

高等学历-高等数学二（试卷）



类目：高等学历继续教育模拟试卷
书名：高等学历-高等数学二（试卷）
主编：陈智秀
出版社：河北科学技术出版社
开本：正 16 开
书号：978-7-5717-1208-2
使用层次：成人教育
出版时间：2022 年 11 月
定价：26.00 元
印刷方式：单色
是否有资源：是

图书同步精讲课程

—课时多、讲得细、学得快，通过考试更容易—

提升学历就选高等学历继续教育



理论精讲

明确考情
夯实基础



真题讲练

掌握规律
巩固提升



专题突破

把握重点
突破难点



模考训练

模考强化
标准预测

课程说明

本课程视频由一线教师录制。

本课程与最新考试大纲配套。

本课程的学习平台为小书恋学习公众号，扫描右侧二维码观看。

立即扫码



小书恋学习公众号

全国各类高等学历继续教育招生考试备考用书（专科起点升本科）

教材系列

- | | | | |
|----------------------------|-----------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| ☐ 政治 | ☐ 英语 | ☐ 高等数学（一） | ☐ 高等数学（二） |
| ☐ 民法 | ☐ 教育理论 | ☐ 医学综合 | ☐ 大学语文 |
| ☐ 艺术概论 | ☐ 生态学基础 | | |

试卷系列

- | | | | |
|----------------------------|-----------------------------|-------------------------------|--|
| ☐ 政治 | ☐ 英语 | ☐ 高等数学（一） | ☒ 高等数学（二） |
| ☐ 民法 | ☐ 教育理论 | ☐ 医学综合 | ☐ 大学语文 |
| ☐ 艺术概论 | ☐ 生态学基础 | | |

全国各类高等学历继续教育招生考试真题汇编及全真模拟

高等数学（二）

专科起点升本科

主编 陈智秀

全国各类高等学历继续教育招生考试真题汇编及全真模拟

全国百所继续教育机构推荐用书

· 全新版 ·

高等数学（二）

专科起点升本科

主编 陈智秀

✓ 重点讲解

✓ 视频课程

✓ 强化训练

✓ 全新真题

责任编辑：王 宇
责任校对：张京生
美术编辑：张 帆

ISBN 978-7-5717-1208-2



9 787571 712082

定价：26.00元

©

河北科学技术出版社



河北科学技术出版社

目 录



图书在版编目(CIP)数据

高等数学(二)：专科起点升本科 / 陈智秀主编
—石家庄：河北科学技术出版社，2022.9(2025.1重印)
全国各类高等学历继续教育招生考试真题汇编及全真模拟 / 张东红主编
ISBN 978-7-5717-1208-2

I. ①高… II. ①陈… III. ①高等数学—成人高等教育—升学参考资料 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2022)第 156584 号

高等数学(二) 专科起点升本科

GAODENG SHUXUE (ER) ZHUANKE QIDIAN SHENG BENKE
主编 陈智秀

出版发行 河北科学技术出版社
地 址 石家庄市友谊北大街 330 号(邮编:050061)
印 刷 唐山唐文印刷有限公司
开 本 787 毫米×1092 毫米 1/8
印 张 5
字 数 100 千字
版 次 2022 年 9 月第 1 版
印 次 2025 年 1 月第 3 次印刷
定 价 20.00 元

2024 年成人高等学校招生全国统一考试高等数学(二)试题	(1-6)
2024 年成人高等学校招生全国统一考试高等数学(二)试题参考答案	(7-8)
2023 年成人高等学校招生全国统一考试高等数学(二)试题	(1-6)
2023 年成人高等学校招生全国统一考试高等数学(二)试题参考答案	(7-8)
2022 年成人高等学校招生全国统一考试高等数学(二)试题	(1-6)
2022 年成人高等学校招生全国统一考试高等数学(二)试题参考答案	(7-8)
2021 年成人高等学校招生全国统一考试高等数学(二)试题	(1-6)
2021 年成人高等学校招生全国统一考试高等数学(二)试题参考答案	(7-8)
2020 年成人高等学校招生全国统一考试高等数学(二)试题	(1-6)
2020 年成人高等学校招生全国统一考试高等数学(二)试题参考答案	(7-8)
2019 年成人高等学校招生全国统一考试高等数学(二)试题	(1-6)
2019 年成人高等学校招生全国统一考试高等数学(二)试题参考答案	(7-8)
2018 年成人高等学校招生全国统一考试高等数学(二)试题	(1-6)
2018 年成人高等学校招生全国统一考试高等数学(二)试题参考答案	(7-8)
高等数学(二)全真模拟试卷(一)	(1-6)
高等数学(二)全真模拟试卷(一)参考答案	(7-8)
高等数学(二)全真模拟试卷(二)	(1-6)
高等数学(二)全真模拟试卷(二)参考答案	(7-8)
高等数学(二)全真模拟试卷(三)	(1-6)
高等数学(二)全真模拟试卷(三)参考答案	(7-8)

2024 年成人高等学校招生全国统一考试

高等数学(二)试题

题号	一	二	三	总分	统分人签字
得分					

第 I 卷 选择题 (共 84 分)

得分	评卷人

一、选择题(1~12 小题,每小题 7 分,共 84 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin mx}{x} = 2$, 则 $m =$ ()

- A. 0 B. $\frac{1}{2}$ C. 1 D. 2

2. 设 $y = \ln x + x^2$, 则 $y' =$ ()

- A. $\frac{1}{x} + 2x$ B. $\frac{1}{x} - 2x$
C. $\ln x + 2x$ D. $\ln x - 2x$

3. 设 $y = xe^{2x}$, 则 $y' =$ ()

- A. $(1+x)e^{2x}$ B. $(1+2x)e^{2x}$
C. $2xe^{2x}$ D. $(1-2x)e^{2x}$

4. 设随机变量 X 的概率分布为

X	3	4	5
P	0.1	a	0.6

则 $a =$ ()

- A. 0.1 B. 0.2 C. 0.3 D. 0.4

5. 曲线 $y = xe^{-x}$ 的拐点坐标为()

- A. (0,0) B. $(2, 2e^{-2})$
C. $(-1, -e)$ D. $(1, e^{-1})$

6. 设 $f(x)$ 的一个原函数为 e^{x^2} , 则 $f(x) =$ ()

- A. e^{x^2} B. $2xe^{x^2}$
C. xe^{x^2} D. $2e^{x^2}$

7. $\int_{-1}^1 (\arctan x + x^2) dx =$ ()

- A. $\frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}$ B. $\frac{\pi}{2}$
C. $\frac{2}{3}$ D. 0

8. $\int_0^{\pi^2} \cos \sqrt{x} dx =$ ()

- A. -4 B. -2
C. 0 D. 2

9. $\int \frac{(x+1)^2}{x} dx =$ ()

- A. $x^2 + x + \ln|x| + C$ B. $x^2 + 2x + \ln|x| + C$
C. $\frac{x^2}{2} + x + \ln|x| + C$ D. $\frac{x^2}{2} + 2x + \ln|x| + C$

10. 设 $z = 2xy + \frac{x}{y}$, 则 $\frac{\partial z}{\partial y} =$ ()

- A. $2x + \frac{1}{y}$ B. $2y + \frac{1}{y}$
C. $2x + \frac{x}{y^2}$ D. $2x - \frac{x}{y^2}$

11. 设 $z = xf(y)$, 其中 f 可导, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$ ()

- A. $f'(y)$ B. x
C. $f(y)$ D. $xf(y)$

12. 设 A, B 为随机事件, 则 $P(A - B) = P(A) - P(B)$ 的充要条件是()

- A. $A \subset B$ B. $P(B - A) = 0$
C. $A = B$ D. $P(A - B) = 0$

第Ⅱ卷 非选择题 (共 66 分)

得 分	评卷人

二、填空题(13~15 小题,每小题 7 分,共 21 分)

13. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x}, x \geq 1, \\ a \cos \pi x, x < 1 \end{cases}$ 在 $x = 1$ 处连续,则 $a =$ _____.

14. 若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+2a}{x-a} \right)^x = e^6$, 则 $a =$ _____.

15. 曲线 $y = x^3$ 在点(1,1)处法线的方程为_____.

得 分	评卷人

三、解答题(16~18 题,每小题 15 分,共 45 分. 解答应写出推理、演算步骤)

16. (本题满分 15 分)

求函数 $f(x) = x^2(x-1)^2$ 的单调区间和极值.

17. (本题满分 15 分)

计算 $\int \sin^2 x \, dx$.

弥封线内不要答题

18. (本题满分 15 分)

求由抛物线 $y^2 = 2x$ 和直线 $x + y - 4 = 0$ 所围成的图形的面积.

2024 年成人高等学校招生全国统一考试
高等数学(二)试题参考答案

一、选择题

1. D 2. A 3. B 4. C 5. B 6. B
7. C 8. A 9. D 10. D 11. A 12. B

二、填空题

13. -2

【解析】因为 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处连续,所以 $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$,而 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} a \cos \pi x = -a$,
 $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2}{x} = 2$. 故有 $-a = 2$,即 $a = -2$.

14. 2

【解析】

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2a}{x-a} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3a}{x-a} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{3a}{x-a} \right)^{\frac{x-a}{3a}} \right]^{\frac{3ax}{x-a}} = e^{3a} = e^6. \text{ 故 } a = 2.$$

15. $x + 3y - 4 = 0$

【解析】 $y' = 3x^2$,则 $k_{切} = 3x^2|_{x=1} = 3$. 故 $k_{法} = -\frac{1}{3}$,则法线方程为 $y - 1 = -\frac{1}{3}(x - 1)$. 化简为 $x + 3y - 4 = 0$.

三、解答题

16. $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$.

因为 $f(x) = x^2(x-1)^2 = x^4 - 2x^3 + x^2$, 则

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^3 - 6x^2 + 2x \\ &= 2x(2x^2 - 3x + 1) \\ &= 2x(x-1)(2x-1), \end{aligned}$$

令 $f'(x) = 0$, 得驻点 $x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = 1$.

列表:

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2}, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	极小值 $f(0)=0$	$\nearrow$	极大值 $f(\frac{1}{2})=\frac{1}{16}$	$\searrow$	极小值 $f(1)=0$	$\nearrow$

所以, $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, \frac{1}{2}), (1, +\infty)$; 单调递减区间为 $(-\infty, 0), (\frac{1}{2}, 1)$.

极大值为 $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{16}$, 极小值为 $f(0) = f(1) = 0$.

$$\begin{aligned} 17. \int \sin^2 x \, dx &= \int \frac{1 - \cos 2x}{2} \, dx \\ &= \int \frac{1}{2} dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx \\ &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \sin 2x + C. \end{aligned}$$

$$18. \text{ 联立 } \begin{cases} y^2 = 2x, \\ x + y - 4 = 0. \end{cases}$$

解得交点 $(2, 2), (8, -4)$.

所以所求平面图形的面积为

$$\begin{aligned} S &= \int_{-4}^2 \left(4 - y - \frac{y^2}{2} \right) dy \\ &= \left(4y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{6} \right) \Big|_{-4}^2 \\ &= 18. \end{aligned}$$

2023 年成人高等学校招生全国统一考试

高等数学(二)试题

题 号	一	二	三	总 分	统分人签字
得 分					

第 I 卷 选择题 (共 40 分)

得 分	评卷人

一、选择题(本大题共 10 小题,每小题 4 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 + x} = (\quad)$
A. -1 B. 0
C. $\frac{1}{2}$ D. 1
- 设函数 $f(x) = x^3 + 5\sin x$, 则 $f'(0) = (\quad)$
A. 5 B. 3
C. 1 D. 0
- 设函数 $f(x) = \ln x - x$, 则 $f'(x) = (\quad)$
A. x B. $x - 1$
C. $\frac{1}{x}$ D. $\frac{1}{x} - 1$
- 函数 $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 3$ 的单调递减区间是()
A. $(3, +\infty)$ B. $(-\infty, +\infty)$
C. $(-\infty, 0)$ D. $(0, 3)$
- $\int x^{\frac{2}{3}} dx = (\quad)$
A. $x^{\frac{2}{3}} + C$ B. $\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + C$
C. $x^{\frac{5}{3}} + C$ D. $x^{\frac{1}{3}} + C$

- 设函数 $f(x) = |x|$, 则 $\int_{-1}^1 f(x) dx = (\quad)$
A. -2 B. 0 C. 1 D. 2
- 设 $f(x)$ 为连续函数, 且满足 $\int_0^x f(t) dt = e^x - 1$, 则 $f(x) = (\quad)$
A. e^x B. $e^x - 1$
C. $e^x + 1$ D. $x + 1$
- 设 $z = e^{xy}$, 则 $dz = (\quad)$
A. $e^{xy} dx + e^{xy} dy$ B. $e^x dx + e^y dy$
C. $y e^{xy} dx + x e^{xy} dy$ D. $e^y dx + e^x dy$
- 设 $z = \frac{1}{4}(x^2 + y^2)$, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (\quad)$
A. $\frac{x}{2}$ B. 0
C. $\frac{y}{2}$ D. $x + y$
- 投掷一枚均匀硬币 5 次, 其中恰有 3 次正面朝上的概率是()
A. $\frac{11}{16}$ B. $\frac{3}{5}$
C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{5}{16}$

第 II 卷 非选择题 (共 110 分)

得 分	评卷人

二、填空题(11~20 小题,每小题 4 分,共 40 分)

- $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{1+x} - 2}{x - 3} = \underline{\hspace{2cm}}.$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^x = \underline{\hspace{2cm}}.$
- 设函数 $f(x) = e^{2x}$, 则 $f^{(n)}(0) = \underline{\hspace{2cm}}.$
- 设函数 $f(x) = x^2 - 2x + 4$, 曲线 $y = f(x)$ 在 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线与直线 $y = x - 1$ 平行, 则 $x_0 = \underline{\hspace{2cm}}.$
- 曲线 $y = xe^x$ 的拐点坐标为 $\underline{\hspace{2cm}}.$
- 曲线 $y = \frac{2x}{1+x^2}$ 的渐近线方程为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

17. $\int \frac{x}{x^2+4}dx =$ _____.

18. 由曲线 $y = x^2, x = y^2$ 所围成的平面图形的面积为_____.

19. $\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx =$ _____.

20. 函数 $z = x^2 + y^2 - x - y - xy$ 的驻点坐标为_____.

得 分	评卷人

三、解答题(21~28 题,共 70 分.解答应写出推理、演算步骤)

21. (本题满分 8 分)

计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$.

22. (本题满分 8 分)

设 $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$,求 dy .

23. (本题满分 8 分)

计算 $\int x^2 \cos x dx$.

24. (本题满分 8 分)

计算 $\int_0^1 x \sqrt{1 - x^2} dx$.

25. (本题满分 8 分)

盒中有 5 个球,其中 3 个白球,2 个黑球,从中随机一次抽取 3 个球,用 X 表示抽取到的白球的个数.

- (1)求随机变量 X 的概率分布;
- (2)求 X 的数学期望 $E(X)$.

弥 封 线 内 不 要 答 题

26. (本题满分 10 分)

要做一个容积为 V 立方米的密闭圆柱形容器,两底面材料的价格为每平方米 a 元,侧面材料的价格为每平方米 b 元,问圆柱形容器的底面半径与高的比等于多少时,造价最低?

27. (本题满分 10 分)

证明:当 $x \geq 0$ 时, $\ln(1+x) \geq x - \frac{x^2}{2}$.

28. (本题满分 10 分)

设函数 $f(x,y) = \frac{1}{2}(x^n + y^n)$, n 为大于 1 的整数. 求在条件 $x+y=c$ 下 $f(x,y)$ 的最小值,其中 $x>0,y>0,c$ 为正常数.

2023 年成人高等学校招生全国统一考试
高等数学(二)试题参考答案

一、选择题

1. D 2. A 3. D 4. D 5. B
6. C 7. A 8. C 9. B 10. D

二、填空题

11. $\frac{1}{4}$ 12. e^2 13. 2^n 14. $\frac{3}{2}$ 15. $(-2, -2e^{-2})$

16. $y = 0$ 17. $\frac{1}{2}\ln(x^2 + 4) + C$ 18. $\frac{1}{3}$ 19. $\frac{1}{2}$ 20. $(1, 1)$

三、解答题

21. 解: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2} = \frac{1}{2}.$

22. 解: $y' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}(x + \sqrt{x^2 + 1})'$
 $= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}\right)$
 $= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}}$
 $= \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$

所以 $dy = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}dx.$

23. 解: $\int x^2 \cos x dx = \int x^2 d\sin x$
 $= x^2 \sin x - 2 \int x \sin x dx$
 $= x^2 \sin x + 2(x \cos x - \int \cos x dx)$
 $= x^2 \sin x + 2(x \cos x - \sin x) + C.$

24. 解: $\int_0^1 x \sqrt{1 - x^2} dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{1 - x^2} d(1 - x^2)$
 $= -\frac{1}{3}(1 - x^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$

25. 解: (1) X 的可能取值为 1, 2, 3.

$$P\{X = 1\} = \frac{C_3^1 C_2^2}{C_5^3} = \frac{3}{10},$$

$$P\{X = 2\} = \frac{C_3^2 C_2^1}{C_5^3} = \frac{3}{5},$$

$$P\{X = 3\} = \frac{C_3^3}{C_5^3} = \frac{1}{10}.$$

故 X 的概率分布为

X	1	2	3
P	0.3	0.6	0.1

(2) $E(X) = 1 \times 0.3 + 2 \times 0.6 + 3 \times 0.1 = 1.8.$

26. 解: 设底面半径和高分别为 r, h . 则造价函数 $L = 2a\pi r^2 + 2b\pi rh$, 且 $\pi r^2 h = V$.

将 $h = \frac{V}{\pi r^2}$ 代入 L 中, 得 $L = 2a\pi r^2 + \frac{2bV}{r}.$

令 $L' = 4a\pi r - \frac{2bV}{r^2} = 0$, 得 $2a\pi r^3 = bV$,

则有 $2a\pi r^3 = b\pi r^2 h$, 即 $2ar = bh$, 解得 $\frac{r}{h} = \frac{b}{2a}.$

由实际问题的意义知, 当底面半径与高的比为 $\frac{b}{2a}$ 时, 造价最低.

27. 解: 令 $f(x) = \ln(1 + x) - x + \frac{x^2}{2}$, 则 $f'(x) = \frac{1}{1 + x} - 1 + x = \frac{x^2}{1 + x},$

当 $x \geq 0$ 时, $f'(x) \geq 0$. 因此, 当 $x \geq 0$ 时, $f(x)$ 为单调增函数.

故有 $f(x) \geq f(0) = 0$. 故当 $x \geq 0$ 时, $\ln(1 + x) \geq x - \frac{x^2}{2}.$

28. 解: 令 $L(x, y, \lambda) = \frac{1}{2}(x^n + y^n) + \lambda(x + y - c),$

$$\text{则} \begin{cases} L_x = \frac{1}{2}nx^{n-1} + \lambda = 0, \\ L_y = \frac{1}{2}ny^{n-1} + \lambda = 0, \\ L_\lambda = x + y - c = 0, \end{cases} \text{解得 } x = y = \frac{c}{2}.$$

由实际问题的意义知当 $x = y = \frac{c}{2}$ 时, $f(x, y)$ 取得最小值 $\frac{1}{2} \left[\left(\frac{c}{2}\right)^n + \left(\frac{c}{2}\right)^n \right] = \left(\frac{c}{2}\right)^n.$

2022 年成人高等学校招生全国统一考试

高等数学(二)试题

题 号	一	二	三	总 分	统分人签字
得 分					

第 I 卷 选择题 (共 40 分)

得 分	评卷人

一、选择题(本大题共 10 小题,每小题 4 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

- 设函数 $f(x)=\sin x, g(x)=x^2$, 则 $f(g(x))$ ()
A. 是奇函数但不是周期函数
B. 是偶函数但不是周期函数
C. 既是奇函数又是周期函数
D. 既是偶函数又是周期函数
- 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+ax)^2-1}{x}=2$, 则 $a=(\quad)$
A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
- 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, $g(x)$ 在 $x=0$ 处不连续, 则在 $x=0$ 处 ()
A. $f(x)g(x)$ 连续 B. $f(x)g(x)$ 不连续
C. $f(x)+g(x)$ 连续 D. $f(x)+g(x)$ 不连续
- 设 $y=\arccos x$, 则 $y'=(\quad)$
A. $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ B. $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
C. $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ D. $-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
- 设 $y=\ln(x+e^{-x})$, 则 $y'=(\quad)$
A. $\frac{1+e^{-x}}{x+e^{-x}}$ B. $\frac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}$

C. $\frac{1}{1-e^{-x}}$

D. $\frac{1}{x+e^{-x}}$

- 设 $y^{(n-2)}=x^2+\sin x$, 则 $y^{(n)}=(\quad)$
A. $2-\sin x$ B. $2-\cos x$
C. $2+\sin x$ D. $2+\cos x$
- 若函数 $f(x)$ 的导数 $f'(x)=-x+1$, 则 ()
A. $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 单调递减
B. $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 单调递增
C. $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 单调递增
D. $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 单调递增
- 曲线 $y=\frac{2x}{x-1}$ 的水平渐近线方程为 ()
A. $y=0$ B. $y=1$
C. $y=2$ D. $y=3$
- 设函数 $f(x)=\arctan x$, 则 $\int f'(x)dx=(\quad)$
A. $\arctan x+C$ B. $-\arctan x+C$
C. $\frac{1}{1+x^2}+C$ D. $-\frac{1}{1+x^2}+C$
- 设 $z=e^{x+y}$, 则 $dz\Big|_{(1,1)}=(\quad)$
A. $dx+dy$ B. $dx+edy$
C. $edx+dy$ D. e^2dx+e^2dy

第 II 卷 非选择题 (共 110 分)

得 分	评卷人

二、填空题(11~20 小题,每小题 4 分,共 40 分)

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x+x}{2e^x-x} = \underline{\hspace{2cm}}$.
- 当 $x \rightarrow 0$ 时, 函数 $f(x)$ 是 x 是 高阶无穷小量, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \underline{\hspace{2cm}}$.
- 设 $y=3x^2+\ln 3$, 则 $y' = \underline{\hspace{2cm}}$.
- 曲线 $y=x+\sqrt{x}$ 在点 $(1,2)$ 处的法线方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
- $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x \cos x}{1+x^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

16. $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx =$ _____.

17. 设函数 $f(x) = \int_0^x u \tan u du$, 则 $f'(\frac{\pi}{4}) =$ _____.

18. 设 $z = x^3y + xy^3$, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$ _____.

19. 设函数 $z = f(u, v)$ 具有连续偏导数, $u = x + y, v = xy$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} =$ _____.

20. 设 A, B 为两个随机事件, 且 $P(A) = 0.5, P(AB) = 0.4$, 则 $P(B|A) =$ _____.

得 分	评卷人

三、解答题(21~28 题, 共 70 分. 解答应写出推理、演算步骤)

21. (本小题满分 8 分)

设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin ax}{x}, & x < 0, \\ x+2, & x \geq 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 求 a .

22. (本小题满分 8 分)

设 $y = \frac{x}{1-x}$, 求 y' .

23. (本小题满分 8 分)

求 $\int \frac{1}{(x+1)(x+2)} dx$.

24. (本小题满分 8 分)

计算 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^4} dx$.

25. (本小题满分 8 分)

设离散型随机变量 X 的概率分布为

X	0	1	2
P	0.3	0.5	0.2

(1) 求 X 的分布函数 $F(x)$;

(2) 求 $E(X)$.

26. (本小题满分 10 分)

设 $z = z(x, y)$ 是由方程 $2y^2 + 2xz + z^2 = 1$ 所确定的隐函数, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

27. (本小题满分 10 分)

设 D 为由曲线 $y = x^2, y = 0, x = 2$ 所围成的图形.

(1) 求 D 的面积;

(2) 求 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

28. (本小题满分 10 分)

证明: 当 $x > 1$ 时, $\ln x < x - 1$.

2022 年成人高等学校招生全国统一考试 高等数学(二)试题参考答案

一、选择题

1. B 2. A 3. D 4. B 5. B 6. A 7. C 8. C 9. A 10. D

二、填空题

11. -1 12. 0 13. $6x$ 14. $2x + 3y - 8 = 0$

15. 0 16. $\sqrt{2} - 1$ 17. $\frac{\pi}{4}$ 18. $3x^2 + 3y^2$

19. $\frac{\partial f}{\partial u} + y \frac{\partial f}{\partial v}$ 20. 0.8

三、解答题

21. 解: 因为 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) = 2$.

由于 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin ax}{x} = a$, 所以 $a = 2$.

22. 解: $y' = \frac{1 - x - x \cdot (-1)}{(1 - x)^2}$
 $= \frac{1}{(1 - x)^2}$.

23. 解: $\int \frac{1}{(x+1)(x+2)} dx = \int \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) dx$
 $= \ln |x+1| - \ln |x+2| + C$
 $= \ln \left| \frac{x+1}{x+2} \right| + C$.

24. 解: $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^4} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b x^{-4} dx$
 $= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left. \frac{-x^{-3}}{3} \right|_1^b$
 $= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3b^3} \right)$
 $= \frac{1}{3}$.

25. 解: (1) $F(x) = P\{X \leq x\} = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 0.3, & 0 \leq x < 1, \\ 0.8, & 1 \leq x < 2, \\ 1, & x \geq 2. \end{cases}$

(2) $E(X) = 0 \times 0.3 + 1 \times 0.5 + 2 \times 0.2 = 0.9$.

26. 解: 方程两边分别对 x 和 y 求偏导数得

$$2z + 2x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + 2z \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$

$$4y + 2x \cdot \frac{\partial z}{\partial y} + 2z \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

$$\text{解得 } \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{z}{x+z}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2y}{x+z}.$$

27. 解: (1) D 的面积

$$S = \int_0^2 x^2 dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^2 = \frac{8}{3}.$$

(2) D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积

$$V = \int_0^2 \pi (x^2)^2 dx = \left. \frac{\pi x^5}{5} \right|_0^2 = \frac{32\pi}{5}.$$

28. 证明: 设 $f(x) = x - 1 - \ln x$, 则 $f'(x) = -1 - \frac{1}{x}$.

当 $x > 1$ 时, $f'(x) > 0$, 故 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 单调递增.

又因为 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处连续, 且 $f(1) = 0$, 所以当 $x > 1$ 时, $f(x) > 0$.

因为当 $x > 1$ 时, $x - 1 - \ln x > 0$, 即 $\ln x < x - 1$.

2021 年成人高等学校招生全国统一考试
高等数学(二)试题

题 号	一	二	三	总 分	统分人签字
得 分					

第 I 卷 选择题 (共 40 分)

得 分	评卷人

一、选择题(本大题共 10 小题,每小题 4 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan mx}{x} = 2$, 则 $m =$ ()
A. 0
B. $\frac{1}{2}$
C. 1
D. 2
2. 设 $y = e^x + \cos x$, 则 $y' =$ ()
A. $e^x + \cos x$
B. $e^x - \cos x$
C. $e^x - \sin x$
D. $e^x + \sin x$
3. 设 $y = x \tan x$, 则 $y' =$ ()
A. $\tan x + \frac{x}{\cos^2 x}$
B. $\frac{x}{\cos^2 x}$
C. $\tan x + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
D. $\tan x + \frac{x}{1+x^2}$
4. 设 $y = \frac{1}{1+x}$, 则 $y'' =$ ()
A. $-\frac{2}{(1+x)^3}$
B. $-\frac{1}{(1+x)^3}$
C. $\frac{1}{(1+x)^3}$
D. $\frac{2}{(1+x)^3}$

5. 曲线 $y = x^3 + 1$ 的拐点为()
A. (0,0)
B. (0,1)
C. (-1,0)
D. (1,1)
6. 设 $f(x)$ 的一个原函数为 $\cos 2x$, 则 $f(x) =$ ()
A. $-\sin 2x$
B. $\sin 2x$
C. $-2 \sin 2x$
D. $2 \sin 2x$
7. 设 $\int_{-a}^a (x^2 + x^3) dx = \frac{2}{3}$, 则 $a =$ ()
A. -2
B. -1
C. 1
D. 2
8. 设 $z = \sin(x - 3y^2)$, 则 $\frac{\partial z}{\partial y} =$ ()
A. $-6y \cos(x - 3y^2)$
B. $-6y \sin(x - 3y^2)$
C. $6y \cos(x - 3y^2)$
D. $6y \sin(x - 3y^2)$
9. 设 $z = f(x^2 + y)$, 其中 f 具有二阶导数, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$ ()
A. $xf''(x^2 + y)$
B. $2xf''(x^2 + y)$
A. $yf''(x^2 + y)$
B. $2xyf''(x^2 + y)$
10. 已知事件 A 与 B 互斥, 且 $P(A) = 0.5, P(B) = 0.4$, 则 $P(A + B) =$ ()
A. 0.4
B. 0.5
C. 0.7
D. 0.9

第 II 卷 非选择题 (共 110 分)

得 分	评卷人

二、填空题(11~20 小题,每小题 4 分,共 40 分)

11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{2x} =$ _____.
12. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} (1+x)^{\frac{1}{x}}, & x \neq 0, \\ a, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续, 则 $a =$ _____.
13. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 1}{x^2 + x + 2} =$ _____.
14. 设 $y = \cos(x + \frac{1}{x})$, 则 $y'(1) =$ _____.
15. 设 $f(\frac{1}{x}) = x^2 + \frac{1}{x} + 1$, 则 $f'(x) =$ _____.
16. 曲线 $y = 2x^3 + x - 1$ 在点 $(0, -1)$ 处法线的斜率为 _____.
17. $\int \frac{1}{4+x^2} dx =$ _____.

18. $\int x(x^2 - 1)dx =$ _____.

19. $\int_0^1 (x + e^x)dx =$ _____.

20. 设函数 $f(x, y) = x + y$, 则 $f(x + y, x - y) =$ _____.

得 分	评卷人

三、解答题(21~28 题, 共 70 分. 解答应写出推理、演算步骤)

21. (本小题满分 8 分)

计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}$.

22. (本小题满分 8 分)

求函数 $f(x) = e^{-x^2}$ 的单调区间和极值.

23. (本小题满分 8 分)

求 $\int (2\arcsin x + 1)dx$.

24. (本小题满分 8 分)

计算 $\int_1^4 \frac{1}{x + \sqrt{x}}dx$.

弥 封 线 内 不 要 答 题

25. (本小题满分 8 分)

设离散型随机变量 X 的概率分布为

X	0	1	2	3
P	a	$3a$	$4a$	$2a$

其中 a 为常数.

- (1) 求 a ;
(2) 求 $E(X)$.

26. (本小题满分 10 分)

设 $y = y(x)$ 是由方程 $e^y = x^2 + y$ 所确定的隐函数, 求 $\frac{dy}{dx}$.

27. (本小题满分 10 分)

设 D 为由直线 $x + y - 4 = 0$ 与曲线 $y = \frac{3}{x}$ 所围成的闭区域.

- (1) 求 D 的面积;
(2) 求 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

28. (本小题满分 10 分)

求函数 $f(x, y) = x^2 + y^2$ 在条件 $x^2 + y^2 - xy - 1 = 0$ 下的最大值和最小值.

2021 年成人高等学校招生全国统一考试 高等数学(二)试题参考答案

一、选择题

1. D 2. C 3. A 4. D 5. B 6. C 7. C 8. A 9. B 10. D

二、填空题

11. $\frac{3}{2}$ 12. e 13. 2 14. 0
15. $-\frac{2}{x^3} + 1$ 16. -1 17. $\frac{1}{2}\arctan \frac{x}{2} + C$ 18. $\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + C$
19. $e - \frac{1}{2}$ 20. $2x$

三、解答题

21. 解: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{2x} = -\frac{1}{2}.$

22. 解: 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, $f'(x) = -2xe^{-x^2}.$

令 $f'(x) = 0$, 得 $x = 0$,

当 $x < 0$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $x > 0$ 时, $f'(x) < 0$.

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, 0)$, 单调递减区间为 $(0, +\infty)$,

$f(x)$ 的极大值为 $f(0) = 1$.

23. 解: $\int (2\arcsin x + 1)dx = 2x\arcsin x - 2\int x d(\arcsin x) + x$
 $= 2x\arcsin x - \int \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}dx + x$
 $= 2x\arcsin x + 2\sqrt{1-x^2} + x + C.$

24. 解: 令 $t = \sqrt{x}$, 则 $x = t^2$, $dx = 2t dt$.

当 $x = 1$ 时, $t = 1$; 当 $x = 4$ 时, $t = 2$. 因此

$$\begin{aligned} \int_1^4 \frac{1}{x + \sqrt{x}} dx &= \int_1^2 \frac{2t}{t^2 + t} dt \\ &= 2 \int_1^2 \frac{1}{t + 1} dt \\ &= 2 \ln(t + 1) \Big|_1^2 \\ &= 2 \ln \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

25. 解: (1) 由概率分布的性质知,

$$a + 3a + 4a + 2a = 1,$$

所以 $a = 0.1$.

$$\begin{aligned} (2) E(X) &= 0 \times 0.1 + 1 \times 0.3 + 2 \times 0.4 + 3 \times 0.2 \\ &= 1.7. \end{aligned}$$

26. 解: 方程两边对 x 求导, 得 $e^y \frac{dy}{dx} = 2x + \frac{dy}{dx},$

$$\text{所以 } \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{e^y - 1}.$$

27. 解: 由 $\begin{cases} x + y - 4 = 0, \\ y = \frac{3}{x} \end{cases}$ 解得交点坐标为 $(1, 3), (3, 1).$

$$\begin{aligned} (1) D \text{ 的面积 } S &= \int_1^3 (4 - x - \frac{3}{x}) dx \\ &= (4x - \frac{x^2}{2} - 3\ln x) \Big|_1^3 \\ &= 4 - 3\ln 3. \end{aligned}$$

(2) D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积

$$\begin{aligned} V_x &= \pi \int_1^3 [(4 - x)^2 - (\frac{3}{x})^2] dx \\ &= \pi [-\frac{1}{3}(4 - x)^3 + \frac{9}{x}] \Big|_1^3 \\ &= \frac{8\pi}{3}. \end{aligned}$$

28. 解: 设 $F(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - xy - 1)$, 则

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + \lambda(2x - y),$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y + \lambda(2y - x),$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - xy - 1.$$

由 $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$ 与 $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$ 解得 $x = y$ 或 $x = -y$,

代入 $\frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0$ 得 $f(x, y)$ 在条件 $x^2 + y^2 - xy - 1 = 0$ 下可能的极值点为

$$(1, 1), (-1, -1), (\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}), (-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}).$$

因为由题设可知最大值和最小值一定存在, 所以最大值和最小值就在这些可能的极值点处取得.

$$\text{又 } f(1, 1) = f(-1, -1) = 2,$$

$$f(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}) = f(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}) = \frac{2}{3},$$

所以所求的最大值为 2, 最小值为 $\frac{2}{3}$.

2020 年成人高等学校招生全国统一考试
高等数学(二)试题

题 号	一	二	三	总 分	统分人签字
得 分					

第 I 卷 选择题 (共 40 分)

得 分	评卷人

一、选择题(本大题共 10 小题,每小题 4 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{1}{3x}} = (\quad)$
A. $e^{\frac{3}{2}}$ B. $e^{\frac{2}{3}}$ C. $e^{\frac{1}{6}}$ D. e^6
2. 设函数 $y = x + 2\sin x$, 则 $dy = (\quad)$
A. $(1 - 2\cos x)dx$ B. $(1 + 2\cos x)dx$
C. $(1 - \cos x)dx$ D. $(1 + \cos x)dx$
3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 2} = (\quad)$
A. $\frac{3}{2}$ B. 1 C. 2 D. $\frac{1}{2}$
4. 设函数 $f(x) = 3 + x^5$, 则 $f'(x) = (\quad)$
A. x^4 B. $1 + x^4$ C. $\frac{1}{5}x^4$ D. $5x^4$
5. 设函数 $f(x) = 2\ln x$, 则 $f''(x) = (\quad)$
A. $\frac{2}{x^2}$ B. $-\frac{2}{x^2}$ C. $\frac{1}{x^2}$ D. $-\frac{1}{x^2}$
6. $\int_{-2}^2 (1 + x)dx = (\quad)$
A. 4 B. 0 C. 2 D. -4
7. $\int \frac{3}{x^5}dx = (\quad)$
A. $\frac{3}{4x^4} + C$ B. $\frac{3}{5x^4} + C$
C. $-\frac{3}{4x^4} + C$ D. $-\frac{3}{5x^4} + C$

8. 把 3 本不同的语文书和 2 本不同的英语书排成一排, 则 2 本英语书恰好相邻的概率为()
A. $\frac{2}{5}$ B. $\frac{4}{5}$
C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{1}{2}$
9. 设函数 $z = x^2 - 4y^2$, 则 $dz = (\quad)$
A. $x dx - 4y dy$ B. $x dx - y dy$
C. $2x dx - 4y dy$ D. $2x dx - 8y dy$
10. 设函数 $z = x^3 + xy^2 + 3$, 则 $\frac{\partial z}{\partial y} = (\quad)$
A. $3x^2 + 2xy$ B. $3x^2 + y^2$
C. $2xy$ D. $2y$

第 II 卷 非选择题 (共 110 分)

得 分	评卷人

二、填空题(11~20 小题,每小题 4 分,共 40 分)

11. 设函数 $y = e^{2x}$, 则 $dy = \underline{\hspace{2cm}}$.
12. 函数 $f(x) = x^3 - 6x$ 的单调递减区间为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
13. 若函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2, & x \leq 0, \\ a + \sin x, & x > 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.
14. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x^2} = \underline{\hspace{2cm}}$.
15. $\int (3x + 2\sin x)dx = \underline{\hspace{2cm}}$.
16. 曲线 $y = \arctan(3x + 1)$ 在点 $(0, \frac{\pi}{4})$ 处切线的斜率为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
17. $(\int_0^{2x} \sin t^2 dt)' = \underline{\hspace{2cm}}$.
18. $\int_{-\infty}^1 e^x dx = \underline{\hspace{2cm}}$.
19. 区域 $D = \{(x, y) | 1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq x^2\}$ 的面积为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
20. 方程 $y^3 + \ln y - x^2 = 0$ 在点(1,1) 的某邻域确定隐函数 $y = y(x)$, 则 $\frac{dy}{dx}|_{x=1} = \underline{\hspace{2cm}}$.

得 分	评卷人

三、解答题(21~28 题,共 70 分.解答应写出推理、演算步骤)

21. (本小题满分 8 分)

计算 $\int x \sin x \, dx$.

22. (本小题满分 8 分)

计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x - x^2}{2 \sin^2 x}$.

23. (本小题满分 8 分)

已知函数 $f(x) = e^x \cos x$, 求 $f''\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

24. (本小题满分 8 分)

计算 $\int_0^1 \sqrt[3]{1+x} \, dx$.

弥封线内不要答题

25. (本小题满分 8 分)

设 D 为曲线 $y = \sqrt{x}$, 直线 $x = 4$, x 轴围成的有界区域, 求 D 绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积.

26. (本小题满分 10 分)

求函数 $z = x^2 + 2y^4 + 4xy^2 - 2x$ 的极值.

27. (本小题满分 10 分)

求曲线 $y = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ 的凹凸区间与拐点.

28. (本小题满分 10 分)

已知离散型随机变量 X 的概率分布为

X	-1	0	2
P	a	0.5	b

且 $E(X) = 0$.

- (1) 求 a, b ;
- (2) 求 $E[X(X + 1)]$.

2020 年成人高等学校招生全国统一考试 高等数学(二)试题参考答案

一、选择题

1. B 2. B 3. A 4. D 5. B 6. A 7. C 8. A 9. D 10. C

二、填空题

11. $2e^{2x} dx$ 12. $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ 13. -2 14. 1 15. $\frac{3}{2}x^2 - 2\cos x + C$
16. $\frac{3}{2}$ 17. $2\sin(4x^2)$ 18. e 19. $\frac{4}{3}$ 20. $\frac{1}{2}$

三、解答题

$$\begin{aligned} 21. \text{解: } \int x \sin x dx &= -\int x d(\cos x) \\ &= -(x \cos x - \int \cos x dx) \\ &= -x \cos x + \int \cos x dx \\ &= -x \cos x + \sin x + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 22. \text{解: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x - x^2}{2 \sin^2 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{2 \sin^2 x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2 \sin^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{2x^2} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2x^2} \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \\ &= -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 23. \text{解: } f'(x) &= e^x \cos x + e^x (\cos x)' \\ &= e^x \cos x - e^x \sin x \\ &= e^x (\cos x - \sin x), \\ f''(x) &= e^x (\cos x - \sin x) + e^x (\cos x - \sin x)' \\ &= e^x (\cos x - \sin x) + e^x (-\sin x - \cos x) \\ &= -2e^x \sin x, \end{aligned}$$

$$\text{故有 } f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2e^{\frac{\pi}{2}} \sin \frac{\pi}{2} = -2e^{\frac{\pi}{2}}.$$

$$\begin{aligned} 24. \text{解: } \int_0^1 \sqrt[3]{1+x} dx &= \int_0^1 (1+x)^{\frac{1}{3}} d(x+1) \\ &= \frac{1}{1+\frac{1}{3}} (1+x)^{\frac{1}{3}+1} \Big|_0^1 \\ &= \frac{3}{4} (1+x)^{\frac{4}{3}} \Big|_0^1 \\ &= \frac{3}{4} (2^{\frac{4}{3}} - 1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 25. \text{解: 区域 } D: 0 \leq y \leq 2, y^2 \leq x \leq 4, \\ \text{故所求旋转体的体积} \\ &= \pi \cdot 4^2 \cdot 2 - \int_0^2 \pi x^2 dy \\ &= 32\pi - \int_0^2 \pi y^4 dy \\ &= 32\pi - \frac{\pi}{5} y^5 \Big|_0^2 \\ &= \frac{128}{5} \pi. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 26. \text{解: } \frac{\partial z}{\partial x} &= 2x + 4y^2 - 2, \frac{\partial z}{\partial y} = 8y^3 + 8xy, \\ \text{令 } \frac{\partial z}{\partial x} &= 0, \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \end{aligned}$$

得驻点为 $(1, 0), (-1, 1), (-1, -1)$.

$$\text{而 } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 8y, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 24y^2 + 8x,$$

$$\text{在 } (1, 0) \text{ 点, } A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Big|_{(1,0)} = 2, B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{(1,0)} = 0, C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \Big|_{(1,0)} = 8,$$

$$B^2 - AC = -16 < 0, \text{ 且 } A > 0,$$

故函数在 $(1, 0)$ 点有极小值, $z_{\text{极小值}} = -1$;

$$\text{在 } (-1, 1) \text{ 点, } A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Big|_{(-1,1)} = 2, B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{(-1,1)} = 8, C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \Big|_{(-1,1)} = 16,$$

$B^2 - AC = 32 > 0$, 故点 $(-1, 1)$ 不是极值点;

$$\text{在 } (-1, -1) \text{ 点, } A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Big|_{(-1,-1)} = 2, B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{(-1,-1)} = -8, C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \Big|_{(-1,-1)} = 16,$$

$B^2 - AC = 32 > 0$, 故点 $(-1, -1)$ 不是极值点.

因此, 函数在点 $(1, 0)$ 有极小值, $z_{\text{极小值}} = -1$.

$$\begin{aligned} 27. \text{解: } y' &= 3x^2 - 6x + 2, y'' = 6x - 6, \\ \text{令 } y'' &= 0, \text{ 得 } x = 1. \end{aligned}$$

当 $x > 1$ 时, $y'' > 0$, 故 $(1, +\infty)$ 为曲线的凹区间;

当 $x < 1$ 时, $y'' < 0$, 故 $(-\infty, 1)$ 为曲线的凸区间;

函数的拐点为 $(1, 1)$.

$$28. \text{解: (1) 由概率的性质可知 } a + 0.5 + b = 1,$$

$$\text{又 } E(X) = 0, \text{ 得 } -1 \times a + 0 \times 0.5 + 2 \times b = 0,$$

$$\text{故有 } a = \frac{1}{3}, b = \frac{1}{6}.$$

$$(2) E[X(X+1)] = E(X^2 + X) = E(X^2) + E(X),$$

$$\text{而 } E(X^2) = D(X) + [E(X)]^2$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{3} \cdot (-1-0)^2 + \frac{1}{2} \cdot (0-0)^2 + \frac{1}{6} \cdot (2-0)^2 \\ &= 1, \end{aligned}$$

$$\text{因此, } E[X(X+1)] = 1 + 0 = 1.$$

19. 设函数 $z = \frac{e^y}{x}$, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$ _____ .

20. 设函数 $z = \sin x \cdot \ln y$, 则 $dz =$ _____ .

得 分	评卷人

三、解答题(21~28 题, 共 70 分. 解答应写出推理、演算步骤)

21. (本小题满分 8 分)

计算 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x}{2x^2 + 1}$.

22. (本小题满分 8 分)

设函数 $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$, 求 $f'(x)$.

23. (本小题满分 8 分)

计算 $\int \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}} dx$.

24. (本小题满分 8 分)

计算 $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \ln^3 x} dx$.

弥 封 线 内 不 要 答 题

25. (本小题满分 8 分)

一个袋中有 10 个乒乓球, 其中 7 个橙色, 3 个白色, 从中任取 2 个, 设事件 A 为“所取的 2 个乒乓球颜色不同”, 求事件 A 发生的概率 $P(A)$.

26. (本小题满分 10 分)

设函数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ 在 $x = 2$ 处取得极值, 点 $(1, -1)$ 为曲线 $y = f(x)$ 的拐点, 求 a, b, c .

27. (本小题满分 10 分)

已知函数 $f(x)$ 的导函数连续, 且 $f(1) = 0$, $\int_0^1 xf(x)dx = 4$, 求 $\int_0^1 x^2 f'(x)dx$.

28. (本小题满分 10 分)

设函数 $z = \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$, 证明: $x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

2019 年成人高等学校招生全国统一考试 高等数学(二)试题参考答案

一、选择题

1. D 2. B 3. C 4. B 5. C 6. A 7. D 8. C 9. D 10. A

二、填空题

11. 3 12. 2 13. $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ 14. $2x$ 15. $\cot x dx$ 16. $-\frac{1}{x} + C$

17. $2\sin\sqrt{x} + C$ 18. 4 19. $-\frac{e^y}{x^2}$ 20. $\cos x \ln y dx + \frac{\sin x}{y} dy$

三、解答题

$$\begin{aligned} 21. \text{解: } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x}{2x^2 + 1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{x}}{2 + \frac{1}{x^2}} \\ &= \frac{1 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}}{2 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2}} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 22. \text{解: } f'(x) &= \frac{1 + x^2 - x \cdot 2x}{(1 + x^2)^2} \\ &= \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2}. \end{aligned}$$

23. 解: 令 $x = \sin t$, $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$, 则有 $dx = \cos t dt$,

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}} dx &= \int \frac{1}{\sqrt{(1-\sin^2 t)^3}} \cdot \cos t dt \\ &= \int \frac{1}{\cos^2 t} dt \\ &= \tan t + C, \end{aligned}$$

而 $t = \arcsin x$, 故有

$$\int \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}} dx = \tan t + C$$

$$= \tan(\arcsin x) + C.$$

$$\begin{aligned} 24. \text{解: } \int_e^{+\infty} \frac{1}{x \ln^3 x} dx &= \int_e^{+\infty} \frac{1}{\ln^3 x} d(\ln x) \\ &= -\frac{1}{2(\ln x)^2} \Big|_e^{+\infty} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

25. 解: A 为所取的 2 个乒乓球颜色不同, 即 A 表示所取的 2 个球中 1 个球是橙色, 一个球是白色, 故 $P(A) = \frac{C_7^1 \cdot C_3^1}{C_{10}^2} = \frac{7}{15}$.

26. 解: 易知 $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, $f''(x) = 6ax + 2b$,
由于 $f(x)$ 在 $x = 2$ 处取得极值, 则 $f'(2) = 12a + 4b + c = 0$,
点 $(1, -1)$ 是 $y = f(x)$ 的拐点, 故有 $f(1) = -1$, $f''(1) = 0$,
即 $\begin{cases} a + b + c = -1, \\ 6a + 2b = 0, \end{cases}$ 解得 $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{3}{2}$, $c = 0$.

$$\begin{aligned} 27. \text{解: } \int_0^1 x^2 f'(x) dx &= \int_0^1 x^2 df(x) \\ &= x^2 f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 f(x) \cdot 2x dx \\ &= f(1) - 2 \int_0^1 x f(x) dx \\ &= 0 - 2 \times 4 \\ &= -8. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 28. \text{解: } \frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{1}{x^2}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{y^2}, \text{ 故} \\ x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{1}{x^2} \cdot x^2 + y^2 \cdot \frac{1}{y^2} \\ &= -1 + 1 = 0. \end{aligned}$$