数字电子技术

类目：电子信息类
书名：数字电子技术
主编：宋永献 郝传永 刘莹莹
出版社：电子科技大学出版社
开本：大 16 开
书号：978-7-5770-1343-5
使用层次：通用
出版时间：2024 年 12 月
定价：49.80 元
印刷方式：双色
是否有资源：是

电子信息类创新教材
教育改革新理念教材

数字电子技术

主 编 ◎ 宋永献 郝传永 刘瑩瑩

策划编辑：吴艳玲 万晓桐
责任编辑：魏 彬
封面设计：旗语书装

定价：49.80元

电子科技大学出版社
University of Electronic Science and Technology of China Press

电子信息类创新教材
教育改革新理念教材
数字电子技术
主 编 ◎ 宋永献 郝传永 刘瑩瑩
电子科技大学出版社

电子信息类创新教材
教育改革新理念教材

数字电子技术

主　审◎赵　英

主　编◎宋永献　郝传永　刘莹莹

副主编◎田　军　袁得春　张红月

李锦花　成　兰　徐　萌

陈远海

电子科技大学出版社
University of Electronic Science and Technology of China Press
·成都·

图书在版编目(CIP)数据

数字电子技术 / 宋永献，郝传永，刘瑩瑩主编.
成都 ：成都电子科大出版社，2024. 12. -- ISBN 978-7-5770-1343-5

Ⅰ. TN79

中国国家版本馆 CIP 数据核字第 2025UD5579 号

数字电子技术

SHUZI DIANZI JISHU

宋永献　郝传永　刘瑩瑩　主编

策划编辑　吴艳玲　万晓桐
责任编辑　魏　彬
责任校对　万晓桐
责任印制　梁　硕

出版发行　电子科技大学出版社
　　成都市一环路东一段 159 号电子信息产业大厦九楼　邮编　610051
主　　页　www. uestcp. com. cn
服务电话　028—83203399
邮购电话　028—83201495

印　　刷　涿州汇美亿浓印刷有限公司
成品尺寸　210 mm×285 mm
印　　张　14.5
字　　数　374 千字
版　　次　2024 年 12 月第 1 版
印　　次　2024 年 12 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5770-1343-5
定　　价　49.80 元

前言 Preface

随着控制、通信、人机交互和网络互联等新兴电子信息技术的不断发展，传统工业设备融合了大量最新的电子信息技术，它们一起构成了庞大而复杂的系统，派生出大量新兴的电子信息技术应用需求。这些“系统级”的应用需求，迫切要求具有系统级设计能力的电子信息技术人才。

电子信息系统设备的功能越来越复杂，系统的集成度越来越高，因此要求未来的设计者应该具备更扎实的理论基础知识和更宽广的专业视野。未来电子信息系统的设计越来越注重软件和硬件的协同规划、协同设计和协同调试。

“数字电子技术”是一门重要的专业基础课。本课程涉及的内容对学生后续课程的学习，以及从事相关专业工作，都是不可或缺的。

从内容上看，数字电子技术作为电子技术的重要组成部分，主要讨论的对象是数字逻辑电路与脉冲电路，采用的主要分析设计工具是逻辑代数。从思维过程来看，数字电子技术主要介绍电路中逻辑层面的思维。

本着“理论够用为度，培养技能，重在应用”的原则，本书在讲清基本概念和基本原理的基础上，注重集成电路以及新器件的介绍和应用，强调了理论联系实际。本书的特点有以下几个方面：

（1）数字电子技术基础是一门专业基础性质的课程，本书在基本原理、基本概念的讲述中概念清晰、准确，以“必须”和“够用”为原则。对于电子器件只简单介绍其工作原理，着重介绍其外特性，重点放在使用方法。

（2）为配合基础理论的学习、扩大知识面，各章节均选用了部分典型应用电路作为应用实例，使学生能将所学的理论知识与实际应用挂钩，培养学生理论联系实际的能力。

（3）各章均附有习题，习题类型丰富。

由于编者水平所限，不足与疏漏之处在所难免，恳请广大读者提出宝贵意见。

目　录 Contents

绪　　论

0.1 数字电路的特点

电子电路所处理的电信号可以分为两大类：一类是在时间和数值上都是连续变化的信号，称为模拟信号(analog signal)，例如模拟语言的音频信号(可以通过话筒把声音信号转换成相应的电信号)，模拟温度变化的(如从热电偶上得到的)电压信号等都属于模拟信号；另一类信号则是在时间和数值上都是离散的信号，也就是说它们的变化在时间和数值上是不连续的，多以脉冲信号的形式出现，这一类信号称为数字信号(digital signal)。

按照电子电路中工作信号的不同，通常把电路分为模拟电路(analog circuit)和数字电路(digital circuit)。我们把处理模拟信号的电子电路称为模拟电路，如各类放大器、稳压电路以及某些振荡电路等都属于模拟电路。我们把处理数字信号的电子电路称为数字电路，例如各类门电路(gate)、触发器(flip-flop)、寄存器(register)和译码器(decoder)等都属于数字电路。

数字电路有许多区别于模拟电路的特点，现分述如下。

(1)数字电路在作为数值计数和运算电路时采用二进制数，每一位只有 0 和 1 两种可能。电子元件通常工作在开关状态，电路结构简单，容易制造，便于集成及系列化生产，成本较低，使用方便。

(2)数字电路是利用信号(脉冲)的有无来代表和传输 0 和 1 这样的数字信息的，幅度较小的干扰不能改变信号的有无，因此，其抗干扰能力强。

(3)由数字电路组成的数字系统，只要增加数字的位数，就可以提高其精度。

(4)数字电路不仅能完成数值运算，而且能进行逻辑判断和逻辑运算，这在控制系统中是不可缺少的，因此也把它称为“逻辑电路(logic circuit)”。

(5)数字电路的分析方法不同于模拟电路，其重点在于研究各种数字电路输出与输入之间的相互关系，即逻辑关系，因此分析数字电路的数学工具是逻辑代数，表达数字电路逻辑功能的方式主要是真值表、逻辑表达式、卡诺图和波形图等。

事物总是一分为二的，数字电路也有一定的局限性，因此，实际电子系统往往把数字电路和模拟电路结合起来，组成一个完整的系统。

0.2 脉冲信号和数字信号

数字电路所处理的各种信号的工作波形是脉冲波，也称“脉冲信号(pulse signal)”。“脉冲”这个词包含着脉动和短促的意思。电脉冲是指在短促的时间内，出现的突然变化的电压或电流。例如发报机每按一次电键所产生的信号就属于这种信号。常见的脉冲信号如图 0-1 所示。

随着电子技术的发展，还出现了大量非正弦的新波形。从广义上讲，一切非正弦的、带有突变特点的波形，统称为脉冲。数字电路处理的信号多是矩形脉冲，这种信号常用二值量信息表示，即用逻辑信号 0 和 1 来表示信号的状态(高电平或低电平)，我们以后所讲的数字信号，通常都指这一类信号。

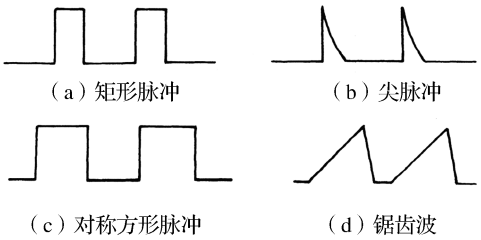


图 0-1　几种常见的脉冲波形

不同的脉冲信号，表示其特征的参数也不同。矩形脉冲(矩形波)是应用得最广泛的脉冲信号，其主要参数如图 0-2 所示。

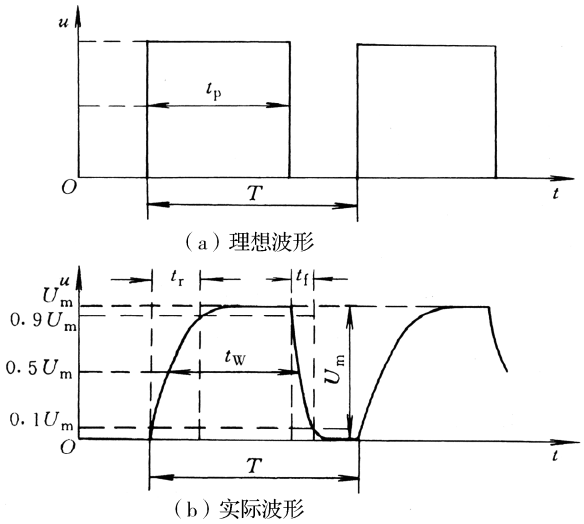


图 0-2　矩形电压的参数

(1)脉冲幅度 U_m：脉冲波底到波顶之间的电压。

(2)脉冲上升时间(脉冲前沿)t_r：波形从 $0.1\,U_m$ 上升到 $0.9\,U_m$ 所需的时间。

(3)脉冲下降时间(脉冲后沿)t_f：波形从 $0.9\,U_m$ 下降到 $0.1\,U_m$ 所需的时间。

(4)脉冲宽度 t_W：从波形上升沿的 $0.5\,U_m$ 到下降沿的 $0.5\,U_m$ 所需要的时间，又称“脉冲持续时间”。

(5)脉冲周期 T：在周期性的脉冲信号中，任意两个相邻脉冲的上升沿(或下降沿)之间的时间间隔。

(6)重复频率 f：在周期性脉冲信号中，每秒出现脉冲波形的次数，$f=1/T$。

0.3 数字电路的应用

数字电路的应用十分广泛，它广泛应用于数字通信、自动控制、数字测量仪表以及家用电器(如 DVD、电视机)等各个技术领域。特别是在数字电路基础上发展起来的各种电子计算机，已进入现代社会的各个领域，不仅在高科技研究领域，而且在生产、管理、教育、服务行业和家庭中都得到了广泛应用，它标志着电子技术的发展进入了一个新的阶段。另外，数字式移动电话(手机)、数字式高清晰度电视以及数码照相机等也是数字电路发展的产物。

0.4 数字电路的分类

(1)按电路组成结构可分为分立电路(discrete circuit,)和集成电路(integrated circuit)两类。其中，集成电路按集成度(一块硅片上包含的元件数量)可分为小规模(small scde integration，SSI)、中规模(medium scale integr-ation，MSI)、大规模(large scale integration，LSD)、超大规模集成电路(very large scale integration VLSI)，其划分标准和模拟集成电路的划分标准相同。

(2)按电路所使用的器件可分为双极型(如 TTL、ECL、I^2L、HTL)和单极型(如 NMOS、CMOS、HCMOS)电路。

(3)按电路的逻辑功能可分为组合逻辑电路和时序逻辑电路，另外脉冲波形的产生与变换电路也属于数字电路的一部分。数-模转换电路和模-数转换电路则是由模拟电路和数字电路结合而成的。

0.5 数字电路的学习方法

根据数字电路的特点，在学习中应注意以下几点。

(1)逻辑代数是分析数字电路重要的数学工具，数字电路的功能是用逻辑代数的方法来表示的，为了分析和研究数字电路，必须熟练掌握逻辑代数的基本内容和分析方法。

(2)重点掌握数字电路中的一些典型逻辑单元的外部逻辑功能、使用方法以及功能的扩展，对内部电路的了解只是为了加深对外部功能的理解，要抓住重点。

(3)数字电路的种类繁多，要掌握数字电路的基本分析方法和设计方法，其他电路可以在此基础上分析和设计。

(4)数字电子技术是一门实践性很强的技术基础课，因此，在学习中应理论联系实际。在学习本书时应以所介绍的理论知识、基本电路和基本分析方法为先导，分析所介绍的各种应用电路，体会其设计思路，同时，必须重视实验和课程设计，这样才能取得较好的学习效果。

第 1 章
数字逻辑基础

本章在介绍数字逻辑的基本概念、常用公式和定理等知识的基础上，重点讲解逻辑函数的化简问题，包括公式化简法、卡诺图化简法等常用化简方法，并介绍了逻辑函数的几种常用表示方法。

1.1　基本逻辑关系与逻辑运算

逻辑代数是 19 世纪中叶英国数学家乔治·布尔(George Boole)创立的一门研究客观事物逻辑关系的代数学，所以也常称逻辑代数为“布尔代数”。随着数字技术的不断发展，逻辑代数已成为研究数字逻辑电路与系统必不可少的数学工具。本节讨论逻辑变量和三种基本逻辑运算。

1.1.1　逻辑变量与逻辑函数

1. 逻辑变量

逻辑是指事物之间所遵循的因果规律，逻辑关系就是事物之间的因果关系。逻辑电路指电路的输入量与输出量之间具有因果关系的电路。逻辑代数是研究事物之间因果关系的数学工具，在逻辑电路研究中必不可少，它为分析和设计逻辑电路提供了理论基础。

如同普通代数中有变量一样，在逻辑代数中也有变量，称为逻辑变量。逻辑变量一般用大写的英文字母 A，B，C……表示。

普通代数中变量的取值有一定的范围，同样，逻辑变量的取值也有限制。逻辑变量的取值很简单，只有两种取值：真与假(或对与错、开与关、导通与截止等)，常用 0 和 1 来表示。这里 0 和 1 并不表示数量的大小，只代表两种对立的逻辑状态。

2. 逻辑函数

与普通变量一样，逻辑变量也包括逻辑自变量和逻辑函数。可以自由取值的逻辑变量称为逻辑自变量，也简称为“逻辑变量”；不能自由取值的逻辑变量称为逻辑因变量，也简称为“逻辑函数”。

逻辑函数与普通代数中的函数相似，它是随自变量的变化而变化的因变量。因此，如果用自变量和因变量来分别表示一个事件发生的条件和结果，那么，该事件的因果关系就可以用逻辑函数来描述。

逻辑代数就是研究逻辑变量关系与运算规律的科学。

数字电路是一种开关电路，开关的状态有两种，即“开通”和“断开”。这与电子器件的“导通”和“截止”相对应。数字电路的输入量、输出量一般用高、低电平表示。高、低电平也可以用 1 和 0 表示。数字电路的输出量与输入量之间的关系是一种因果关系，它可以用逻辑函数描述。因此，数字电路又称为“逻辑电路”。对于任何一个逻辑电路，其输入逻辑变量 A、B、C……的取值确定后，则其输出逻辑变量 Y 的值也就被确定下来。因此，逻辑变量 Y 是逻辑

变量 A、B、C 的逻辑函数，记为

$$Y=F(A,\ B,\ C) \tag{1-1}$$

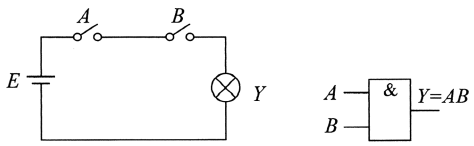
由此可见，逻辑函数是逻辑电路关系的数学表达，研究逻辑电路问题可以转化为研究逻辑函数问题。

1.1.2 基本逻辑运算

事物或对象本身具有的逻辑关系可能非常复杂，因而描述对象的逻辑关系也很复杂。但是，这些复杂的逻辑关系可以看作由三种基本逻辑关系复合而成。因此，要研究逻辑关系，首先应该清楚最基本的三种逻辑关系，这就是“与逻辑”“或逻辑”“非逻辑”，也称为“逻辑乘”“逻辑加”“逻辑反”。人们也常把三种基本的逻辑关系称为三种基本逻辑运算。

1. 与逻辑

与逻辑(逻辑乘)关系可以通过如图 1-1(a)所示的开关电路来说明。



(a) 与逻辑示意图　　(b) 与逻辑符号

图 1-1　与逻辑关系说明

在图 1-1(a)中，只有当开关 A 和 B 同时闭合时，电源 E 才会向电灯 Y 提供电流，电灯 Y 才会亮。当开关 A 或 B 中有一个断开，或开关 A 和 B 都断开时，电灯 Y 都不亮。把以上分析列在一张表中，得到表 1-1。这种表示逻辑关系的表称为功能表。

如果把开关断开用逻辑常量 0 表示，开关闭合用 1 表示；灯不亮用 0 表示，灯亮用 1 表示，则表 1-1 又可以写成表 1-2 的形式。表 1-2 是用逻辑常量 0、1 表示的真值表。常用的真值表见表 1-2 所列的形式。

表 1-1　与逻辑功能表

A	B	Y
断开	断开	灯不亮
断开	闭合	灯不亮
闭合	断开	灯不亮
闭合	闭合	灯亮

表 1-2　与逻辑真值表

A	B	Y
0	0	0
0	1	0

续表

A	B	Y
1	0	0
1	1	1

由以上分析可以得到这样的结论：只有当一件事的所有条件(开关 A、B 的闭合)都同时具备时，结果(电灯 Y 亮)才能发生。这种条件与结果的关系称为与逻辑关系。

与逻辑的逻辑表达式可以写为

$$Y=A\cdot B \tag{1-2}$$

两个变量的与运算规则为

$$\begin{cases}0\cdot 0=0, & 0\cdot 1=0\\ 1\cdot 0=0, & 1\cdot 1=1\end{cases} \tag{1-3}$$

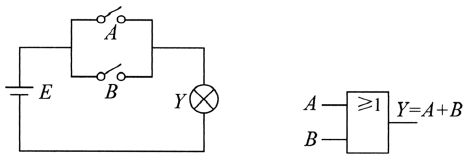
与逻辑也可以用所谓的逻辑符号表示，对于上面讨论的逻辑变量 A、B 与逻辑函数 Y 的关系，如图 1-1(b)表示。

与逻辑的关系可以推广到有多个逻辑变量的情况，因此有

$$Y=A\cdot B\cdot C\cdot D\cdot\cdots \tag{1-4}$$

2. 或逻辑

同样，或逻辑(逻辑加)可以通过如图 1-2(a)所示的开关电路来说明。



(a) 或逻辑示意图　　(b) 或逻辑符号

图 1-2　或逻辑关系说明

开关 A 和 B 中有一个闭合，或者 A、B 同时闭合，都会为电灯 Y 提供电流，电灯 Y 都会亮。而当开关 A 和 B 同时断开时，电灯 Y 不亮。

如果依然把开关断开用 0 表示，开关闭合用 1 表示；灯不亮用 0 表示，灯亮用 1 表示，则从以上分析结果可以得见表 1-3 所列的真值表。

表 1-3　或逻辑真值表

A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

由以上分析可以得到这样的结论：在决定一件事的条件(开关闭合)中，只要有一个条件具备，结果(电灯 Y 亮)就能发生。这种条件与结果的关系称为或逻辑关系。

或逻辑的逻辑表达式可以写为

$$Y=A+B \tag{1-5}$$

两个变量的或运算规则为

$$\begin{cases}0+0=0, & 0+1=1\\ 1+0=1, & 1+1=1\end{cases} \tag{1-6}$$

或逻辑的逻辑符号如图 1-2(b)所示。

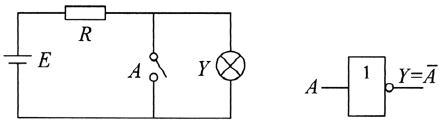
同样，或逻辑的关系也可以推广到多个逻辑变量，因此有

$$Y=A+B+C+D+\cdots \tag{1-7}$$

3. 非逻辑

非逻辑(逻辑反)关系是逻辑的否定：当条件满足时，结果不会发生；而条件不满足时，结果一定会发生。

如图 1-3(a)所示的电路说明了非逻辑关系的概念。当开关 A 断开时，电灯 Y 才会亮；当开关 A 闭合时，电灯 Y 反而不亮，即电灯 Y 的状态总是与开关 A 的状态相反。这种结果总是与条件相反的逻辑关系就称为非逻辑。



(a) 非逻辑示意图　　(b) 非逻辑符号

图 1-3　非逻辑关系说明

如果条件满足用 1 表示，条件不满足用 0 表示，结果发生用 1 表示，结果不发生用 0 表示，则可得到见表 1-4 所列的非逻辑真值表。

表 1-4　非逻辑真值表

A	Y
0	1
1	0

若用逻辑表达式来描述，则可写成

$$Y=\overline{A} \tag{1-8}$$

非逻辑的运算规则为

$$\begin{cases}\overline{0}=1\\ \overline{1}=0\end{cases} \tag{1-9}$$

非逻辑的逻辑符号如图 1-3(b)所示。

至此讨论了与、或、非三种基本逻辑关系及其运算规则。在数字电路中，所有逻辑函数

的逻辑关系均由这三种基本逻辑运算组合而成。因此，三种基本逻辑关系是建立其他复杂逻辑关系的基础。

4. 其他几种逻辑关系

人们在研究实际问题时发现，事物之间的逻辑关系往往比单一的与、或、非逻辑关系复杂得多。不过它们都可以用与、或、非逻辑关系的组合来实现。含有两种或两种以上逻辑运算的逻辑函数称为复合逻辑函数。采用三种基本逻辑关系进行组合，可以得到其他一些逻辑关系。如与逻辑和非逻辑结合可以得到与-非逻辑 $Y=\overline{AB}$，或逻辑和非逻辑结合可以得到或-非逻辑 $Y=\overline{A+B}$，由与逻辑、或逻辑组合在一起可以得到与-或逻辑 $Y=AB+BC$，由与逻辑、或逻辑和非逻辑组合在一起可以得到与-或-非逻辑 $Y=\overline{AB+BC}$。图 1-4～图 1-7 分别给出了与-非、或-非、与-或和与-或-非逻辑的逻辑符号。

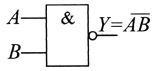


图 1-4　与非逻辑符号

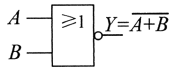


图 1-5　或-非逻辑符号

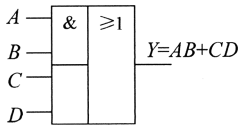


图 1-6　与-或逻辑符号

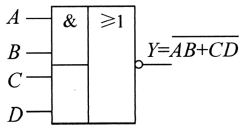


图 1-7　与-或-非逻辑符号

1.2　逻辑代数的公式和规则

逻辑代数就是布尔代数，其基本思想是英国数学家布尔于 1854 年提出的。1938 年，美国数学工程师香农在其早年的硕士论文《继电器与开关电路的符号分析》中，首先把布尔代数的“真”与“假”和电路系统的“开”与“关”对应起来，并用 1 和 0 表示，用布尔代数分析并优化开关电路，为采用布尔代数分析、设计、优化开关电路奠定了基础，也确立了数字电路的理论基础。现在，逻辑代数已经成为数字电路分析、设计的必要工具。

在三种基本逻辑运算基础上，本章讨论一些基本逻辑公式和定律，形成了一些运算规则，熟悉、掌握并且会运用这些公式、定律和规则，对于掌握数字电子技术十分重要。

1.2.1 基本公式

基本逻辑公式可以分为三组，每组公式有相近的特性，使学习时便于记忆。

1. 常量和变量的关系

(1)自等律

$$A \cdot 1 = A \tag{1-10}$$

$$A + 0 = A \tag{1-11}$$

(2)0-1 律

$$A \cdot 0 = 0 \tag{1-12}$$

$$A + 1 = 1 \tag{1-13}$$

(3)互补律

$$A \cdot \overline{A} = 0 \tag{1-14}$$

$$A + \overline{A} = 1 \tag{1-15}$$

2. 与普通代数相似的公式

(1)交换律

$$A \cdot B = B \cdot A \tag{1-16}$$

$$A + B = B + A \tag{1-17}$$

(2)结合律

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) \tag{1-18}$$

$$(A + B) + C = A + (B + C) \tag{1-19}$$

(3)分配律

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C \tag{1-20}$$

$$A + B \cdot C = (A + B) \cdot (A + C) \tag{1-21}$$

3. 逻辑代数特有的公式

(1)重叠律

$$A \cdot A = A \tag{1-22}$$

$$A + A = A \tag{1-23}$$

(2)反演律(德·摩根定理)

$$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B} \tag{1-24}$$

$$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B} \tag{1-25}$$

(3)还原律

$$\overline{\overline{A}} = A \tag{1-26}$$

需要说明的是，对于式(1-10)～式(1-15)，可以将变量分别取 1 或 0，并分别代入有关公式即可证明等式成立。

例如，对于式(1-15)，当 $A=1$ 时，代入公式得

$$1+\overline{1}=1+0=1$$

当 $A=0$ 时，有

$0+\overline{0}=0+1=1$ 可见，无论 A 取 0 或 1，等式都成立，所以式(1-15)成立。

对于式(1-16)～式(1-25)可以采用真值表证明。分别列出等式两边的真值表，如果等式两边真值表完全相同，则等式成立。例如，可列出式(1-24)的真值表，见表 1-5 所列。

表 1-5　证明两变量德・摩根定理的真值表

A	B	$\overline{A+B}$	$\overline{A}\cdot\overline{B}$	$\overline{A\cdot B}$	$\overline{A}+\overline{B}$
0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1
1	0	0	0	1	1
1	1	0	0	0	0

1.2.2　常用公式

利用逻辑代数的基本公式可以导出一些常用公式，在化简逻辑函数时直接应用这些公式，会给化简工作带来很多方便。

1. 常用公式

常用公式如下：

$$A+A\cdot B=A \tag{1-27}$$

$$A+\overline{A}\cdot B=A+B \tag{1-28}$$

$$A\cdot B+A\cdot\overline{B}=A \tag{1-29}$$

$$A\cdot B+\overline{A}\cdot C+B\cdot C=A\cdot B+\overline{A}\cdot C \tag{1-30}$$

$$\overline{A\cdot\overline{B}+\overline{A}\cdot B}=A\cdot B+\overline{A}\cdot\overline{B} \tag{1-31}$$

2. 公式证明

(1)证明式(1-27)　　$A+A\cdot B=A$

证　先应用分配律式(1-20)，然后应用自等律式(1-10)，有

$$A+A\cdot B=A(1+B)=A\cdot l=A$$

这一结果表明：两个逻辑与项相或时，如果其中一项为另一项的因子，则该项可以去掉。

(2)证明式(1-28)

$$A+\overline{A}\cdot B=A+B$$

证　先应用分配律式(1-21)，然后应用互补律式(1-15)，有

$$A+\overline{A}\cdot B=(A+\overline{A})(A+B)=1\cdot(A+B)=A+B$$

这一结果表明：两个逻辑与项相或时，如果其中一项的反是另一项的因子，则该因子可以去掉。

(3)证明式(1-29)　　$A \cdot B + A \cdot \overline{B} = A$

证　先应用分配律式(1-20)，再用互补律式(1-15)，然后应用自等律式(1-10)，有

$$A \cdot B + A \cdot \overline{B} = A(B + \overline{B}) = A \cdot 1 = A$$

这个公式表明：当两个相与项再做或运算时，两项只有一个因子不同，而不同的因子又互为反变量，那么两项可以合并，消去不同的因子，保留相同的因子。原式中的两个相与项称为逻辑相邻项。这个公式是逻辑函数卡诺图化简方法的基础。

(4)证明式(1-30)　　$A \cdot B + \overline{A} \cdot C + B \cdot C = A \cdot B + \overline{A} \cdot C$

证

$$\begin{aligned} A \cdot B + \overline{A} + C + B \cdot C &= A \cdot B + \overline{A} \cdot C + B \cdot C(A + \overline{A}) \\ &= AB + \overline{A}C + (AB)C + (\overline{A}C)B \\ &= AB(1 + C) + \overline{A}C(1 + B) \\ &= AB + \overline{A}C \end{aligned}$$

该式说明：若两个与运算项中分别包含了某一变量的原变量(如 A)和反变量(如 A)作因子时，而这两项的其余因子(B 和 C)组成的第三个相与项(BC)可以消去。

(5)证明式(1-30)　$\overline{A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B} = A \cdot B + \overline{A} \cdot \overline{B}$

证　根据德·摩根定理，有

$$\begin{aligned} \overline{A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B} &= \overline{A \cdot \overline{B}} \cdot \overline{\overline{A} \cdot B} \\ &= (\overline{A} + \overline{\overline{B}})(\overline{\overline{A}} + \overline{B}) = (\overline{A} + B)(A + \overline{B}) \\ &= A\overline{A} + AB + \overline{A}\,\overline{B} + B\overline{B} = AB + \overline{A}\,\overline{B} \end{aligned}$$

这就证明了式(1-30)。

研究逻辑函数式

$$Y = \overline{A}B + \overline{A}B$$

其真值表，见表 1-6 所列。

表 1-6　异或逻辑真值表

A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

从表 1-6 中可以看到，当逻辑变量 A 等于 B 时，函数 $Y=0$；当逻辑变量 A 不等于 B 时，函数 $Y=1$。因此，这一逻辑关系称为异或逻辑。

异或逻辑也可以写成

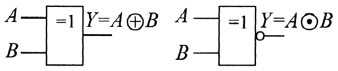
$$Y = A\overline{B} + \overline{A}B = A \oplus B$$

而异或逻辑的反，即$\overline{A\overline{B} + \overline{A}B} = \overline{A \oplus B}$也称为“同或逻辑”。显然，式(1-31)就是同或逻辑。同

或逻辑也可写成

$$\overline{A\overline{B}+\overline{A}B}=\overline{A\oplus B}=AB+\overline{A}\,\overline{B}=A\odot B \tag{1-32}$$

异或逻辑和同或逻辑的逻辑符号分别如图 1-8(a)、图 1-8(b)所示。



(a)异或逻辑　　(b)同或逻辑

图 1-8　异或逻辑和同或逻辑的逻辑符号

1.2.3　逻辑代数的三个规则

1. 代入规则

对于一个逻辑等式，将等式两边出现的同一变量用一个相同的逻辑式代替后，等式仍然成立，这个规则称为代入规则。

利用代入规则可以扩大等式的应用范围，很多基本公式都可以由两变量或三变量推广为多变量的形式。

例 1　利用代入规则，由两变量的德·摩根定理推导出三变量的德·摩根定理表达式。

解　两变量德·摩根定理的形式分别为式(1-24)$\overline{A\cdot B}=\overline{A}+\overline{B}$ 和式(1-25)$\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$。

利用代入规则，将式(1-24)中两边 B 的位置以式(BC)代入，可得

$$\text{左边}=\overline{A(BC)}=\overline{ABC}$$

$$\text{右边}=\overline{A}+\overline{(BC)}=\overline{A}+(\overline{B}+\overline{C})=\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$$

所以有

$$\overline{ABC}=\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$$

同理，将式(1-25)中两边 B 的位置以式$(B+C)$代入，可得

$$\text{左边}=\overline{A+(B+C)}=\overline{A+B+C}$$

$$\text{右边}=\overline{A}\cdot\overline{(B+C)}=\overline{A}\cdot(\overline{B}\cdot\overline{C})=\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}$$

所以有

$$\overline{A+B+C}=\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}$$

这样，德·摩根定理就扩展为三变量形式了。采用同样的方法，可以将定理扩展为有限个变量的形式。

2. 反演规则

对于任意一个逻辑函数式 Y，如果对式中做如下替换：

(1)所有的·换成+，所有的+换成·；

(2)所有的 0 换成 1，所有的 1 换成 0；

(3)所有的原变量换成反变量，所有的反变量换成原变量。

则，函数式就是原函数 Y 的反函数 $\overline{Y}$，这个规则称作反演规则。

在使用反演规则时需要注意两点：一是必须保持原式的运算顺序，二是不属于单个变量上的反号应保留不变。

例 2 求逻辑函数 Y_1 和 Y_2 的反函数。

(1)$Y_1=\overline{A}B+A\overline{B}C+CD$。

(2)$Y_2=A\cdot\overline{BC\overline{DE}}$。

解 利用反演规则对式 Y_1 反演，有

$$\begin{array}{l} Y_1Y_1=\overline{A}\ \cdot B+A\ \cdot\overline{B}\cdot C+C\ \cdot D \\ \qquad\quad\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow \\ \qquad\quad(A+\overline{B})\cdot(\overline{A}+B+\overline{C})\cdot(\overline{C}+\overline{D}) \end{array}$$

所以得

$$\overline{Y}_1=(A+\overline{B})\cdot(\overline{A}+B+\overline{C})\cdot(\overline{C}+\overline{D})$$

如果采用德·摩根定理计算，有

$$\begin{aligned}\overline{Y}_1&=\overline{\overline{A}B+A\overline{B}C+CD}=\overline{\overline{A}B}\cdot\overline{A\overline{B}C}\cdot\overline{CD}\\&=(\overline{\overline{A}}+\overline{B})\cdot(\overline{A}+\overline{\overline{B}}+\overline{C})\cdot(\overline{C}+\overline{D})\\&=(A+\overline{B})\cdot(\overline{A}+B+\overline{C})\cdot(\overline{C}+\overline{D})\end{aligned}$$

显然，采用德·摩根定理得到的结果与采用反演规则得到的结果完全相同。同理得

$$\overline{Y}_2=A+\overline{\overline{B}+\overline{C}+\overline{\overline{D}+\overline{E}}}$$

注意，不属于单个变量上的反号应保留不变。

3. 对偶规则

对于任何一个逻辑式等式，如果将其等式两边做如下替换：

(1)所有的·换成+，所有的+换成·；

(2)所有的 1 换成 0，所有的 0 换成 1。

则得到一个新的逻辑等式，新得到的逻辑等式是原来逻辑等式的对偶式，原等式也是新得到的逻辑等式的对偶式，即两个等式互为对偶式。对偶规则还表明，如果两个对偶式中有一个成立，则另一个也一定成立。

运用对偶规则可以使要证明的公式大大减少。假如要求证明逻辑式 Y_1 和 Y_2 是否相等，则可以证明其对偶式 Y'_1 和 Y'_2 是否相等。如已知式 Y'_1 和 Y'_2 相等，那么式 Y_1 和 Y_2 必然相等，无须证明。

例如，如果已经确认分配律 $A(B+C)=AB+AC$ 成立，分配律另一形式 $A+BC=(A+B)(A+C)$ 也成立。

由对偶规则的替换方法可知，分配律的两个式子互为对偶式。因此，只要其中一个被证明成立，则另一个对偶式也一定成立。

例 3 求下列逻辑式的对偶形式。

(1)$Y_1=\overline{A}B+A\overline{B}C+CD$

(2)$Y_2=A\cdot B+\overline{A}\cdot C+B\cdot C=A\cdot B+\overline{A}C$

解　根据对偶式替换规则，有

(1)　$$Y'_1=(\overline{A}+B)(A+\overline{B}+C)(C+D)$$

(2)　$$Y'_2=(A+B)(\overline{A}+C)(B+C)=(A+B)(\overline{A}+C)$$

1.3　逻辑函数的化简方法

逻辑函数与逻辑电路有着高度的对应关系。因此，简洁的逻辑关系对应简洁的逻辑电路，复杂的逻辑关系对应复杂的逻辑电路。也就是说，逻辑函数简单意味着可以用较少的逻辑元件及较少的输入端完成逻辑功能。这对于提高电路可靠性和降低成本都是有利的。

然而，一个逻辑函数可以有多种不同的逻辑表达式，它们在繁简程度上也有所差异。但是，它们所表示的逻辑关系与所体现的逻辑功能完全相同。将比较繁杂的逻辑表达式变换成与之等效的最简逻辑表达式的过程称为逻辑函数的化简。

逻辑函数化简的方法较多，本节主要介绍采用代数化简方法和卡诺图化简方法化简逻辑函数问题。

1.3.1　逻辑表达式的类型及最简与或表达式

逻辑表达式与逻辑电路有直接关系。而直接根据实际问题得到的逻辑表达式往往并不是最简形式，这就需要对逻辑表达式进行化简。

一个逻辑函数可以有多种不同的逻辑表达式。每一种逻辑表达式对应着一种逻辑电路。如与-或表达式、或-与表达式、与非-与非表达式、或非-或非表达式以及与-或-非表达式等，一共可以有八种表达形式。如 $Y=AB+\overline{A}C$ 可以表示为以下八种表达式。

(1)与-或式：$Y=AB+\overline{A}C$。

(2)或-与式：$Y=(A+C)(\overline{A}+B)$。

(3)与非-与非式：$Y=\overline{\overline{AB}\cdot\overline{\overline{A}C}}$。

(4)或非-或非式：$Y=\overline{\overline{A+C}+\overline{\overline{A}+B}}$。

(5)与-或-非式：$Y=\overline{\overline{A}\cdot\overline{C}+A\cdot\overline{B}}$。

(6)与-非-与式：$Y=\overline{\overline{A}\cdot\overline{C}}\cdot\overline{A\cdot\overline{B}}$。

(7)或-非或式：$Y=\overline{\overline{A}+\overline{B}}+\overline{A+\overline{C}}$。

(8)或-与-非式：$Y=\overline{(\overline{A}+\overline{B})\cdot(A+\overline{C})}$。

以上八个逻辑式是同一个逻辑函数不同形式的最简表达式。在以上各表达式中，因为与-或表达式比较常见，同时，与-或表达式也可以比较容易同其他形式的表达式相互转换，所以在化简逻辑函数时，往往先把它化简成最简与-或表达式。因此，本节中的化简一般是要求化为最简的与-或表达式。如果在实际中需要其他形式的最简表达式，那么应用德·摩根定理可以方便地进行转换。例如实际中常用与-非逻辑实现各种电路，在最简与-或表达式基础上应用德·摩根定理可以方便地把与-或表达式变换成与非-与非表达式。

最简的与-或表达式应具备：

(1)乘积项(即相与项)的数目最少；

(2)在满足乘积项最少的条件下，要求每个乘积项中变量的个数也最少。

后面将看到，用化简后的表达式构成逻辑电路不仅可以节省器件，还可以降低成本，提高电路工作的可靠性。

逻辑函数有多种化简方法，在此重点介绍公式化简法和卡诺图化简法。

1.3.2 公式化简法

公式化简法也称为“代数法”，它是逻辑函数化简中常用的方法之一。公式化简法的实质就是反复运用逻辑代数的基本定律和恒等式消去多余的乘积项和每个乘积项中多余的因子，以求得逻辑函数的最简形式。公式化简法的特点是：没有固定的步骤，化简过程因化简者的熟练程度而不同。公式化简法中经常采用以下几种方法。

1. 并项法

并项法主要是运用公式 $AB+A\overline{B}=A$ 实现化简。该公式可以把两项合并为一项，并消去一个因子。

例 4 化简下列逻辑函数。

$$Y_1=\overline{C}\,\overline{D}+CD+\overline{C}D+C\overline{D}$$

$$Y_2=\overline{A}B\,\overline{C}+A\,\overline{C}+\overline{B}\,\overline{C}$$

解 利用并项公式可直接化简。

$$Y_1=\overline{C}(\overline{D}+D)+C(D+\overline{D})=\overline{C}+C=1$$

$$Y_2=\overline{A}B\,\overline{C}+(A+\overline{B})\overline{C}=\overline{A}B\,\overline{C}+\overline{\overline{A}B}\,\overline{C}$$

$$=(\overline{A}B+\overline{\overline{A}B})\overline{C}=\overline{C}$$

2. 吸收法

吸收法是利用公式 $+AB=A$ 将 AB 吸收掉，根据代入规则，式中的变量也可以是逻辑式。

例 5　试化简逻辑函数。

$$Y_1=AB+ABCD+ABCE$$

$$Y_2=A+\overline{\overline{B}+\overline{CD}}+\overline{\overline{AD}\,\overline{B}}$$

解　利用吸收法公式，可得

$$Y_1=AB+ABCD+ABCE=AB(1+CD+CE)=AB$$

$$Y_2=A+B\cdot CD+AD+B=A(1+D)+B(CD+1)=A+B$$

3. 消去法

消去法是根据公式 $A+\overline{A}B=A+B$，消去多余的因子。

例 6　化简下列逻辑函数。

$$Y_1=\overline{A}B+B\overline{C}+AC$$

$$Y_2=A\overline{B}+\overline{A}D+BD+CDE$$

解

$$Y_1=B(\overline{A}+\overline{C})+AC=B\overline{AC}+AC=B+AC$$

$$\begin{aligned}Y_2&=A\overline{B}+\overline{A}D+BD+CDE=A\overline{B}+(\overline{A}+B)D+CDE\\&=A\overline{B}+\overline{A\overline{B}}D+CDE=A\overline{B}+D+CDE=A\overline{B}+D\end{aligned}$$

4. 配项法

配项法是利用公式 $A+\overline{A}=1$ 先使逻辑函数增加必要的乘积项，或者利用公式 $A+A=A$，在函数中增加已有的项；然后用并项法、吸收法等化简逻辑函数的方法。

例 7　化简下列逻辑函数。

$$Y_1=AB+\overline{A}B+BC$$

$$Y_2=\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}BC+ABC$$

解

$$\begin{aligned}Y_1&=AB+\overline{A}B+BC(A+\overline{A})\\&=AB+\overline{A}B+ABC+\overline{A}BC\\&=AB(1+C)+\overline{A}B(1+C)\\&=AB+\overline{A}B\\Y_2&=\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}BC+ABC\\&=(\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}BC)+(\overline{A}BC+ABC)\\&=\overline{A}B(\overline{C}+C)+BC(\overline{A}+A)\\&=\overline{A}B+BC\end{aligned}$$

从上述例子可以看出：若函数式较复杂，用公式化简法一开始很难知道它的最简式，只有在化简过程中不断尝试才能逐渐清楚。

公式化简法的步骤可以归纳为：首先将表达式转换成与-或表达式；然后反复用并项法、

吸收法、消去法等化简函数式；最后考虑能否用配项法展开并简化。

1.3.3 卡诺图化简法

由于公式化简法没有统一规范的方法，而且将复杂的逻辑函数化简到最简形式也不太方便。化简过程往往依据个人的经验及对公式运用的灵活性不同而不同。所以，人们还寻找了其他化简方法。采用卡诺图化简逻辑函数是另一种常用方法，它可以帮助读者直观地写出最简逻辑表达式。下面讨论卡诺图化简法。

1. 逻辑函数的最小项

1)最小项定义

最小项的概念是采用卡诺图化简逻辑函数的基础，在讨论卡诺图化简法之前，先介绍逻辑函数中的最小项。

在 n 个变量的逻辑函数中，若 m 为包含 n 个因子的乘积项，而且这 n 个因子均以原变量或反变量的形式在 m 中出现一次，则称 m 为该组变量的一个最小项。n 个变量共有 2^n 个不同的组合值，所以 n 个变量的逻辑函数共有 2^n 个最小项。

例如，A、B、C 三个变量的最小项有 $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$、$\overline{A}\,\overline{B}C$、$\overline{A}B\,\overline{C}$、$\overline{A}BC$、$A\,\overline{B}\,\overline{C}$、$A\,\overline{B}C$、$AB\,\overline{C}$、$ABC$ 共 8 个(即 2^3 个)最小项。

根据最小项的定义可以知道：输入变量的每一组取值都使唯一对应的最小项的值等于 1，其余最小项的值等于 0。例如，在 3 个变量 A、B、C 的最小项中，当 $A=1$、$B=0$、$C=1$时，$A\,\overline{B}C=1$。如果把 $A\,\overline{B}C$ 的取值看作一个二进制数，那么所表示的十进制数就是 5，为了今后使用方便，将 $A\,\overline{B}C$ 这个最小项记作 m_5。按照这个约定，就得到了 3 个变量的最小项的编号表，见表 1-7 所列。

表 1-7　3 个变量最小项的编号表

最小项	使最小项为 1 的变量取值			对应的十进制数	最小项编号
	A	B	C		
$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$	0	0	0	0	m_0
$\overline{A}\,\overline{B}C$	0	0	1	1	m_1
$\overline{A}B\,\overline{C}$	0	1	0	2	m_2
$\overline{A}BC$	0	1	1	3	m_3
$A\,\overline{B}\,\overline{C}$	1	0	0	4	m_4
$A\,\overline{B}C$	1	0	1	5	m_5
$AB\,\overline{C}$	1	1	0	6	m_6
ABC	1	1	1	7	m_7

根据同样的道理，可以把 A、B、C、D 这 4 个变量的 16 个最小项记作 $m_0 \sim m_{15}$。

从最小项的定义出发，可以证明它具有以下重要性质。

(1)在逻辑函数输入变量任何取值下必有一个最小项，且仅有一个最小项的值为 1。

(2)全体最小项的和为 1。

(3)任意两个最小项的乘积为 0。

(4)具有相邻性的两个最小项之和可以合并成一项，并可消去一对因子。最小项的相邻性是指，若两个最小项只有一个因子不同，则称这两个最小项具有相邻性。例如，$\overline{A}B\overline{C}$和 $AB\overline{C}$ 两个最小项仅第一个因子不同，所以它们具有相邻性。这两个最小项相加时，一定能合并成一项并将一对不同的因子消去，即

$$\overline{A}B\overline{C}+AB\overline{C}=(A+\overline{A})B\overline{C}=B\overline{C}$$

2)最小项表达式

设 Y 是 n 个变量组成的“与-或”逻辑式，若式中每一个“与”项都是这 n 个变量的一个最小项，则称 Y 为最小项表达式。

例如，$Y(A,B,C)=A\overline{B}C+AB\overline{C}+ABC$ 就是一个最小项表达式。而由于 $A\overline{B}C$、$AB\overline{C}$、ABC 三个最小项的编号分别为 m_5、m_6、m_7，所以也常将逻辑式写为

$$Y(A,B,C)=A\overline{B}C+AB\overline{C}+ABC=\sum(m_5,m_6,m_7)=\sum m(5,6,7)$$

3)最小项表达式求法

下面介绍两种求最小项表达式的方法。

(1)配项法。

配项法是将与-或式中不是最小项的与项利用 $A+\overline{A}=1$ 进行配项，使之成为最小项。

例 8　求 $Y(A,B,C)=\overline{A\overline{B}}(A+C)$的最小项表达式。

解　先将 Y 变为与-或式

$$Y(A,B,C)=\overline{A\overline{B}}(A+C)=(\overline{A}+B)(A+C)=\overline{A}C+AB$$

再用$(B+\overline{B})$乘以 $\overline{A}C$，用$(C+\overline{C})$乘以 AB 即得最小项表达式

$$\begin{aligned}Y(A,B,C)&=\overline{A}C(B+\overline{B})+AB(C+\overline{C})\\&=\overline{A}BC+\overline{A}\overline{B}C+ABC+AB\overline{C}\\&=\sum m(1,3,6,7)\end{aligned}$$

(2)真值表法。

由最小项性质可知：在逻辑函数 Y 的真值表中，若有 K 组变量取值使 $Y=1$，则该函数 Y 就是由这 K 组变量组合值所对应的最小项之和。

例 9　逻辑函数 $Y(A,B,C)$的真值表见表 1-8 所列，试写出该函数的最小项表达式。

表 1-8　例 9 的真值表

A	B	C	Y
0	0	0	1

续表

A	B	C	Y
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

解

(1)找出 $Y=1$ 的变量取值组合：000、011、101、110、111。

(2)写出 $Y=1$ 各组合对应的最小项。把组合值中 1 写作原变量，0 写作反变量，即

$$\overline{A}\,\overline{BC}、\overline{A}BC、A\overline{B}C、AB\overline{C}、ABC$$

(3)将所得最小项求或运算，即得到最小项的表达式

$$Y(A，B，C)=\overline{A}\,\overline{BC}+\overline{A}BC+A\overline{B}C+AB\overline{C}+ABC=\sum m(0，3，5，6，7)$$

2. 卡诺图的画法

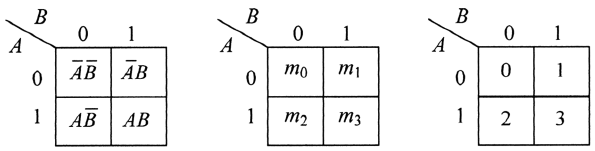
卡诺图的实质与真值表一样，是逻辑关系的图形表示。只是在画卡诺图时应遵循一定的规则。主要应遵循如下规则。

(1)卡诺图由画在平面上的一些方格组成。

(2)每个方格对应一个最小项，所以方格个数由逻辑变量数决定。

(3)逻辑相邻的最小项在卡诺图中也几何相邻。

如图 1-9 所示为二变量卡诺图。



(a) 最小项表示　(b) 最小项编号表示　(c) 最小项编号简化表示

图 1-9　二变量卡诺图

由图 1-9(a)可以看到，图中几何相邻的最小项逻辑也相邻。图 1-10 中给出了三变量到五变量的卡诺图。

需要说明：五变量以上的卡诺图画法有多种，且很难保证逻辑相邻与几何上相邻完全一致。图 1-10(d)是五变量卡诺图的另一种画法。

根据以上画出的卡诺图可以得到以下特性。

(1)把变量的符号(A，B，…)分别标注在方格图的左上角斜线两侧，并在方格图上方和左侧的每个方格的边沿标注每个变量的取值。其取值的原则是：在任何两个相邻和轴对称的

A \ BC	00	01	11	10
0	m_0	m_1	m_3	m_2
1	m_4	m_5	m_7	m_6

（a）三变量A、B、C的卡诺图

AB \ CD	00	01	11	10
00	m_0	m_1	m_3	m_2
01	m_4	m_5	m_7	m_6
11	m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}
10	m_8	m_9	m_{11}	m_{10}

（b）四变量A、B、C、D的卡诺图

AB \ CDE	000	001	011	010	110	111	101	100
00	m_0	m_1	m_3	m_2	m_6	m_7	m_5	m_4
01	m_8	m_9	m_{11}	m_{10}	m_{14}	m_{15}	m_{13}	m_{12}
11	m_{24}	m_{25}	m_{27}	m_{26}	m_{30}	m_{31}	m_{29}	m_{28}
10	m_{16}	m_{17}	m_{19}	m_{18}	m_{22}	m_{23}	m_{21}	m_{20}

（c）五变量A、B、C、D、E的卡诺图

AB \ CDE	000	001	011	111	101	100	110	010
00	m_0	m_1	m_3	m_7	m_5	m_4	m_6	m_2
01	m_8	m_9	m_{11}	m_{15}	m_{13}	m_{12}	m_{14}	m_{10}
11	m_{24}	m_{25}	m_{27}	m_{31}	m_{29}	m_{28}	m_{30}	m_{26}
10	m_{16}	m_{17}	m_{19}	m_{23}	m_{21}	m_{20}	m_{22}	m_{18}

（d）另一种五变量卡诺图

图 1-10　三变量到五变量的卡诺图

方格中，其变量的组合之间只允许而且必须有一个变量取值不同，这是构成卡诺图的重要原则。

(2)每个方格的编号就是真值表中变量每种组合的二进制所对应的十进制数。

(3)在卡诺图中，凡相邻的小方格或与轴线对称的小方格也都具有逻辑相邻性。

如图 1-10(c)所示，0 号与 1 号、8 号、2 号、16 号、4 号都有逻辑相邻对称关系。1 号与 0 号、3 号、5 号、9 号、17 号也有相邻性。

(4)逻辑相邻性有一个重要特点，就是它们之间的逻辑变量的取值只有一个变量取值不同，它们进行或运算时可以消掉一个因子。如图 1-10(c)所示，23 号、31 号相或可得 $A\overline{B}CDE+ABCDE=ACDE$，消去了 B 因子。

如果 $4(2^2)$个相邻的最小项进行或运算可以消掉 2 个因子，8 个相邻最小项进行求或运算可以消掉 3 个因子，则 2^n 个最小项进行或运算可以消掉 n 个因子。

3. 逻辑函数的卡诺图表示

由于任意一个逻辑函数都可以表示为若干最小项之和的形式，那么自然可以用卡诺图表示逻辑函数。填写卡诺图的原则是：把逻辑函数所包括的全部最小项在卡诺图对应的方格中填入 1，将其余位置上填入 0 或不填。因此，要把逻辑函数用卡诺图表示，关键是要得到逻辑函数的最小项。

例 10 使用卡诺图表示逻辑函数 $Y=\overline{A\,\overline{B}}(A+C)$。

解 先将 Y 分解为最小项表示形式

$$\begin{aligned}Y&=(\overline{A}+B)(A+C)=\overline{A}C+AB\\&=\overline{A}C(B+\overline{B})+AB(C+\overline{C})\\&=\overline{A}BC+\overline{A}\,\overline{B}C+ABC+AB\overline{C}=\sum m(1,3,6,7)\end{aligned}$$

画出卡诺图，由于函数为三变量，故所得卡诺图如图 1-11 所示。

A \ BC	00	01	11	10
0	0	1	1	0
1	0	0	1	1

图 1-11 例 10 的卡诺图

例 11 试用卡诺图表示逻辑函数 $Y=\overline{(AB+\overline{AB}+\overline{C})\overline{AB}}$。

解 将逻辑函数 Y 转换成标准与-或式

$$\begin{aligned}Y(A,B,C)&=\overline{(AB+\overline{AB}+\overline{C})}+\overline{A\,\overline{B}}=\overline{AB}\cdot\overline{\overline{AB}}\cdot C+AB\\&=(\overline{A}+\overline{B})(A+B)C+AB(C+\overline{C})\\&=(\overline{A}A+\overline{A}B+A\,\overline{B}+B\,\overline{B})C+ABC+AB\overline{C}\\&=\overline{A}BC+A\,\overline{B}C+ABC+AB\overline{C}\\&=\sum m(3,5,6,7)\end{aligned}$$

因此得到卡诺图如图 1-12 所示。

A \ BC	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	0	1	1	1

图 1-12 例 11 的卡诺图

例 12 试用卡诺图表示逻辑函数 $Y=ABCD+B$。

解 如果把本例中的逻辑函数展开成最小项，过程比较烦琐。实际上，完全可以采用观察方法画出对应的卡诺图。在最小项表示式中，当逻辑变量取值组合对应函数中包含的最小项时，函数值等于 1；反之函数值为 0。因此，只要观察函数值何时等于 1 即可得到对应的卡诺图。

对于函数 $Y=ABCD+B$。若使 $Y=1$，只要 $B=1$ 即可，所以凡是 $B=1$ 的方格均填 1，如图 1-13 所示。

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	1	1	1	1
11	1	1	1	1
10	0	0	0	0

图 1-13 例 12 的卡诺图

4. 用卡诺图化简逻辑函数

利用卡诺图化简逻辑函数的基本原理是 2^n 个相邻最小项进行或运算可以消去 n 个变量，并把这一运算直接在卡诺图中完成。卡诺图化简逻辑函数的步骤如下。

(1)画出逻辑函数对应的卡诺图。

(2)将卡诺图中标 1(或 0)的相邻方格用虚线圈起来，这叫作合并最小项。注意，圈起来的相邻最小项只能满足 2^n 个。

(3)再根据 $A+\overline{A}=1$ 消去互补变量，根据 $A+A=A$ 写出保留项，即可得到最简与-或逻辑表达式。

在利用卡诺图进行逻辑函数化简时，应注意遵循下列几项原则，以保证化简结果准确。

(1)所谓 2^n 个 1 相邻划成一个方格群是分别为 1 个 1、2 个 1、4 个 1、8 个 1、16 个 1 等相邻构成的方形(或矩形)，可以用包围圈将这些 1 圈起来形成方格群，包括上下、左右、相对边界、四角等各种相邻的情况。

(2)包围圈越大，即方格群中包含的最小项越多(注意，必须是 2^n 个)，公因子越少，化简结果越简单。

(3)在画包围圈时，最小项可以被重复包围，但每个方格群至少要有一个最小项与其他方格群不重复，以保证该化简项的独立性。

(4)必须把组成函数的全部最小项都圈完，为了不至于遗漏，一般应先固定孤立项，再圈只有一种合并方式的最小项。

(5)方格群的个数越少越好，这样化简后的乘积项就越少。

下面举例说明。

例 13　用卡诺图化简逻辑函数 $Y=ABC+AB\overline{C}+\overline{A}BC$。

解

(1)将函数 Y 填入卡诺图，如图 1-14 所示。

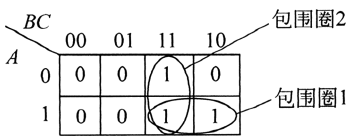


图 1-14　例 13 的卡诺图

(2)合并最小项，如图 1-14 所示中的包围圈。

(3)由卡诺图写出逻辑函数表达式。其具体步骤为：将所圈对应的变量取值区域写成与项。若包围圈在 1 值区，则与项中含其对应的原变量；若在 0 值区，则含对应的反变量；若某包围圈同时处于某变量的 1 值区和 0 值区，则该变量被消去。

根据以上原则，从图 1-14 中可以看到，AB 项对应的圈始终有变量 A 取 1，变量 B 也取 1。而变量 C 无论取 0 或 1，函数值都等于 1。换句话说，AB 项对应的圈不受变量 C 影响。因此，应消去变量 C。同理，BC 项对应的圈中的函数值与变量 A 无关，应该消去变量 A。由于图 1-14 中只有两个圈，所以只有两个乘积项相加。由此得到简化表达式为

$$Y=AB+BC$$

例 14 用卡诺图化简逻辑函数 $\overline{A}BC+\overline{A}B\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}\overline{B}C+AB\overline{C}+A\overline{B}\overline{C}$。

解 画出函数对应的卡诺图，并化简，如图 1-15 所示。

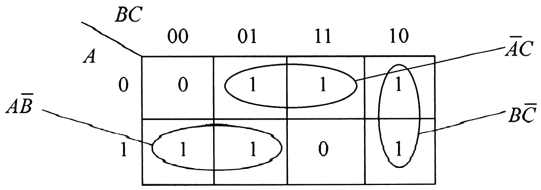


图 1-15 例 14 的卡诺图

由于图 1-15 中只有 3 个圈，因此，逻辑函数只有 3 个乘积项相加。而每个乘积项对应 1 个圈，由于每个圈中只有 2 个相邻最小项，所以每个乘积项只能消去 1 个因子。由此得到最简逻辑式为

$$Y=A\overline{B}+\overline{A}C+B\overline{C}$$

例 15 用卡诺图化简逻辑函数 $Y(A,B,C)=\sum m(0,1,3,4,5)$。

解 画出逻辑函数对应的卡诺图，如图 1-16 所示，合并最小项，得

$$Y=\overline{B}+\overline{A}C$$

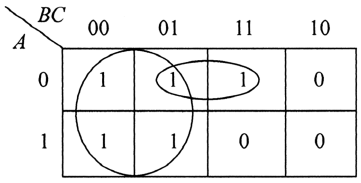


图 1-16 例 15 的卡诺图

本题利用了以中轴对称的最小项也具有逻辑相邻性的特点，使圈画得更大，因此可以消去更多的因子。

例 16 用卡诺图化简逻辑函数 $Y=AB+\overline{\overline{BC}(\overline{C}+\overline{D})}$。

解 先将逻辑函数化为最小项形式，有

$$Y(A,B,C,D)=\sum(3,6,7,11,12,13,14,15)$$

根据最小项形式画出对应的卡诺图，并找到可以合并的最小项，如图 1-17 所示，所以得到化简结果为

$$Y=AB+CD+BC$$

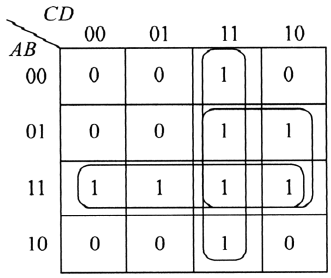


图 1-17 例 16 的卡诺图

例 17　用卡诺图化简逻辑函数 $Y(A, B, C, D)=\sum m(0, 2, 4, 6, 8, 10)$。

解　根据逻辑函数画出对应的卡诺图，并找到可以合并的最小项，如图 1-18 所示。合并后可得

$$Y=\overline{A}\,\overline{D}+\overline{B}\,\overline{D}$$

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	1	0	0	1
11	0	0	0	0
10	1	0	0	1

图 1-18　例 17 的卡诺图

例 18　用卡诺图化简逻辑函数 $Y(A, B, C)=\sum m(0, 1, 2, 4, 5, 6, 7)$。

解　画出相应卡诺图如图 1-19 所示。根据图 1-19(a)可直接得到

$$Y=A+\overline{B}+\overline{C}$$

由于图 1-19 中 1 很多，0 很少。因此，本题可以采用圈 0 的方法得到最简逻辑函数，图 1-19(b)为圈 0 的情况。

A \ BC	00	01	11	10
0	1	1	0	1
1	1	1	1	1

(a) 圈1的情况

A \ BC	00	01	11	10
0	1	1	0	1
1	1	1	1	1

(b) 圈0的情况

图 1-19　例 18 的卡诺图

根据图中的圈可知

$$\overline{Y}=\overline{A}BC$$

所以有

$$Y=\overline{\overline{Y}}=\overline{\overline{A}BC}+A+\overline{B}+\overline{C}$$

可见，两种方法得到的结果完全相同。

例 19　用卡诺图化简逻辑函数 $Y=\sum m(0, 4, 5, 6, 7, 8, 11, 13, 15, 16, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 27, 29, 31)$。

解　根据图 1-10(d)画出本题卡诺图。根据图 1-20 可以写出简化后的逻辑式。

$$Y=\overline{C}\,\overline{DE}+ABE+BDE+CE+\overline{B}C$$

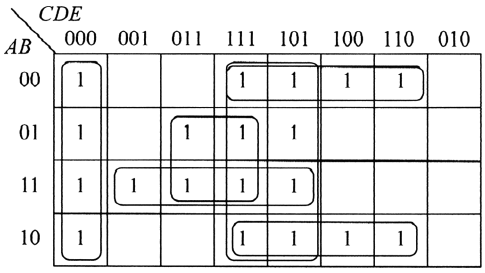


图 1-20　例 19 的卡诺图

1.3.4　具有约束项的逻辑函数的化简

1. 约束的概念

逻辑关系中的“约束”是指逻辑函数中各逻辑变量之间的制约关系。例如，用 A、B、C 三个变量分别表示一台电动机的正转、反转和停止三种命令。当任一变量是 1 时，即进行相应的某一项操作。因为电动机在同一时刻只可能执行一种命令。因此，任何时候三个变量最多只能有一个变量为 1，也必须有一个为 1，即 A、B、C 三个变量的取值只可能出现 001、010、100 三种组合，而不会出现 000、011、101、110、111 的五种组合。若用最小项表达式来表示，这种操作的逻辑关系必须满足的约束条件为

$$\begin{cases}\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}=0\\ \overline{A}BC=0\\ A\overline{B}C=0\\ AB\overline{C}=0\\ ABC=0\end{cases}$$

或写成

$$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}BC+A\overline{B}C+AB\overline{C}+ABC=0$$

该约束条件也常常写为

$$\sum(d_3,d_5,d_6,d_7)=\sum d(3,5,6,7)$$

约束项也称为“无关项”或“任意项”。在卡诺图中，受约束条件约束的最小项用符号“×”表示，这是因为在所研究的逻辑问题中，这些约束始终不会出现。这样，在化简时，根据需要可把约束项看作逻辑 1，也可看作逻辑 0。由此，化简得到的逻辑表达式在逻辑功能上是不变的。

2. 具有约束项的逻辑函数的化简

对于具有约束的逻辑函数，可以充分利用约束条件使表达式简化。化简带有约束项的逻辑函数应该充分利用约束项可以取 1，也可以取 0 的特点，尽量扩大卡诺图中的圈，消除最小项的个数和因子数。但是不需要的约束项不应单独与全部已圈过的 1 再圈起来，避免增加多余项。下面仍然通过一些例子来说明具有约束的逻辑函数化简方法。

例 20　用卡诺图化简带约束项的逻辑函数，并写出最简与-或式。

$$Y(A,B,C,D)=\sum m(0,2,7,8,13,15)+\sum d(1,5,6,9,10,11,12)$$

解　画出卡诺图如图 1-21 所示。图中约束项用“×”表示，需要的地方，把约束项看作 1；不需要的地方，把约束项看作 0。这样，在卡诺图中画圈时非常方便，得到的最简逻辑函数为

$$Y(A,\ B,\ C,\ D)=BD+\overline{B}\overline{D}$$

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	×	0	1
01	0	×	1	×
11	×	1	1	0
10	1	×	×	×

图 1-21　例 20 的卡诺图

例 21　用卡诺图化简带约束项的逻辑函数，并写出最简与-或式。

$$Y(A,B,C,D)=\sum(1,7,8,14)+\sum d(3,5,9,10,12,15)$$

解　面出的卡诺图如图 1-22 所示。图中约束项用“×”表示，需要的地方，把约束项看作 1；不需要的地方，把约束项看作 0。最简的逻辑函数为

$$Y(A,\ B,\ C,\ D)=A\overline{D}+\overline{A}D=A\oplus D$$

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	1	×	0
01	0	×	1	0
11	×	0	×	1
10	1	×	0	×

图 1-22　例 21 的卡诺图

1.3.5　逻辑函数表示方法之间的转换

1. 逻辑函数的几种表示方法

前面已经讨论了逻辑关系的不同表示形式。本小节对逻辑表达式、真值表、卡诺图、逻辑图和波形图等逻辑函数的五种表示形式进行归纳总结。实际上，在逻辑函数的五种表示形式中，只要知道其中一种，就可以得到其他几种表示形式。

(1)真值表

真值表就是由逻辑变量的所有可能取值组合及其对应的函数值所构成的逻辑关系表格，是一种用表格表示逻辑函数的方法。

真值表的列写方法是：每一个变量均有 0、1 两种取值，对于 n 个变量共有 2^n 种不同的取值。将这 2^n 种不同的取值按顺序(一般按二进制递增规律)排列起来，同时在相应位置上填入

函数的值，便可得到逻辑函数的真值表。

用真值表表示逻辑函数的优点是直观明了，非常适合于直接把实际逻辑问题抽象成为数学问题。缺点是难以用公式和定理进行运算和变换；当变量较多时，列函数真值表较烦琐。因为每一个变量有 0 和 1 两种取值，n 个变量就有 2^n 种不同的取值，其真值表就由 2^n 行组成。随着变量数目增多，真值表的行数将急剧增加。因此，当变量数目不太多时，用真值表表示逻辑函数才比较方便。

例如，某一盏灯 Y 由三个开关 A、B、C 控制，当有两个以上开关闭合时，灯亮。如果开关闭合用 1 表示，开关断开用 0 表示，灯亮用 1 表示，灯不亮用 0 表示。由以上实际问题的规定，立刻就可以得到真值表见表 1-9 所列。由此可见，从实际问题直接得到真值表非常方便，这正是真值表的优点。

表 1-9　真值表

A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

(2)逻辑表达式

逻辑表达式就是由逻辑变量通过与、或、非三种运算符连接起来所构成的式子。它是一种用公式表示逻辑关系的方法。

用逻辑表达式表示逻辑函数的优点是书写简洁方便，便于利用逻辑代数的公式和定理进行运算和变换，也便于用逻辑图来实现函数关系；其缺点是当逻辑函数较复杂时，难以直接从变量取值看出函数的值，不够直观。

如果把上述三个开关控制一盏灯的逻辑关系用逻辑式表示为

$$Y=\overline{A}BC+A\overline{B}C+AB\overline{C}+ABC=BC+AC+AB$$

显然，逻辑表达式简洁，便于化简，但逻辑功能不直观。

(3)卡诺图

卡诺图是由表示变量的所有可能取值组合的小方格所构成的图形。卡诺图是真值表中各项的二维排列方式，是真值表的一种变形。在卡诺图中，真值表的每一行用一个小方格来表示。利用卡诺图表示逻辑函数的方法是：在那些使函数值为 1 的变量取值组合所对应的小方格内填入 1，其余的方格内填入 0，即得到该函数的卡诺图。

卡诺图的优点有：排列方式比真值表紧凑，同时便于对函数进行化简。其缺点有：对于

五变量以上的卡诺图，因变量增多，卡诺图变得相当复杂，这时用卡诺图来对函数进行化简也变得相当困难，因此应用得较少。

从真值表或逻辑式都可以方便地得到上述三个开关控制一盏灯的卡诺图，如图 1-23 所示。

(4)逻辑图

逻辑图就是由表示逻辑运算的逻辑符号经连接所构成的图形。在数字电路中，用逻辑符号表示基本逻辑单元电路以及由这些基本单元电路组成的部件。因此用逻辑图表示逻辑函数是一种比较接近工程实际的表示方法。

逻辑图表示逻辑关系的优点是接近实际电路。缺点是不能进行运算和变换，所表示的逻辑关系不直观。

例如，对于上述三个开关控制一盏灯的例子，根据逻辑式可得到如图 1-24 所示的逻辑图。

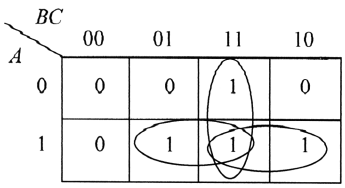


图 1-23　三个开关控制一盏灯的卡诺图

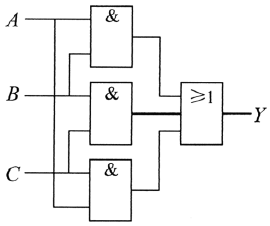


图 1-24　三个开关控制一盏灯的逻辑图

(5)时序图

时序图也称为“波形图”，是由输入变量的所有可能取值组合的高、低电平及其对应的输出函数值的高、低电平所构成的图形。波形图可以将输出函数的变化和输入变量的变化之间在时间上的对应关系直观地表示出来。此外，可以利用示波器对电路的输入输出波形进行测试、观察，以判断电路的输入输出是否满足给定的逻辑关系。

时序图的优点是能够形象、直观地表示变量取值与函数值在时间上的对应关系，实际中便于测量；缺点是难以进行运算和变换，当变量个数增多时，画图较麻烦。

采用时序图表示的三个开关控制一盏灯的例子的逻辑关系如图 1-25 所示。

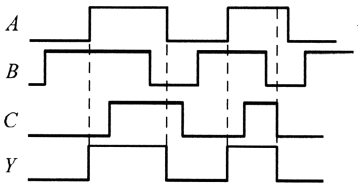


图 1-25　三个开关控制一盏灯的时序图

2. 逻辑函数表示方法之间的转换

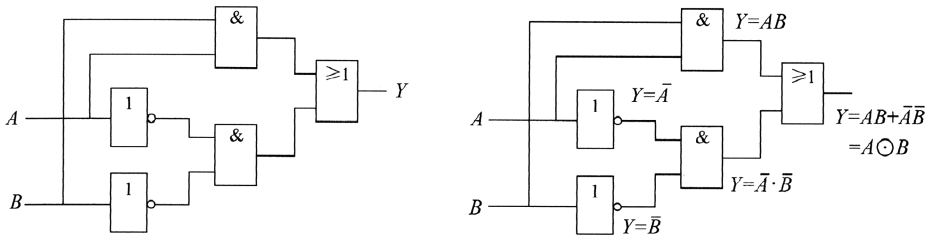
由上面的讨论可知，任何逻辑函数都可以用逻辑函数式、真值表、逻辑符号图、卡诺图等方法来表示。对于同一个逻辑函数，它的几种表示方法可以互相转换，已知一种可以转换

出其他几种。在此主要讨论由逻辑图求逻辑函数式和真值表、由逻辑函数式求真值表和逻辑图，以及用真值表求逻辑表达式和逻辑图的过程。

(1)已知逻辑图求逻辑函数式和真值表

如果给出逻辑图，可以非常方便地得到对应的逻辑函数式和真值表。方法是只要将逻辑图中每个逻辑符号所表示的逻辑运算依次写出来即可。有了逻辑函数式列真值表就不难了。

例 22 试写出如图 1-26(a)所示逻辑图的逻辑函数式与真值表。



(a) 原题逻辑图　　(b) 写出各门逻辑函数后的逻辑图

图 1-26　例 22 的图

解 从输入端开始，将逻辑图中每个逻辑符号所表示的逻辑运算依次写出，如图 1-26(b)所示，因此可直接写出逻辑函数关系

$$Y=AB+\overline{A}\overline{B}=A\odot B$$

根据上面得到的逻辑表达式可列出真值表。列真值表时，只需将输入逻辑变量 A、B 的每一种取值对应的函数值 Y 计算出来列入表中就得到真值表，见表 1-10 所列。

表 1-10　例 22 的真值表

A	B	Y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

(2)已知逻辑函数式求真值表和逻辑图

如果逻辑函数式已知，同样也可以求出真值表和逻辑图。把输入变量取值的所有组合逐一代入函数式中，算出逻辑函数值，然后将输入变量取值与逻辑函数值对应地列成表就得到逻辑函数的真值表。由函数式画逻辑图的方法为：依照函数式，按先与后或的运算顺序，用逻辑符号表示；然后正确连接起来就可以画出逻辑图。

例 23 已知逻辑函数式 $Y=A+\overline{B}C+\overline{A}\overline{C}$，求与它对应的真值表和逻辑图。

解 将输入变量 A、B、C 的各组取值代入函数式并求出函数 Y 的值，对应地填入表 1-11 中，即为真值表。