$f(\xi)=0$,$\xi$即为零点. 又由$f'(x)=1-2\cos x>0$, $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$,所以$f(x)$在$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$上单调递增. 因此,原方程仅有一个实根,故选 B.

例 2-19　设$f(x)$在$[0,1]$上连续,$f(x)>0$,则方程$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+\int_1^x \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t=0$在$[0,1]$内实根的个数为(　　).

A. 0　　B. 3　　C. 2　　D. 1

解　设$F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+\int_1^x \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t$,显然$F(x)$在$[0,1]$上连续,因为$f(x)>0$, $F(0)=\int_0^0 f(t)\,\mathrm{d}t+\int_1^0 \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t=-\int_0^1 \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t<0$, $F(1)=\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t+\int_1^1 \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t=-\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t>0$,由零点定理知,$F(x)$在$[0,1]$上至少有一个零点,又因为$F'(x)=f(x)+\frac{1}{f(x)}>0$,所以$F(x)$在$[0,1]$上单调递增. 因此,原方程有且仅有一个实根,故选 D.

注意:此题用到了定积分的性质:在区间$[a,b]$上,$f(x)>0$,则$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x>0$;也用到了变限积分的求导.