

工程力学



类目：机械类

书名：工程力学

主编：姜泉良 张海洋 李伟欣

出版社：电子科技大学出版社

开本：大 16 开

书号：978-7-5770-0709-0

使用层次：通用

出版时间：2025 年 3 月

定价：48.00 元

印刷方式：双色

是否有资源：是

机械类创新教材
教育改革新理念教材



机械类创新教材
教育改革新理念教材



工程力学

工程力学

主编 © 姜泉良 张海洋 李伟欣



工程力学

主编 © 姜泉良 张海洋 李伟欣



策划编辑: 万晓桐
责任编辑: 杨梦婷
封面设计: 旗语书装



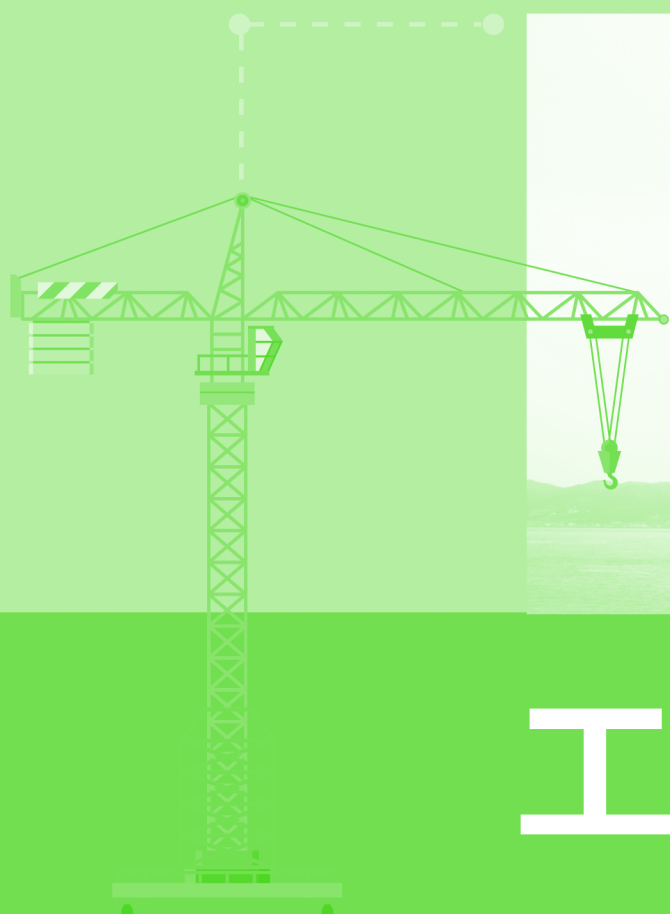
定价: 48.00元

电子科技大学出版社

电子科技大学出版社
University of Electronic Science and Technology of China Press



机械类创新教材
教育改革创新理念教材



工程力学



主 审 ◎ 徐 靖

主 编 ◎ 姜泉良 张海洋 李伟欣

副主编 ◎ 彭 超 苏文龙 郭典塔

格日乐



电子科技大学出版社

University of Electronic Science and Technology of China Press

· 成都 ·

图书在版编目 (CIP) 数据

工程力学 / 姜泉良, 张海洋, 李伟欣主编. — 成都:
电子科技大学出版社, 2025.3
ISBN 978-7-5770-0709-0

I. ①工… II. ①姜… ②张… ③李… III. ①工程力
学 IV. ①TB12

中国国家版本馆 CIP 数据核字 (2023) 第 226689 号

工程力学

GONGCHENG LIXUE

姜泉良 张海洋 李伟欣 主编

策划编辑 万晓桐
责任编辑 杨梦婷
责任校对 郑宇虹
责任印制 梁 硕

出版发行 电子科技大学出版社
成都市一环路东一段 159 号电子信息产业大厦九楼 邮编 610051
主 页 www.uestcp.com.cn
服务电话 028-83203399
邮购电话 028-83201495

印 刷 涿州汇美亿浓印刷有限公司
成品尺寸 210 mm × 285 mm
印 张 11
字 数 320 千字
版 次 2025 年 3 月第 1 版
印 次 2025 年 3 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5770-0709-0
定 价 48.00 元

版权所有，侵权必究



《中华人民共和国国民经济和社会发展第十四个五年规划和 2035 年远景目标纲要》指出，“坚持创新在我国现代化建设全局中的核心地位，把科技自立自强作为国家发展的战略支撑，面向世界科技前沿、面向经济主战场、面向国家重大需求、面向人民生命健康，深入实施科教兴国战略、人才强国战略、创新驱动发展战略，完善国家创新体系，加快建设科技强国”。因此，编者在编写本书时尤其注意培养学生的务实意识、创新意识，旨在提高学生的理论水平和动手能力。

本书的编写主要遵循“以就业为导向，工学结合”的原则，以实用为基础，以培养应用型人才解决实际问题的能力为目标，根据专业实际需要进行课程体系设置和教材内容的选取，注重提高案例教学的比重，强化实际应用，集理论性与实用性于一体。

本书共分为七个项目，包括静力学基础、平面力系与空间力系的简化和平衡、轴向拉伸与压缩、剪切与扭转、弯曲梁的强度和刚度、强度理论与组合变形、压杆的稳定性。

本书内容翔实，图文并茂，讲解清晰，可作力学基础课教材，也可供工科类相关专业学生以及相关工程技术人员参考。

编者在编写本书过程中，参考和借鉴了不少工程力学相关的文献资料、网络资源和研究成果，在此向相关作者一并表示真诚的感谢！由于编者学识有限，书中难免有疏漏之处，敬请各位读者在使用本书的过程中多提宝贵意见，以便修订得更加完善。

编 者

2025 年 2 月



项目一 静力学基础 / 1

- 任务一 静力学的基本概念及基本公理 / 3
- 任务二 力对点之矩和合力矩定理 / 7
- 任务三 力偶 / 8
- 任务四 物体受力分析 / 10
- 任务五 受力图 / 15

项目二 平面力系与空间力系的简化和平衡 / 22

- 任务一 平面一般力系 / 23
- 任务二 空间力系 / 31

项目三 轴向拉伸与压缩 / 46

- 任务一 材料力学的基本概念 / 47
- 任务二 轴向拉压杆的内力、应力与变形 / 55
- 任务三 材料在轴向拉压时的力学性能 / 63
- 任务四 轴向拉压杆的强度计算 / 68

项目四 剪切与扭转 / 73

- 任务一 剪切与扭转的概念与实例 / 75
- 任务二 连接件强度的实用计算 / 77
- 任务三 扭转的内力——扭矩和扭矩图 / 79
- 任务四 圆轴扭转时的应力和强度条件、变形和刚度计算 / 81

项目五 弯曲梁的强度和刚度 / 91

- 任务一 弯曲变形的概念 / 93
- 任务二 弯曲正应力与切应力 / 94

- 任务三 惯性矩的计算 / 102
- 任务四 梁的强度条件及改良措施 / 105
- 任务五 梁变形的基本方程 / 110
- 任务六 梁的变形和刚度 / 113

项目六 强度理论与组合变形 / 126

- 任务一 点的应力状态 / 128
- 任务二 平面应力状态分析 / 129
- 任务三 胡克定律 / 134
- 任务四 应变能 / 135
- 任务五 强度理论 / 136
- 任务六 组合变形的强度分析 / 140

项目七 压杆的稳定性 / 152

- 任务一 压杆稳定的概念 / 154
- 任务二 确定临界力的欧拉公式 / 156
- 任务三 三类压杆的临界应力 / 160
- 任务四 压杆的稳定性计算 / 163
- 任务五 提高压杆稳定性的措施 / 165

参考文献 / 170



项目一

静力学基础

项目概述

本项目主要介绍了静力学的基本概念、基本公理、基本方法和静力学问题的基本解题步骤。

◆ 项目内容

任务一：静力学的基本概念：力、力系、刚体、平衡等概念的理解。

任务二：静力学的基本公理：作用与反作用公理、二力平衡公理、加减平衡力系公理等公理的掌握。

任务三：力对点之矩和合力矩定理：力矩和合力矩定理的应用。

任务四：力偶：力偶的概念、性质和平面力偶系的合成方法。

任务五：物体受力分析：约束与约束反力、受力图的绘制等。

通过完成这五个任务的学习，可以掌握静力学基础的主要知识点，培养分析和解决简单静力学问题的基本能力。这可为进一步深入学习静力学知识奠定基础。

学习目标

◆知识目标

1. 掌握静力学的基本概念。
2. 理解并运用静力学的基本公理。
3. 掌握力对点之矩和合力矩定理的应用。
4. 理解力偶的概念并能计算平面力偶系。
5. 能绘制简单物体的受力图。

◆能力目标

1. 能正确运用静力学的基本概念。
2. 能准确判断和运用静力学基本公理。
3. 能熟练应用力对点之矩和合力矩定理计算力矩。
4. 能根据条件绘制物体的受力图。
5. 能根据受力图分析物体的受力状况。

◆素质目标

1. 培养学习静力学的兴趣。
2. 掌握静力学基础学习方法。
3. 训练逻辑思维能力和空间想象能力。
4. 培养洞察力和提出问题的能力。
5. 培养动手操作和解决实际问题的能力。

任务工单

学习项目	知识点	知识点难易度
静力学的基本概念及基本公理	介绍了力、力系、刚体、平衡等基本概念	★★★
	阐述了作用与反作用公理、二力平衡公理、加减平衡力系公理等基本公理	★★★★★
力对点之矩和合力矩定理	介绍了力矩的概念及性质	★★
	阐述了合力矩定理	★★★★★
力偶	介绍了力偶的概念及性质	★★
	描述了平面力偶系的合成方法	★★★
物体受力分析	描述了常见约束类型及其约束反力	★★
	阐明了物体受力分析的基本步骤	★★★★★
受力图	介绍了绘画受力图的基本步骤	★★★
	分析了两个典型例题的受力图绘制	★★★

任务一 静力学的基本概念及基本公理

一、静力学的基本概念

(一) 力

力是物体之间相互的机械作用。这种作用使物体的机械运动状态发生变化或使物体的形状发生改变，前者称为力的外效应或运动效应，后者称为力的内效应或变形效应。在理论力学中只研究力的外效应。

力对物体的作用效果取决于力的大小、力的方向、力的作用点三个要素。力是矢量，且为定位矢量，如图 1-1 所示，用有向线段 AB 表示一个力矢量 [图 1-1 (a)]，其中线段的长度表示力的大小，线段的方向和指向代表力的方向，线段的起点 A (或终点) 表示力的作用点，线段所在的直线称为力的作用线 [图 1-1 (b)]。

这里用粗黑斜体大写字母 $\boldsymbol{F}$ 表示力矢量，用白斜体大写字母 F 表示力的大小。在国际单位制中，力的单位是牛顿 (N) 或千牛 (kN)。

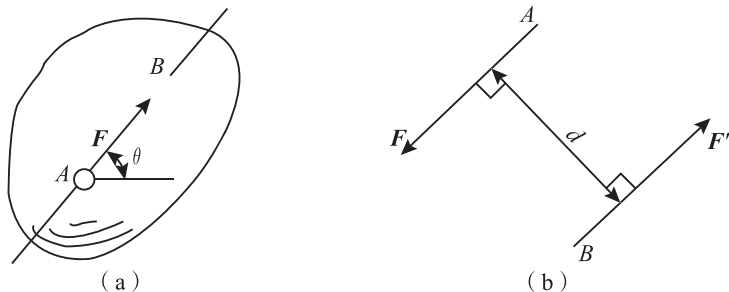


图 1-1 力对物体的作用效果示意图

力的作用点是物体相互作用位置的抽象化。实际上，两个物体接触处总占有一定的面积，力总是分布地作用在一定的面积上。如果这个面积很小，则可将其抽象为一个点，即为力的作用点，这时的作用力称为集中力；若两物体接触面积比较大，力分布地作用在接触面上，这时的作用力称为分布力。除面分布力外，还有作用在物体整体或某一长度上的体分布力或线分布力，分布力的大小用符号 q 表示，计算式如下：

$$q = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta S} \quad (1-1)$$

式中， ΔS 为分布力作用的范围 (长度、面积或体积)； ΔF 为作用于该部分范围内的分布力的合力； q 表示分布力作用的强度，称为荷载集度。若力的分布是均匀的，则称为均匀分布力，简称“均布力”。

(二) 力系

力系是指作用在物体上的一群力。若对于同一物体，有两组不同力系对该物体的作用效果完全相同，则这两组力系称为等效力系。一个力系用其等效力系来代替，称为力系的等效替换。用一个最简单的力

系等效替换一个复杂力系，称为力系的简化。若某力系与一个力等效，则此力称为该力系的合力，而该力系的各力称为此力的分力。

力系按作用线分布情况的不同可分为下列几种：当所有力的作用线在同一平面内时，称为平面力系，否则称为空间力系；当所有力的作用线汇交于同一点时，称为汇交力系；而所有力的作用线都相互平行时，称为平行力系，否则称为一般力系或任意力系。

（三）刚体

刚体是指在力的作用下不变形的物体，即在力的作用下其内部任意两点的距离永远保持不变的物体。刚体是理想化的力学模型，事实上，在受力状态下不变形的物体是不存在的，不过，当物体的变形很小，忽略物体的变形并不会对物体的性质带来本质的影响时，该物体就可被近似看作刚体。

刚体是在一定条件下研究物体受力和运动规律时的科学抽象，这种抽象不仅使问题大大简化，也能得出足够精确的结果，因此，静力学又称为“刚体静力学”。但是，在需要研究力对物体的内部效应时，这种理想化的刚体模型就不适用，而应采用变形体模型，并且变形体的平衡也是以刚体静力学为基础的，只是还需补充变形几何条件与物理条件。

（四）平衡

在工程中，把物体相对于地面静止或做匀速直线运动的状态称为平衡。

根据牛顿第一定律，物体如不受到力的作用则必然保持平衡。但客观世界中，任何物体都不可避免地受到力的作用，物体上作用的力系只要满足一定的条件，即可使物体保持平衡，这种条件称为力系的平衡条件。满足平衡条件的力系称为平衡力系。

二、静力学的基本公理

静力学公理是人们通过长期实践概括归纳出来的最基本的静力学一般规律，它们构成了静力学的基础。

（一）作用与反作用公理（公理一）

由牛顿第三定律可知：当物体 A 向物体 B 施加作用力时， B 对 A 也施加了反作用力。这两个力大小相等、方向相反，作用在同一条直线上。

如图 1-2 所示，当人拎着物体时，人的手臂给物体一个向上的力 F ，同时物体也给人的手臂一个向下的力 F' ， F 与 F' 大小相等、方向相反，作用在同一条直线上。若人松开手，则物体就会往下掉， F 和 F' 同时消失。

由此得到作用与反作用公理：两个物体间的作用力与反作用力总是同时存在、同时消失，且大小相等、方向相反，其作用线在同一直线上，分别作用在这两个物体上。

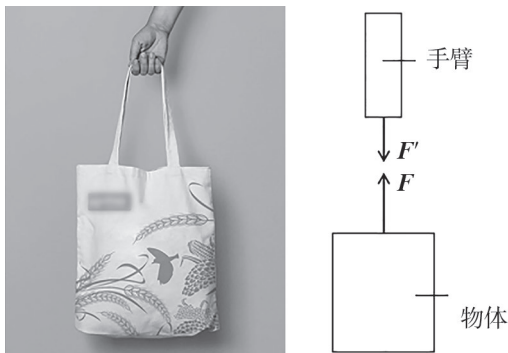


图 1-2 拎物体时的作用力与反作用力

(二) 二力平衡公理 (公理二)

如图 1-3 所示, 书本放在桌面上, 它受到重力 G 和桌面对它的支持力 F_N 的作用而处于平衡状态。显然, $G = -F_N$ (负号说明书本所受重力 G 的方向和所受支持力 F_N 的方向相反), 即两力大小相等、方向相反, 作用在同一条直线上。

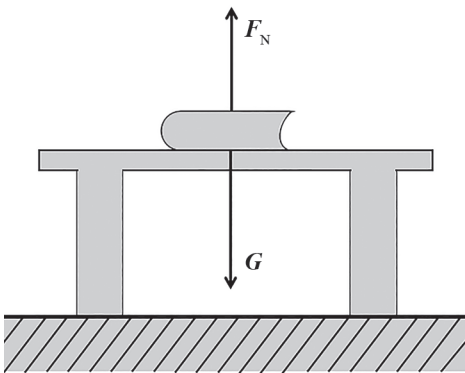


图 1-3 二力平衡示例

由此得出二力平衡公理: 作用于同一刚体上的两个力, 使刚体平衡的充要条件是: 这两个力大小相等、方向相反, 其作用线在同一直线上。

需要指出的是, 二力平衡条件只适用于刚体。对于变形体, 二力平衡条件只是必要的, 而非充分的, 如绳索受等值、反向、共线的两个压力作用就不能保持平衡, 如图 1-4 所示。

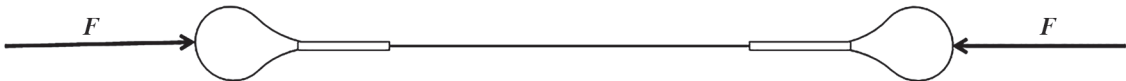


图 1-4 受等值、反向、共线的两个压力作用的绳索

在工程力学中, 公理二常用于二力构件的受力分析中, 如图 1-5 所示。二力构件指的是只受两个力作用而处于平衡状态的构件, 也可简称为“二力杆”。这类构件只在两点受力且不计自重, 它们的受力特点是: 所受二力必沿其两作用点的连线, 且大小相等、方向相反。

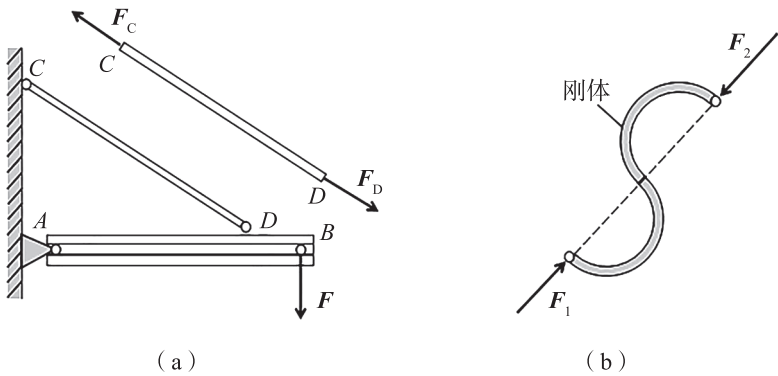


图 1-5 公理二的应用

(三) 加减平衡力系公理 (公理三)

如果物体在力系作用下处于平衡状态, 这样的力系就称为平衡力系。如图 1-6 所示, 处于平衡状态下杆秤的受力就构成了平衡力系。

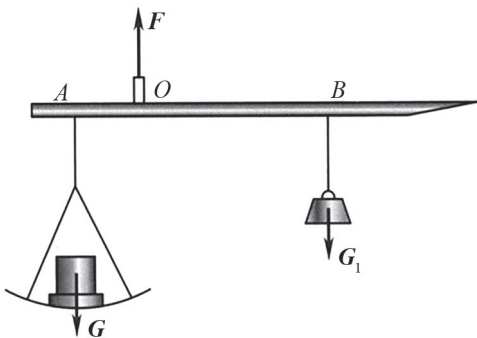


图 1-6 平衡力系示例

由于平衡力系中各力对刚体作用的外效应彼此抵消，所以在—个刚体上加上或减去—个平衡力系，并不会改变该刚体原来的运动状态。

由此得出静力学公理三，加减平衡力系公理：在—个刚体上加上或减去—个平衡力系，并不改变原力系对刚体的作用效果。

公理三是简化力系的重要理论依据，由它可以推导出力的可传性原理：作用在刚体上的力可以沿其作用线滑移至刚体的任意点，不改变原力对该刚体的作用效果，如图 1-7 所示。

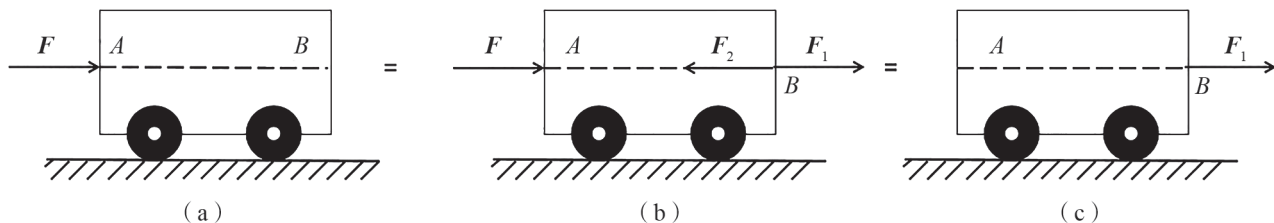


图 1-7 公理三的应用

(四) 力的平行四边形公理 (公理四)

作用在物体上同—点的两个力，可以合成为—个合力。合力的作用点也在该点，合力的大小和方向，由这两个力为邻边构成的平行四边形的对角线确定，如图 1-8 (a) 所示。或者说，合力矢等于这两个力矢的几何和，即

$$\mathbf{F}_R = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 \quad (1-2)$$

亦可另作—个力三角形来求两汇交力合力矢的大小和方向，即依次将 $\mathbf{F}_1$ 和 $\mathbf{F}_2$ 首尾相接画出，最后由第一个力的起点至第二个力的终点形成三角形的封闭边，即为此二力的合力矢 $\mathbf{F}_R$ ，如图 1-8 (b)、(c) 所示，称为力的三角形法则。

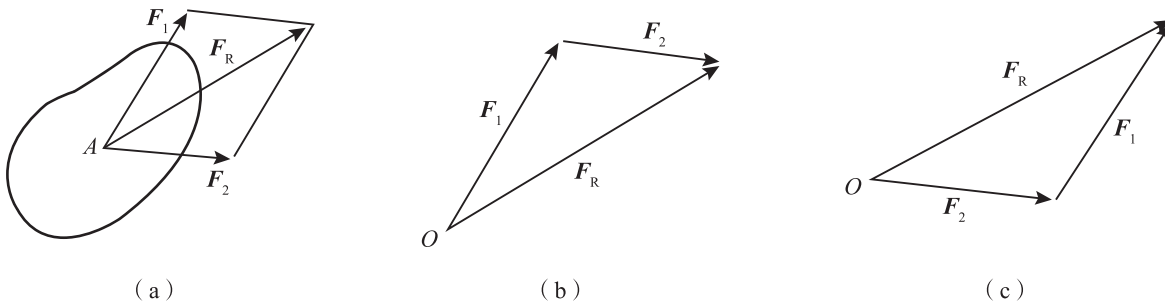


图 1-8 力的三角形法则

任务二 力对点之矩和合力矩定理

一、力矩

(一) 力矩的概念

如图 1-9 所示, 用扳手拧紧螺母时, 作用于扳手上的力 F 可使扳手与螺母一起绕螺母中心 O 转动。由经验可知, 力 F 使扳手绕 O 点的转动效应取决于力 F 的大小和 O 点到力的作用线的垂直距离 d 。这种转动效应可用力对点的矩来度量, 定义 Fd 为力 F 对点 O 之矩, 简称“力矩”, 用 $M_O(F)$ 表示。 O 点称为力矩中心, 简称“矩心”; d 称为力臂, 则力矩的计算公式为

$$M_O(F) = \pm Fd \quad (1-3)$$

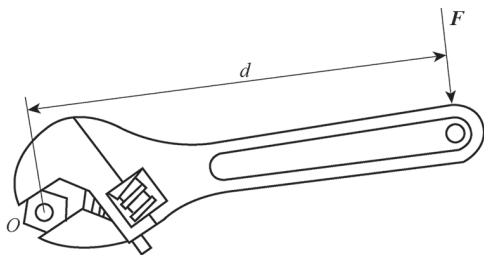


图 1-9 扳手

在平面上, 力矩的绝对值等于力的大小与力臂的乘积。力矩的正负号规定为: 当力使物体绕矩心逆时针方向转动时, 力矩取正号; 顺时针方向转动时, 力矩取负号。力矩的单位为 $\text{N}\cdot\text{m}$ 或 $\text{kN}\cdot\text{m}$ 。

应当注意: 一般来说, 同一个力对不同的点产生的力矩是不同的, 因此不指明矩心而求力矩是无任何意义的, 在表示力矩时必须标明矩心。

(二) 力矩的性质

从力矩的定义式 (1-3) 可知, 力矩有以下几个性质:

(1) 力 F 对 O 点之矩不仅取决于力 F 的大小, 同时还与矩心的位置即力臂 d 有关。同一个力对不同的矩心, 其力矩是不同的 (包括数值和符号都可能不同)。

(2) 当力的作用线通过矩心时, 力矩等于零。

显然互相平衡的两个力对于同一点之矩的代数和等于零。

二、合力矩定理

假设 F_R 是平面汇交力系 $F_1, F_2, \dots, F_n$ 的合力, 则 F_R 对任一点 O 之矩等于力系中各分力对同一点之矩的代数和, 即

$$M_o(F_R) = M_o(F_1) + M_o(F_2) + \cdots + M_o(F_n) = \sum_{i=1}^n M_o(F_i) \quad (1-4)$$

式 (1-4) 称为合力矩定理。

当力臂不容易求出时, 常将力分解为两个正交的分力, 然后应用合力矩定理计算力矩。



课堂试练

如图 1-10 所示的支架, 已知 $F=10 \text{ kN}$, $AD=DB=2 \text{ m}$ 。试求力 F 对 A 、 B 、 C 、 D 四点的力矩。

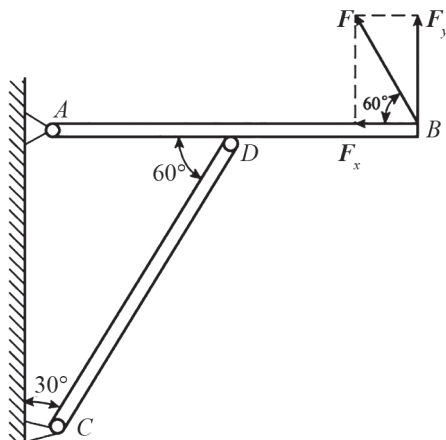


图 1-10 支架示意图

解: 由力矩定义得

$$M_A(F) = F \times d_{AB} \times \sin 60^\circ = 10 \text{ kN} \times 4 \text{ m} \times \sin 60^\circ \approx 34.6 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_D(F) = F \times d_{DB} \times \sin 60^\circ = 10 \text{ kN} \times 2 \text{ m} \times \sin 60^\circ \approx 17.3 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

力 F 的作用线通过 B 点, 所以

$$M_B(F) = 0 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

计算 $M_C(F)$ 时, 可用合力矩定理, 使计算简单化。将 F 沿竖直和水平方向分解为 F_y 、 F_x , 得

$$\begin{aligned} M_C(F) &= M_C(F_x) + M_C(F_y) \\ &= F \cos 60^\circ \times 2 \text{ m} \times \tan 60^\circ + F \sin 60^\circ \times 4 \text{ m} \\ &= 10 \text{ kN} \times \cos 60^\circ \times 2 \text{ m} \times \tan 60^\circ + 10 \text{ kN} \times \sin 60^\circ \times 4 \text{ m} \\ &\approx 51.96 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

任务三

力偶

一、力偶的概念

在生活及生产实践中, 经常见到一些物体同时受到大小相等、方向相反、作用线互相平行的两个力

作用的情况。例如，用手拧水龙头，作用在开关上的两个力 F 和 F' ，如图 1-11 (a) 所示；司机用双手转动方向盘时的作用力 F 和 F' ，如图 1-11 (b) 所示。像这样一对等值、反向、不共线的平行力组成的特殊力系，称为力偶，记作 (F, F') ，力偶中两个力的作用线所决定的平面称为力偶作用面，两个力的作用线之间的垂直距离称为力偶臂，用 d 表示。

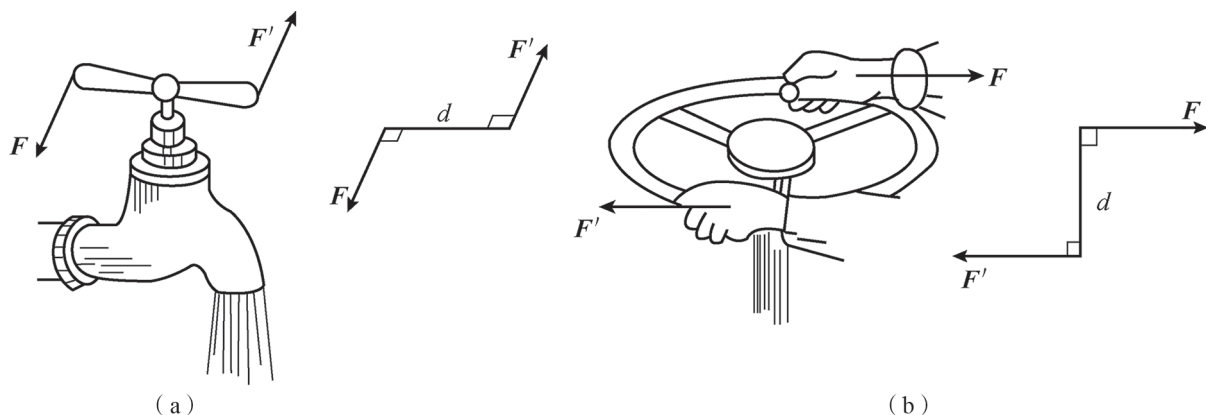


图 1-11 力偶示例

力偶对刚体的作用效应是只能使其转动。在力偶作用面内，力偶使物体转动的效应不仅与力 F 的大小有关，还与力偶臂 d 有关。用乘积 Fd 表示力偶使物体转动的效应，称为力偶矩，记作 $M(F, F')$ 或 M ，计算公式为

$$M(F, F') = M = \pm Fd \quad (1-5)$$

式中，符号“ $\pm$ ”表示力偶的转向，规定力偶使物体逆时针方向转动时力偶矩取正号，顺时针方向转动时力偶矩取负号，力偶矩单位和力矩单位相同，为 $\text{N}\cdot\text{m}$ 或 $\text{kN}\cdot\text{m}$ 。

二、力偶的性质

性质 1：力偶在任一轴上投影的代数和恒等于零，如图 1-12 所示，故力偶无合力，即力偶不能与一个力等效，也不能简化为一个力。

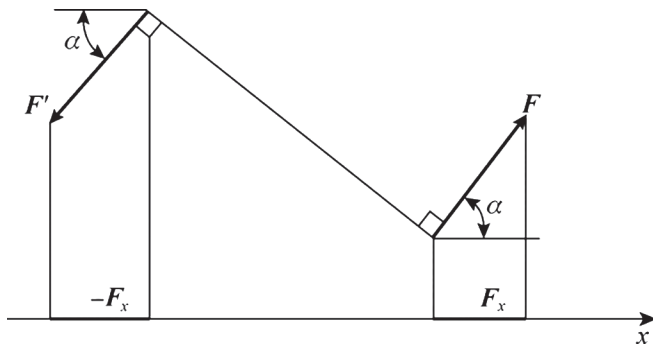


图 1-12 力偶的投影

性质 2：力偶对其作用平面内任一点的矩恒等于力偶矩，而与矩心位置无关。

证明：如图 1-13 所示，已知力偶 (F, F') 的力偶矩 $M = Fd$ 。在其作用面内任意取点 O 作为矩心，设点 O 到 F' 的垂直距离为 x ，则力偶 (F, F') 对 O 点之矩为

$$M_O(F) - M_O(F') = F(x+d) - F'x = Fd \quad (1-6)$$

所以力偶对任一点的矩等于它的力偶矩，与矩心位置无关。

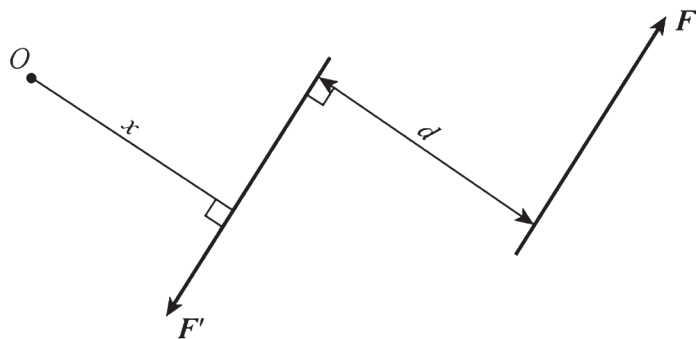


图 1-13 力偶矩示例

性质 3: 只要保持力偶矩的大小和转向不变, 力偶可以在其作用平面内任意移动和转动, 且可以任意改变力偶中力的大小和力偶臂的长短, 而不改变其对物体的作用效果。因此, 力偶可以用带箭头的弧线表示, 如图 1-14 所示。

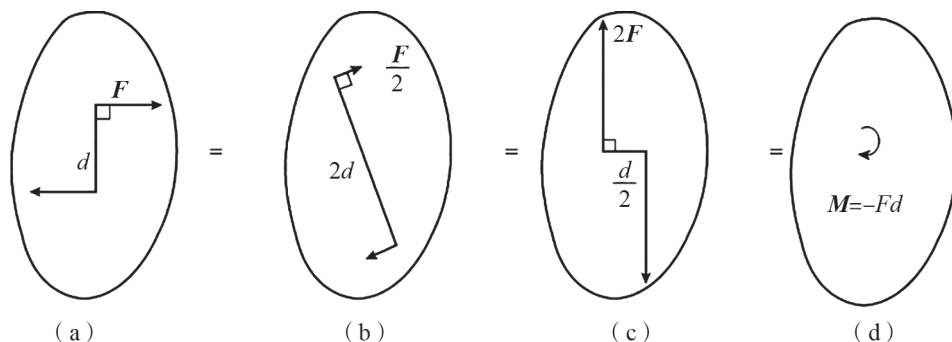


图 1-14 力偶表示法

三、平面力偶系的合成

作用在刚体同一平面内的 n 个力偶称为平面力偶系, 平面力偶系合成的结果为一个合力偶, 合力偶矩等于力偶系中各力偶矩的代数和, 即

$$M = M_1 + M_2 + \cdots + M_n = \sum_{i=1}^n M_i \quad (1-7)$$

任务四 物体受力分析

一、约束与约束反力

物体按照运动所限制条件的不同可以分为自由体与非自由体两类: 自由体是指物体在空间可以有任意方向的位移, 即运动不受任何限制, 如空中飞行的炮弹、飞机、人造卫星等; 非自由体是指在某些方向的位移受到一定限制而不能随意运动的物体, 如在轴承内转动的转轴、汽缸中运动的活塞等。对非自由体的位移起限制作用的周围物体称为约束, 例如, 铁轨对于机车, 轴承对于转轴, 吊车钢索对于重

物等，都是约束。

约束限制着非自由体的运动，与非自由体接触相互产生了作用力，约束作用于非自由体上的力称为约束反力。约束反力作用于接触点，其方向总是与该约束所能限制的运动方向相反，据此，可以确定约束反力的方向或作用线的位置。至于约束反力的大小却是未知的，可根据平衡方程求出。

二、常见约束类型及其约束反力

(一) 柔索约束

由绳索、链条、皮带等所构成的约束统称为柔索约束。这种约束的特点是柔软易变形，它给物体的约束反力只能是拉力。因此，柔索对物体的约束反力作用在接触点，方向沿柔索且背离物体，如图 1-15、图 1-16 所示。

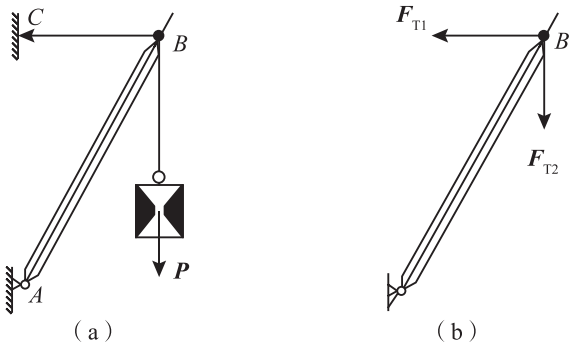


图 1-15 柔索约束示意图（一）

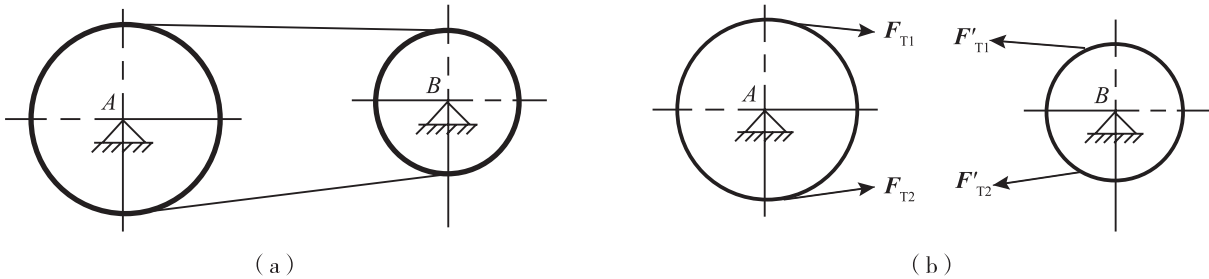


图 1-16 柔索约束示意图（二）

(二) 光滑接触面约束

物体受到光滑平面或曲面的约束称为光滑面约束。这类约束不能限制物体沿约束表面切线的位移，只能限制物体沿接触表面法线并指向约束的位移。因此，约束反力作用在接触点，方向沿接触表面的公法线，并指向被约束物体，如图 1-17、图 1-18 所示。

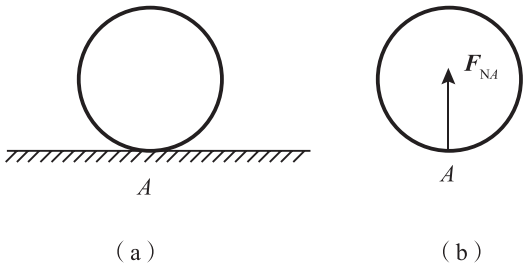


图 1-17 光滑接触面约束示意图（一）

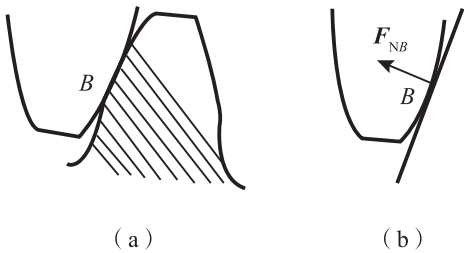


图 1-18 光滑接触面约束示意图（二）

(三) 光滑圆柱铰链约束

如图 1-19 (a)、(b) 所示, 在两个构件 A 、 B 上分别有直径相同的圆孔, 再将一直径略小于孔径的圆柱体销钉 C 插入该两构件的圆孔中, 将两构件连接在一起, 这种连接称为铰链连接, 两个构件受到的约束称为光滑圆柱铰链约束。受这种约束的物体, 只可绕销钉的中心轴线转动, 而不能相对销钉沿任意径向方向运动。这种约束实质是两个光滑圆柱面的接触, 如图 1-19 (c) 所示, 其约束反力作用线必然通过销钉中心并垂直圆孔在 D 点的切线, 约束反力的指向和大小与作用在物体上的其他力有关, 所以光滑圆柱铰链的约束反力的大小和方向都是未知的, 通常用大小未知指向任意假设的两个垂直分力表示, 如图 1-19 (d) 所示。光滑圆柱铰链的简图如图 1-19 (e) 所示。

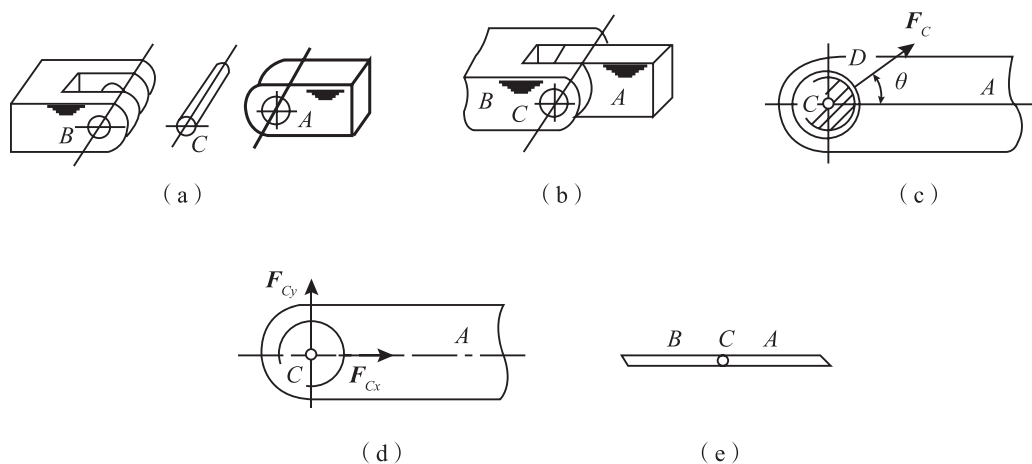


图 1-19 光滑圆柱铰链的简图

(四) 固定铰支座

固定铰支座可认为是光滑圆柱铰链约束的演变形式, 两个构件中有一个固定在地面或机架上, 如图 1-20 (a) 所示, 其结构简图如图 1-20 (b) 所示。这种约束的约束反力的作用线也不能预先确定, 可以用大小未知的两个垂直分力表示, 如图 1-20 (c) 所示。

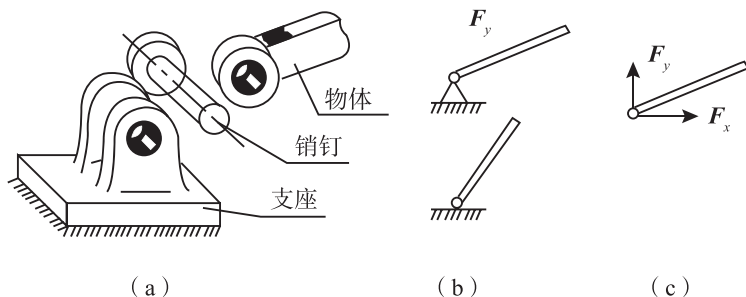


图 1-20 固定铰支座结构简图

(五) 滚动铰支座

在桥梁、屋架等工程结构中经常采用滚动铰支座, 如图 1-21 (a) 所示。这种支座可以沿固定面滚动, 常用于支承较长的梁, 它允许梁的支承端沿支承面移动, 其结构简图如图 1-21 (b) 所示。因此, 这种约束的特点与光滑接触面约束相同, 约束反力垂直于支承面指向被约束物体, 如图 1-21 (c) 所示。

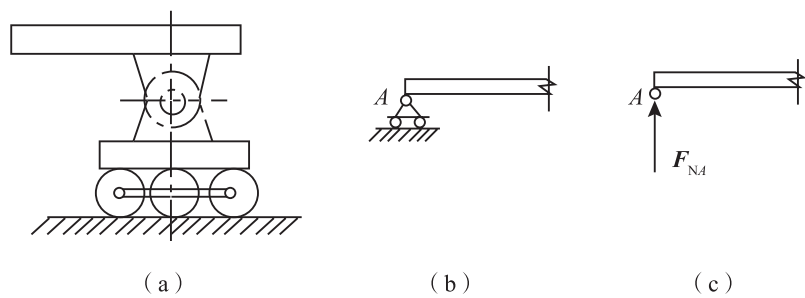


图 1-21 滚动铰支座结构示意图

(六) 球形铰支座

物体的一端为球体，能在球壳中转动，如图 1-22 (a) 所示，这种约束称为球形铰支座，简称“球铰”，其结构简图如图 1-22 (b) 所示。球铰能限制物体任何径向方向的位移，所以球铰的约束反力的作用线通过球心并可能指向任一方向，通常用过球心的 3 个互相垂直的分力 F_{Ax} 、 F_{Ay} 、 F_{Az} 表示，如图 1-24 (c) 所示。

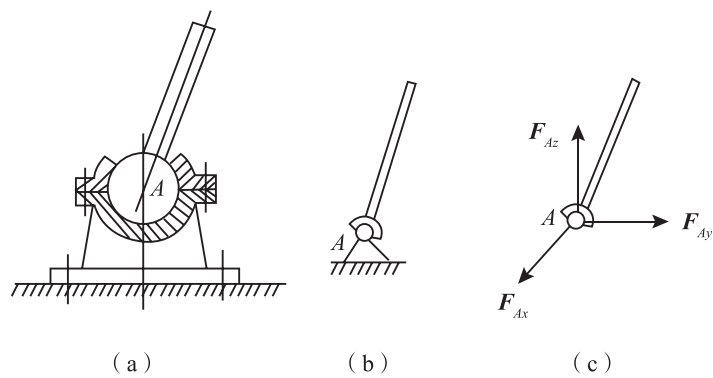


图 1-22 球形铰支座结构示意图

(七) 轴承

轴承是机械中常见的一种约束，常见的轴承有两种形式：一种是径向轴承，如图 1-23 (a) 所示，它限制转轴的径向位移，并不限制转轴的轴向运动和绕轴转动，其性质和圆柱铰链类似，如图 1-23 (b) 所示为其示意简图，径向轴承的约束反力用两个垂直于轴长方向的正交分力表示，如图 1-23 (c) 所示；另一种是径向止推轴承，它既限制转轴的径向位移，又限制它的轴向运动，只允许绕轴转动，其约束反力用 3 个大小未知的正交分力表示，如图 1-24 所示。

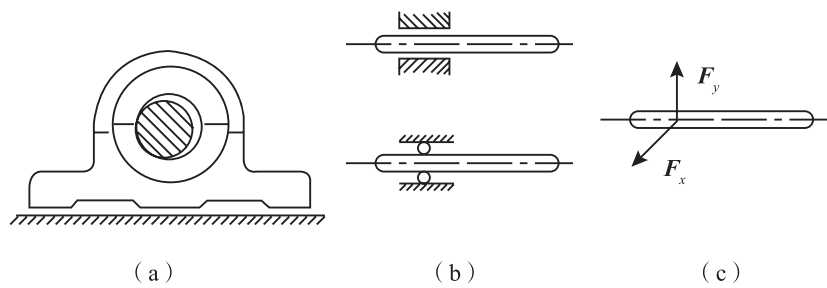


图 1-23 径向轴承示意简图

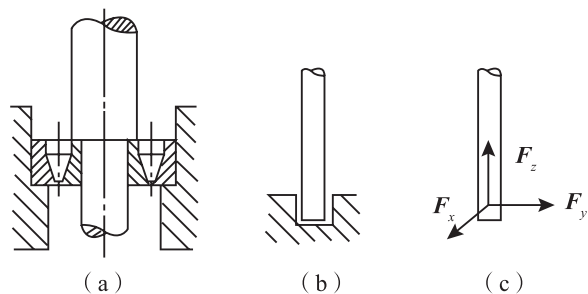


图 1-24 径向止推轴承示意简图

(八) 固定端约束

有时物体会受到完全固结作用，如深埋在地里的电线杆，如图 1-25 (a) 所示。这时物体的 A 端在空间各个方向上的运动（包括平移和转动）都受到限制，这类约束称为固定端约束，其简图如图 1-25 (b) 所示。其约束反力可这样理解：一方面，物体受约束部位不能平移，因而受到一约束反力 F_A 作用；另一方面，也不能转动，因而还受到一约束反力偶 M_A 的作用，如图 1-25 (c) 所示。约束反力 F_A 和约束反力偶 M_A 均作用在接触部位，而方位和指向均未知，对平面情形，则只需画出 3 个独立分量 F_{Ax} 、 F_{Ay} 、 M_A ，如图 1-25 (d) 所示。

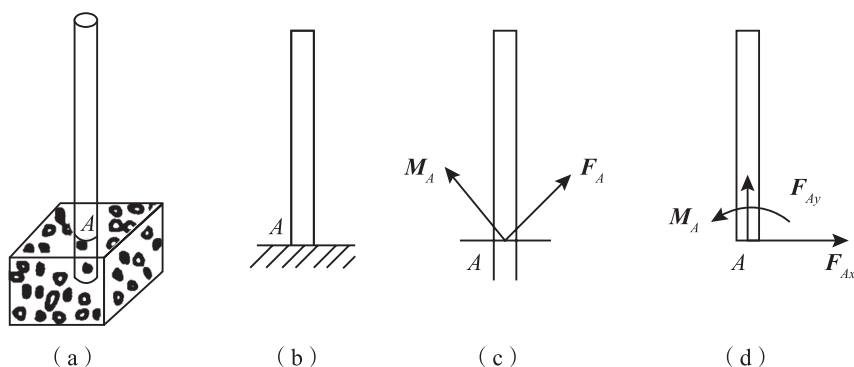


图 1-25 固定端约束示意图

(九) 二力杆约束

两端用光滑铰链与其他物体连接，中间不受力且不计自重的杆件，即为二力杆。二力杆两端所受的两个力大小相等、方向相反，作用线沿着两铰接点的连线，至于二力杆受拉还是受压则可假设。图 1-26 (a) 的结构中，杆件 AB 、 CD 为二力杆，其受力如图 1-26 (b) 所示。

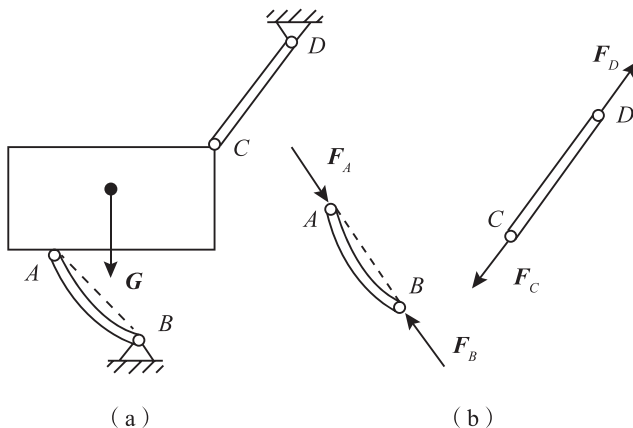


图 1-26 二力杆约束示意图

三、物体受力分析

将所研究的物体或物体系统从与其联系的周围物体或约束中分离出来，并分析它受几个力作用，确定每个力的作用位置和力的作用方向，这一过程称为物体受力分析。物体受力分析过程包括如下两个主要步骤：

(1) 确定研究对象，取出分离体。

待分析的某物体或物体系统称为研究对象。明确研究对象后，需要解除它受到的全部约束，将其从周围的物体或约束中分离出来，单独画出相应简图，这个步骤称为取分离体。

(2) 画受力图。

在分离体图上，画出研究对象所受的全部主动力和所有去除约束处的约束反力，并标明各力的符号及受力位置符号。

这样得到的表明物体受力状态的简明图形，称为受力图。



将物体所受的全部主动力与约束反力以力的矢量形式表示在分离体上，这样得到的图形称为研究对象的受力图。

一、绘画步骤

画受力图的步骤如下：

(1) 确定研究对象。

按照问题的条件和要求，确定所研究的对象（它可以是一个物体，也可以是几个物体的组合或整个物体系统），解除研究对象的约束，用简单几何图形表示出其形状特征。

(2) 画主动力。

画出研究对象所受的全部主动力，如重力、风载、水压、油压、电磁力等。

(3) 画约束反力。

在解除约束的地方，根据约束的不同类型，画出约束反力（用约束反力来代替约束的作用）。

(4) 准确标注各力相应的符号和作用点的字母。

(5) 检查是否有多画、漏画或画错的力。

二、注意事项

解题须知：

(1) 画受力图时，先画主动力，然后在解除约束处画约束反力。必须清楚每个力的施力物体是何物。

本书题目中没有说明或原图中未画出重力的就是不计重力，凡没有提及摩擦时，接触面视为光滑。

(2) 要善于分析二力平衡物体的受力方向, 并正确应用三力平衡汇交定理分析三力平衡刚体的受力特点。

(3) 一对作用力和反作用力要用同一字母, 并在其中一个力的字母上加上“'”以示区别。作用力的方向确定了, 反作用力的方向就不能随便假设, 一定要符合作用与反作用公理。

三、例题分析

1. 例题一

重量为 G 的梯子 AB 一端放置在光滑的水平地面上, 另一端靠在铅直墙上, 在 D 点用一根水平绳索将其与墙相连, 如图 1-27 (a) 所示。试画出梯子的受力图。

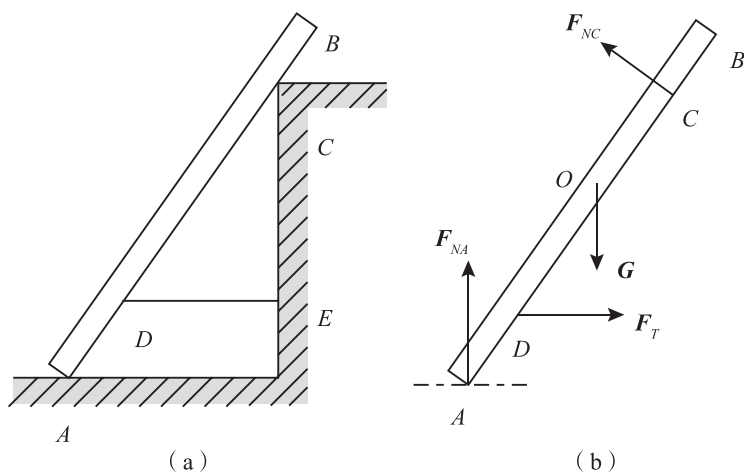


图 1-27 梯子及其受力图

分析: 梯子所受重力为主动力, 除此之外, 梯子与外界有 A 、 C 、 D 三个接触点, 且每一个接触点都存在约束反力。

解:

(1) 将梯子从周围约束中分离出来, 作为分离体。

(2) 画出主动力, 即梯子所受重力 G , 作用于梯子的重心 (几何中心), 方向铅直向下。

(3) 画墙和地面对梯子的约束反力。根据光滑接触面约束的特点, A 、 C 处的约束反力 F_{NA} 、 F_{NC} 分别与地面、梯子垂直并指向梯子。

(4) D 点绳索的约束反力 F_T 应沿着绳索的方向并背离梯子。

梯子受力图如图 1-27 (b) 所示。

本题要点:

(1) 梯子为分离体。

(2) 一般先画主动力, 本题中梯子所受重力 G 是主动力。

(3) A 、 C 两处为光滑面约束, 其约束反力可以直接画出方向。

(4) D 处为柔性体约束, 其约束反力也可以直接画出方向。

2. 例题二

如图 1-28 (a) 所示, 梁 AB 在中点 C 处受到集中力 F 的作用, A 端为固定铰链支座约束, B 端为活动铰链支座约束。试画出梁的受力图 (梁自重忽略不计)。

分析: 梁 AB 为三力构件, F 为主动力, A 、 B 两点为铰链约束。

解：

(1) 取梁 AB 为研究对象，解除 A 、 B 两处的约束，画出其分离体简图。

(2) 在梁的中点 C 画出主动力 F 。

(3) 在受约束的 A 处和 B 处，根据约束类型画出约束反力。 B 处为活动铰链支座约束，其约束反力通过铰链中心且垂直于支承面； A 处为固定铰链支座约束，其约束反力可用通过铰链中心且相互垂直的分力 F_{Ax} 、 F_{Ay} 表示。

梁的受力图如图 1-28 (b) 所示。

注意：

梁只在 A 、 B 、 C 三点受到互不平行的三个力的作用而处于平衡，因此，也可以根据三力平衡汇交定理进行受力分析。已知 F 、 F_B 相交于 D 点，则 A 处的约束反力 F_A 也应通过 D 点，从而可确定 F_A 必在过 A 、 D 两点的连线上，可画出如图 1-28 (c) 所示的受力图。

本题要点：

(1) 梁是分离体。

(2) 集中力 F 是主动力。

(3) A 处为固定铰链支座约束， B 处为活动铰链支座约束。

(4) B 处活动铰链支座的约束反力只能确定方位，其指向是假设的。

(5) A 处的约束反力一般用 F_{Ax} 、 F_{Ay} 两个相互垂直的分力表示，如图 1-28 (b) 所示，特殊情况下也可以确定其方位，如图 1-28 (c) 所示。

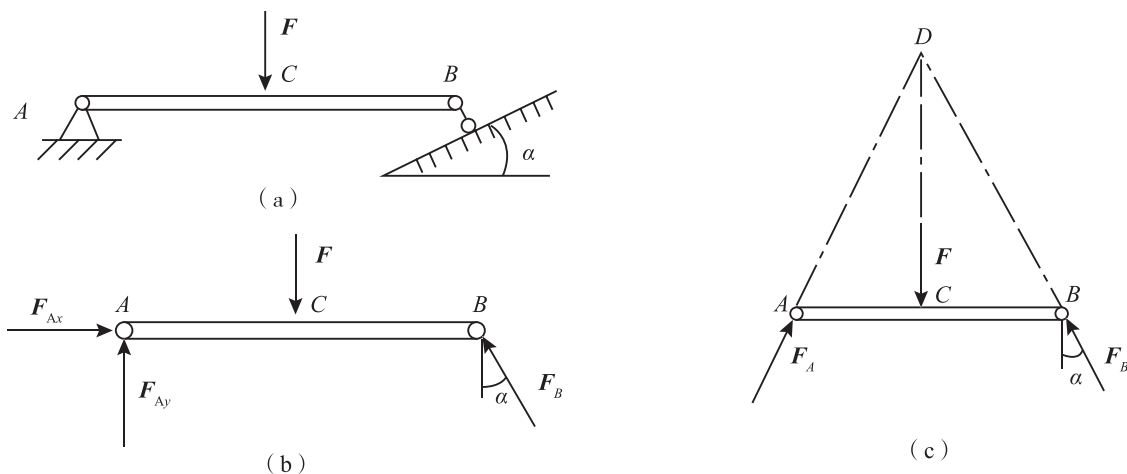


图 1-28 梁及其受力图



项目小结

1. 三个基本概念

(1) 力。

力是物体间的相互作用，力是矢量，力对物体作用的效应取决于力的大小、方向和作用点三个要素。

(2) 刚体。

刚体是在力的作用下形状和大小都保持不变的物体。

(3) 平衡。

平衡是指物体相对于地球保持静止或做匀速直线运动的状态。

2. 四个公理

(1) 作用与反作用公理。

它阐明了力是两个物体间的相互作用，确定了力在物体之间的传递关系。

(2) 二力平衡公理。

它阐明了作用在一个物体上的最简单力系——共线力系的平衡条件。

(3) 加减平衡力系公理。

它阐明了任意力系等效代换的条件。

(4) 力的平行四边形公理。

它阐明了作用在一个物体上的两个力的合成规则。

3. 两个推论

(1) 力的可传性原理。

它论证了力在刚体上沿作用线的可传递性，说明了在刚体静力学中力是滑移矢量。

(2) 三力平衡汇交定理。

它论证了作用于物体同一平面内的三个互不平行的力平衡的必要条件，即三力必汇交于一点。

三力平衡汇交定理的适用性：作用于物体同一平面内的三个力汇交，并不一定使物体平衡。

4. 画物体受力图

(1) 工程中常见约束反力的画法。

方向可以确定的约束有柔性体约束和光滑面约束，方位可以确定的约束有活动铰链支座约束，方向不能直接确定的约束有中间铰链约束和固定铰链支座约束。

(2) 画受力图的步骤。

先确定研究对象并画出分离体图，再分析研究对象的约束类型及约束反力的方向、作用点，然后在分离体上画出所有的主动力和约束反力，并用正确的符号表示出来。



思政园地

当遇到学习困难时，要有自信心、耐心和毅力。信心来源于对知识的掌握，耐心和毅力来源于对终极目标的坚持。就像用小力推动大石块，持之以恒地推动终会见成效。学习是一个循序渐进的过程，重在坚持。

希望通过学习静力学，我们不仅能掌握知识技能，更能培养个人科学严谨的学习态度、理论联系实际的科学精神、团队合作精神，以及自信坚毅等品质。这将使我们在今后的学习和生活中能更好地发挥主观能动性，成为拥有全面知识和健康人格的栋梁之材。



实训提升

任务实训——静力学场景模拟

【实训目标】

通过模拟静力学问题中的各种受力场景，加深对静力学基本概念和基本原理的理解，提高空间想象

能力。

【实训步骤】

- (1) 分组准备所需场景元素，包括支架、木块、绳索、砝码等。
- (2) 根据不同静力学场景要求，搭建简单的受力结构。

场景包括：

- 平衡的天平；
- 倾斜的简单梯形；
- 用绳索悬挂的重物；
- 不同支撑方式的横梁等。

- (3) 在搭建每个场景后，讨论并解释受力原理，绘制受力图。

- (4) 改变场景中某些因素，观察结构的平衡状况变化。
- (5) 尝试计算场景中各种受力参数。
- (6) 每组展示自己搭建的场景并讲解受力原理。

【实训评价】

请各组选出一名代表展示任务实施的成果，并配合指导老师完成表 1-1 所列的任务评价表。

表 1-1 任务评价表

项目名称	评价内容	分值 / 分	评价分数		
			自评	互评	师评
职业素养考核项目 (30%)	考勤、仪容仪表	10			
	责任意识、纪律意识	10			
	团队合作与交流	10			
专业能力考核项目 (70%)	积极参与教学活动并正确理解实训要求	10			
	对静力学基本概念的理解程度	20			
	绘画受力图的能力	20			
	分析受力状况的能力	20			
合计: 综合分数_____ 自评(20%) + 互评(20%) + 师评(60%)		100			
综合评语		教师(签名):			



课堂试练

一、选择题

- 在两力平衡情况下, 以下关于两力的叙述中, 正确的是()。
 - 两力大小相等, 方向相同
 - 两力大小相等, 方向相反
 - 两力作用在不同物体上
 - 两力作用线不一定在同一条直线上
- 作用在物体上的两个力 F_1 和 F_2 , 构成一个力偶, 则以下关于该力偶的说法正确的是()。
 - F_1 和 F_2 的大小相等, 方向相同
 - F_1 和 F_2 的大小相等, 方向相反
 - F_1 和 F_2 的作用线在同一条直线上
 - F_1 和 F_2 能够合成一个等效合力
- 在受力图中, 约束反力通常()。
 - 先确定大小, 然后确定方向
 - 先确定方向, 然后计算大小
 - 大小和方向都可以直接确定
 - 大小和方向都无法直接确定

二、填空题

- 在力的作用下, 物体的形状和尺寸不发生变化的物体称为_____。
- 当一个力使物体产生逆时针转动时, 这个力对某一点的力矩为_____值。
- 平面内 n 个力偶叠加所得的合力偶, 其力偶矩等于_____。

三、计算题

1. 门式刚架如图 1-29 所示，在 B 点受一水平力 $F=20\text{ kN}$ ，不计刚架自重，求支座 A 、 D 的约束力。

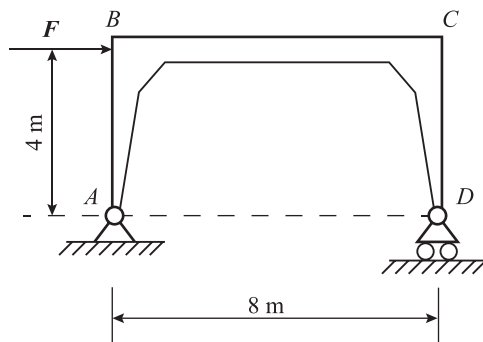


图 1-29 门式刚架图

2. 刚体上 A 点作用四个平面汇交力，如图 1-30 所示，已知 $F_1=100\text{ N}$ ， $F_2=100\text{ N}$ ， $F_3=150\text{ N}$ ， $F_4=200\text{ N}$ ，试用解析法求合力。

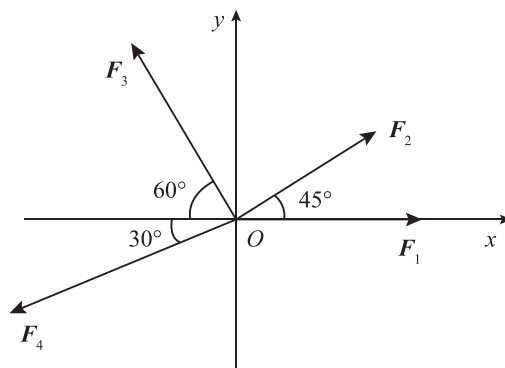


图 1-30 刚体平面汇交力图示



项目二

平面力系与空间力系的简化和平衡



项目概述

本项目主要包括平面力系和空间力系的简化分析方法、平衡条件与平衡方程推导。

◆ 项目内容

任务一：介绍平面一般力系的简化方法，包括力的平移定理、主矢量和主矩的概念、固定端约束分析等。

任务二：介绍空间力系相关内容，包括力在空间坐标轴上的投影方法、力对轴的矩、空间力系的简化与平衡方程等。

通过完成这两个任务的学习，可以掌握平面力系与空间力系的简化分析方法，并进行平衡方程的推导。这可为后续课程的学习奠定基础。



学习目标

◆ 知识目标

1. 掌握平面力系的简化方法。
2. 理解平面力系平衡方程的推导。
3. 理解空间力系投影与简化方法。

4. 掌握空间力系平衡方程的推导。

◆能力目标

- 1. 能简化平面一般力系。
- 2. 能建立并求解平面力系平衡方程。
- 3. 能求解空间力系投影问题。
- 4. 能简化空间一般力系。
- 5. 能建立并求解空间力系平衡方程。

◆素质目标

- 1. 培养逻辑思维能力。
- 2. 培养团队合作与交流能力。
- 3. 培养工程问题建模与求解能力。

任务工单

学习项目	知识点	知识点难易度
平面力系的简化和平衡	强调掌握平面力系的简化方法，包括力的平移定理、主矢量和主矩等概念	★★★★
	重点介绍平面力系的平衡条件与各种形式的平衡方程	★★★★
	通过典型案例分析平面力系简化应用	★★
空间力系的简化和平衡	介绍空间力系在坐标轴上的投影方法	★★
	阐述力对轴的矩及合力矩定理	★★★
	描述空间力系的简化过程与平衡方程	★★★
	分析空间约束条件下的平衡问题	★★★★

任务一

平面一般力系



一、力的平移定理

根据力的可传递性，作用在刚体上的力沿其作用线移动时，不会改变力对刚体的作用效应。但是，如果将作用在刚体上的力从一点平行移动到另一点，力对刚体的作用效应将发生改变。如图 2-1 所示，当力 F 通过刚体的重心 C 时，刚体只发生移动。若将力 F 平行移动到刚体上任一点 D 时，则刚体既发生移动，又发生转动，即作用效果发生改变。

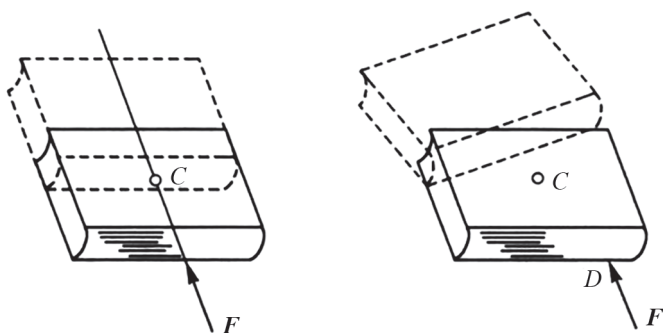


图 2-1 力的平移

若要使作用在刚体上的力平行移动后作用效果不发生变化，则可利用力的平移定理。

(一) 力的平移定理

作用在刚体上的力可以平行移动到刚体内任一点，但同时必须附加一个力偶。附加力偶的力偶矩等于原力对平移点之矩。

(二) 定理证明

设力 F 作用于刚体上 A 点，如图 2-2 (a) 所示。欲将力 F 平移到刚体内任一点 O ，可在 O 点加一对大小相等、方向相反且与 F 平行的平衡力 F' 和 F'' ，并使这一对力的数值与 F 数值相等，如图 2-2 (b) 所示。由加减平衡力系公理可知，这三个力与原力 F 等效。力 F 和 F'' 组成一力偶，称为附加力偶，其力偶臂为 d 。在附加力偶的力偶矩 M 等于力 F 对 O 点之矩，即

$$M = M_O(F) = \pm Fd \quad (2-1)$$

这样，作用于 A 点的力 F 可以由作用于 O 点的力 F' 和附加力偶 M 来代替，如图 2-2 (c) 所示。

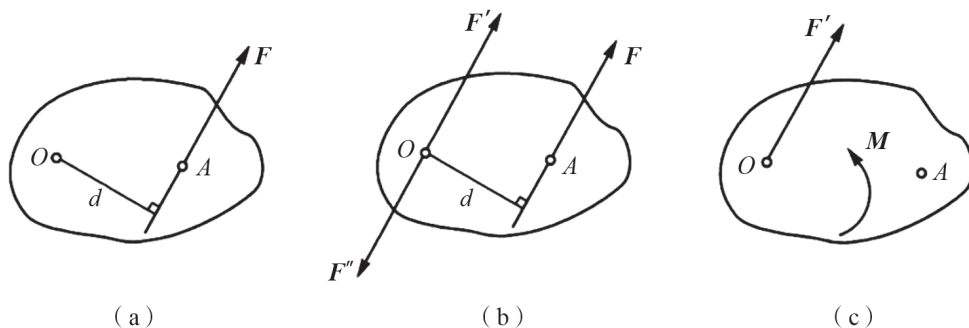


图 2-2 力的证明

力的平移定理是力系简化的理论基础，也可以用来分析解决工程实际中的力学问题。例如，图 2-3 所示厂房立柱受偏心载荷的作用，为观察力 F 的作用效应，可将力 F 平移至柱的轴线上成为力 F' 和力偶矩为 M 的力偶，轴向力 F' 使立柱压缩，而力偶 M 使立柱弯曲。又如，钳工用丝锥攻螺纹时，如果用单手操作，在手柄施加作用力 F ，如图 2-4 所示。将力 F 平移到铰杠中心时，就形成力 F' 和力偶矩为 M 的力偶。力偶虽然可以使丝锥转动，但力 F' 很容易造成丝锥折断。如果用双手操作，两手握住手柄两端，均匀用力，形成力偶，就不会折断丝锥。

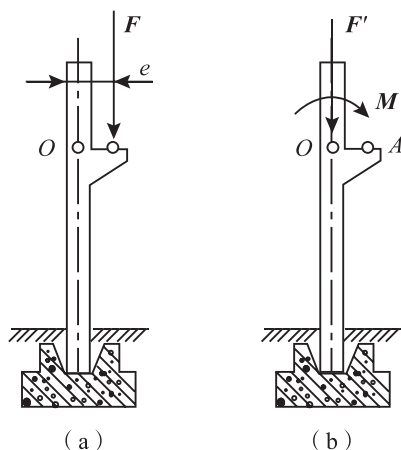


图 2-3 厂房立柱受偏心载荷的作用

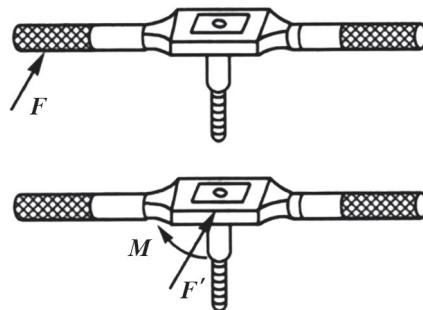


图 2-4 手柄作用力示意图

二、平面一般力系的简化

(一) 简化过程

设在刚体上作用平面一般力系 $F_1, F_2, \dots, F_n$, 如图 2-5 (a) 所示。在平面内任取一点 O , 称为简化中心。利用力的平移定理, 将各力向 O 点平移, 每平移一个力, 加入相应的附加力偶。这样, 原力系简化成汇交于 O 点的平面汇交力系 $F'_1, F'_2, \dots, F'_n$ 和力偶矩为 $M_1, M_2, \dots, M_n$ 的平面力偶系, 如图 2-5 (b) 所示。其中

$$F'_1 = F_1, F'_2 = F_2, \dots, F'_n = F_n$$

$$M_1 = M_O(F_1), M_2 = M_O(F_2), \dots, M_n = M_O(F_n)$$

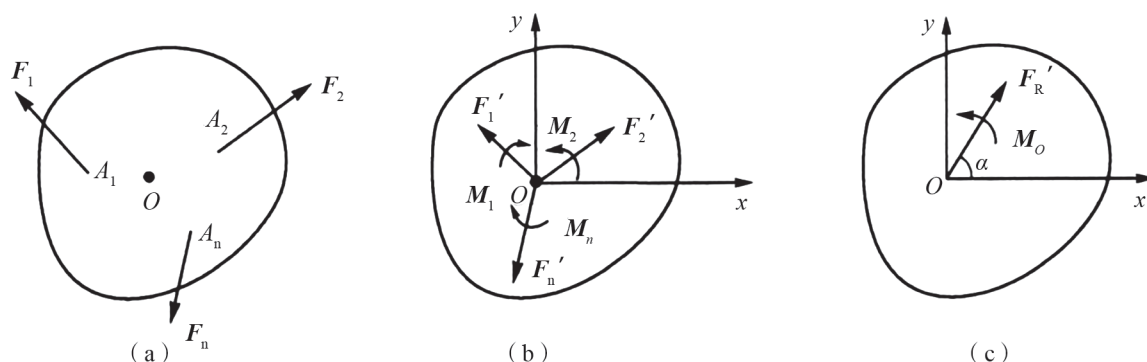


图 2-5 刚体上作用平面一般力系示意图

平面汇交力系可合成一个力 F_R' , 作用于简化中心, 等于所有汇交力系的矢量和, 如图 2-5 (c) 所示, 即

$$F_R' = F'_1 + F'_2 + \dots + F'_n = \sum F' = \sum F \quad (2-2)$$

附加力偶系可以合成一个合力偶, 其力偶矩用 M_O 表示, 等于所有附加力偶矩的代数和。即

$$M_O = M_1 + M_2 + \dots + M_n = \sum M_O(F) \quad (2-3)$$

(二) 主矢和主矩

以上结果表明, 原平面一般力系等效于力矢 F_R' 和力偶矩 M_O 的共同作用。其中 F_R' 等于原力系中各力的矢量和, 称为原力系的主矢。力偶矩 M_O 等于原力系中各力对简化中心矩的代数和, 称为原力系对简

化中心的主矩。

由上述分析可得结论：平面一般力系向其作用平面内任一点简化，一般可以得到一个力和一个力偶。此力作用于简化中心，其大小和方向等于原力系的主矢；此力偶的力偶矩等于原力系对于简化中心的主矩。

因而，平面一般力系向一点简化，可归结为求力系的主矢和主矩。主矩的计算可由式（2-3）直接求出，计算主矢一般采用解析法。在力系作用平面内建立直角坐标系 Oxy ，则

$$F'_{Rx} = \sum F_x \quad F'_{Ry} = \sum F_y \quad (2-4)$$

主矢的大小和方向分别为

$$F'_R = \sqrt{(F'_{Rx})^2 + (F'_{Ry})^2} = \sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2}$$

$$\tan \alpha = \left| \frac{\sum F_y}{\sum F_x} \right| \quad (2-5)$$

其中， α 是主矢 F'_R 与 x 轴所夹的锐角。

力系的主矢和主矩是力系的两个基本特征量。必须指出，力系的主矢和力系的合力是两个不同的概念。主矢是力系经矢量运算后得到的一几何量，主矢只有大小和方向，但并不涉及作用点，为自由矢。而力系的合力则是一物理量，它具有与原力系等效的意义，除了大小和方向之外，还需指明作用点（或作用线），为定位矢量（或滑动矢量）。凡力系必有主矢，但却未必有合力。如一力偶，主矢为零，但力偶无合力。

由于主矢等于原力系中各力的矢量和，因此，主矢与简化中心的位置无关。而主矩等于各力对简化中心之矩代数和，取不同的点作为简化中心时，各力的力臂有所改变，因而各力对简化中心的矩也要改变。所以，主矩与简化中心的位置有关，凡提到主矩必须指明简化中心。

（三）固定端约束

现应用平面力系简化方法介绍一种比较复杂的约束，即固定端约束。

固定端约束是工程中一种常见的约束。图 2-6（a）中嵌入墙体的阳台，图 2-6（b）中固定在刀架上的车刀，图 2-6（c）中埋入地下的电线杆等所受的约束都属于固定端约束。

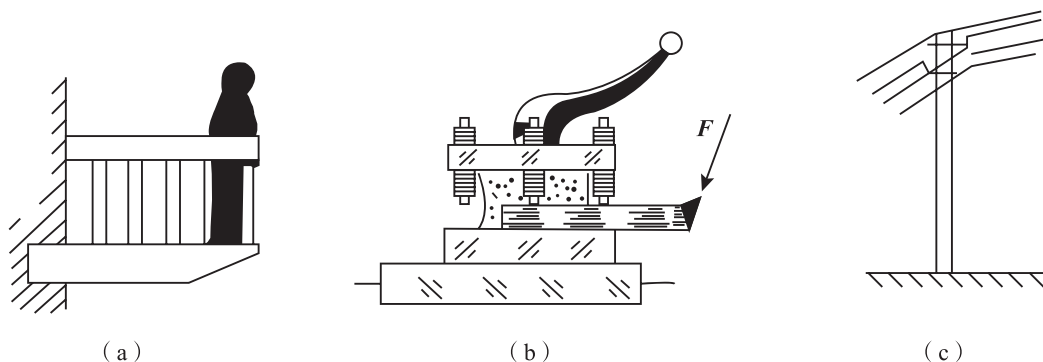


图 2-6 固定端约束工程示意图

以上固定端约束的实例可简化为一杆插入固定端面的力学模型，如图 2-7（a）所示。在主动力的作用下，杆嵌入部分各点所受到的约束力的大小方向各异，组成一平面一般力系，如图 2-7（b）所示。将该力系向 A 点简化，得到一约束力 F_A 和矩为 M_A 的力偶。力 F_A 通常用正交分力 F_{Ax} 、 F_{Ay} 表示，如图 2-7（c）所示。故一般情况下，固定端的约束力可用一组正交约束力和一个约束力偶来表示。其中，约束力限制了物体沿任何方向的移动，约束力偶限制了物体的转动。

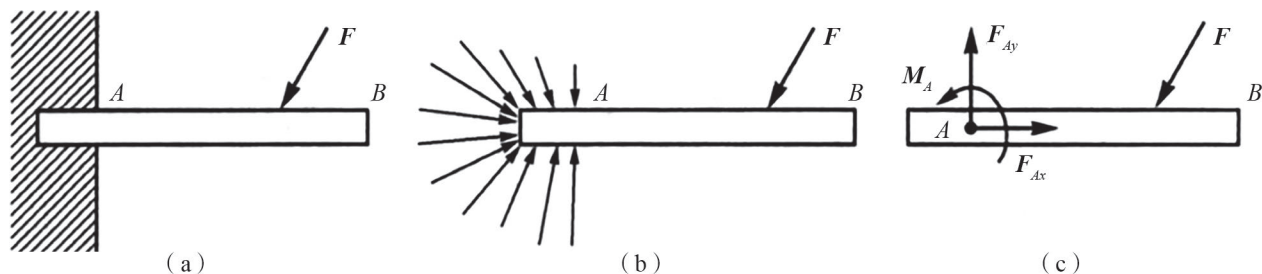


图 2-7 固定端约束力学模型示意图

(四) 平面一般力系简化结果分析

平面一般力系向一点简化，一般可得一个力和一力偶，随着主矢和主矩数值不同，将有四种不同的简化结果。

(1) $F_R' = 0, M_O \neq 0$: 力系简化为一力偶。

其力偶矩 $M_O = \sum M_O(F)$ ，原力系与一力偶等效，此时主矩与简化中心无关。

(2) $F_R' \neq 0, M_O = 0$: 力系简化为一力。

原力系与作用于简化中心的一个力等效，即原力系合成一个合力，其合力矢等于力系的主矢，即 $F_R' = \sum F$ 。

(3) $F_R' \neq 0, M_O \neq 0$: 最终简化结果为一力。

根据力的平移定理的逆过程，可将作用于 O 点的力 F_R' 和矩为 M_O 的力偶进一步合成为一个合力，合成过程如图 2-8 所示。

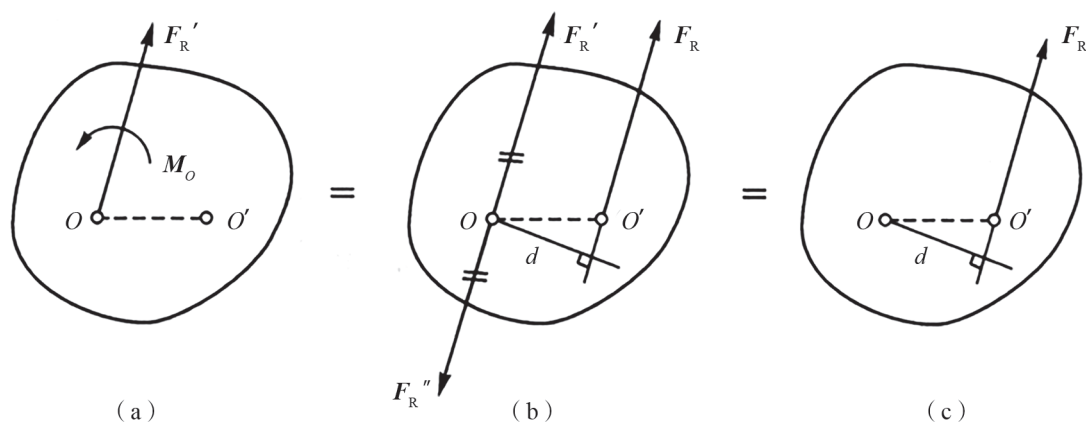


图 2-8 合成过程示意图

合力的大小和方向和 F_R' 相同，即

$$F_R = F_R'$$

合力 F_R 的作用线到简化中心 O 的距离为

$$d = \left| \frac{M_O}{F_R} \right| = \left| \frac{M_O}{F_R'} \right|$$

(4) $F_R' = 0, M_O = 0$ 力系平衡

三、平面一般力系的平衡方程

(一) 平面一般力系的平衡条件与平衡方程

平面一般力系向作用面内一点简化，一般可得到一个力和一力偶，如果主矢和主矩等于零，则平面

一般力系必平衡；反之，如果平面一般力系平衡，则主矢和主矩等于零。因此，平面一般力系平衡的必要和充分条件是：力系的主矢和力系对作用面内任一点的主矩都等于零。

即

$$F_R' = \sum F = 0, \quad M_O = \sum M_O(F) \quad (2-6)$$

因此平面一般力系平衡的平衡方程为

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum M_O(F) = 0 \quad (2-7)$$

即平面一般力系平衡的必要和充分的解析条件是：力系中各力在作用面内任选的两个坐标轴上投影的代数和分别等于零，各力对作用面内任一点的矩的代数和等于零。

式(2-7)中包括两个投影方程和一个力矩方程，可求解三个未知量。

(二) 平衡方程的其他形式

1. 二力矩式

$$\sum F_x = 0, \quad \sum M_A(F) = 0, \quad \sum M_B(F) = 0 \quad (2-8)$$

其中， A 、 B 为平面内任意两点，但其连线不垂直 x 轴，读者可自行证明。

2. 三力矩式

$$\sum M_A(F) = 0, \quad \sum M_B(F) = 0, \quad \sum M_C(F) = 0 \quad (2-9)$$

其中， A 、 B 、 C 三点不能共线，读者可自行证明。

(三) 平面平行力系的平衡方程

力系中各力的作用线在同一平面内且相互平行的力系，称为平面平行力系。平面平行力系是平面一般力系的特殊情况，其平衡方程可由平面一般力系的平衡方程直接导出。

取 x 轴与力系中各力的作用线垂直，如图 2-9 所示，则式 $\sum F_x = 0, \sum F_y = 0, \sum M_O(F) = 0$ 中的第一式成为恒等式，即 $\sum F_x \equiv 0$ 。故平面平行力系的平衡方程为

$$\sum F_y = 0, \quad \sum M_O(F) = 0 \quad (2-10)$$

平面平行力系的平衡方程也有二力矩式，即

$$\sum M_A(F) = 0, \quad \sum M_B(F) = 0 \quad (2-11)$$

其中， A 、 B 连线与各力作用线不平行。

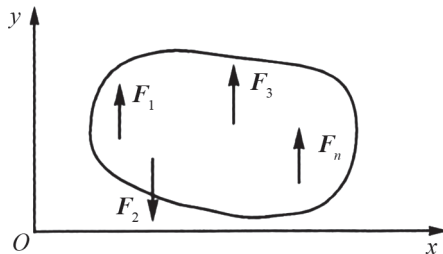


图 2-9 平面平行力系的平衡方程

四、物体系统的平衡

实际工程结构大都是由若干物体通过一定约束组合起来的系统，称为物体系统，简称“物系”。系

统外的物体作用于系统上的力，称为系统的外力；系统内部各物体间相互作用的力称为系统的内力。

当整个物体系统平衡时，其中每一个物体必定平衡。因而在求解时可取整个系统为研究对象，也可取单个物体或部分物体的组合为研究对象。由于内力总是成对出现的，在研究整个系统平衡时，可不考虑内力。若单独研究系统中某个物体的平衡，系统的内力转变为单个物体的外力，则需要考虑。对于 n 个物体组成的物体系统，若每个物体均受平面一般力系作用，则可建立 $3n$ 个独立的平衡方程，即可求解 $3n$ 个未知量。若系统中的物体有受平面汇交力系作用或平面平行力系的作用时，则独立的平衡方程数目相应地减少。

不论是单个物体还是物体系统的平衡，若未知量的数目等于或少于独立的平衡方程的数目，全部未知量都能由静力平衡方程求出，这类问题称为静定问题。在实际工程结构中，为了提高结构的安全可靠性，常常在结构上加上一些约束，从而使作用在刚体上未知量的数目多于独立的平衡方程数目，因而仅用静力平衡方程不能求出全部未知量，这类问题称为静不定问题或超静定问题。例如，图 2-10 (a)、(b) 所示为静定结构，图 2-11 (a)、(b) 所示为静不定结构。

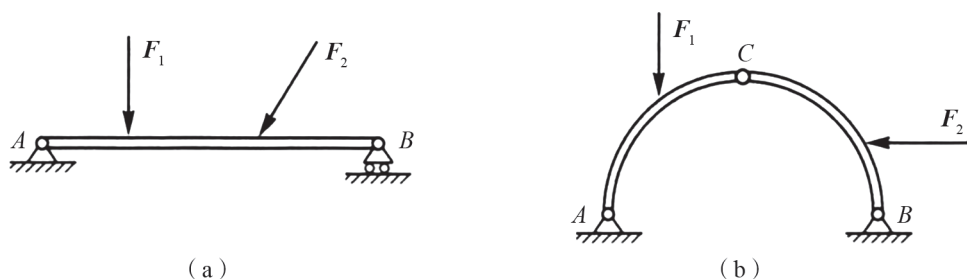


图 2-10 静定结构

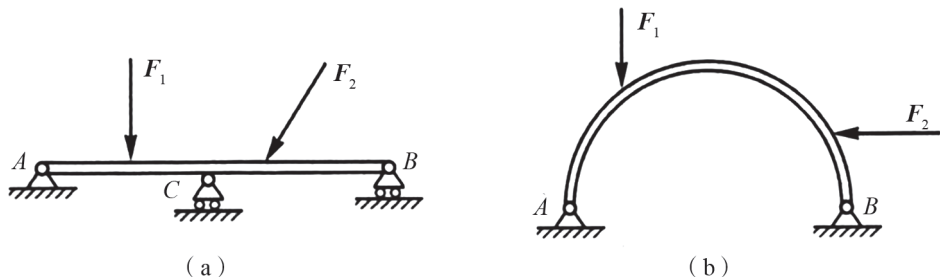


图 2-11 静不定结构

在静力学中只研究静定问题，对于静不定问题，必须考虑物体因受力而产生的变形，补充某些方程，才能使未知量的数目等于方程的数目。求解静不定问题已超出工程静力学的范围，这将在材料力学中加以讨论。

研究物体系统平衡时，在一般情况下，都要选取多个研究对象进行研究。如果研究对象选得好，就会使解题过程简单明了；如果研究对象选择不当，就会使问题复杂化，方程数目增多，从而给解题带来困难。

五、平面静定桁架的内力计算

在工程实际中，房屋建筑、桥架、起重设备及输电塔架等都是采用桁架结构，如图 2-12 所示。桁架是由若干杆件在两端连接而组成的几何形状不变的结构。杆件彼此连接的地方称为节点。各杆件的轴线都在同一平面内的桁架称为平面桁架，否则称为空间桁架。由于桁架结构用料经济，本身重量较轻，因此在工程中有着广泛应用。

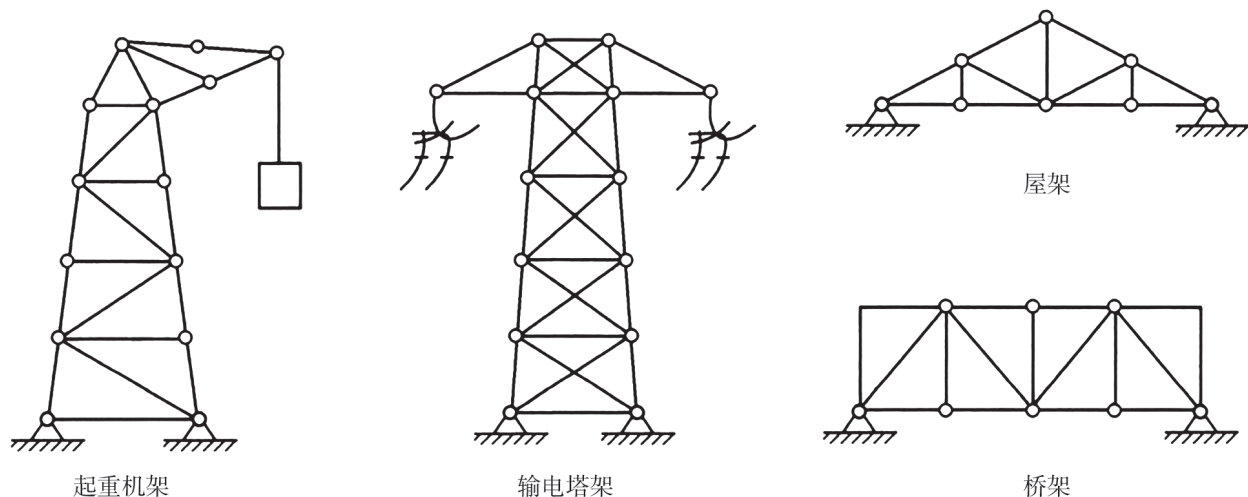


图 2-12 桁架结构

实际桁架的构造和受力情况一般比较复杂，为了简化计算，通常采用以下几个基本假设：

- ①各杆彼此用光滑铰链连接且杆的自重不计；
- ②杆件的轴线都是直线，在同一平面内并通过铰链中心；
- ③所有载荷和支座的约束力都在桁架平面内，且作用在节点上。

根据这些假设，桁架的各杆件均可看作二力杆，只受轴向拉力或轴向压力。符合上述条件的桁架称为理想平面桁架。

实际工程中的桁架与上述假设是有区别的，如桁架的节点不是铰接的，而是铆接、焊接、榫接、螺栓连接等。但是上述假设所得的计算结果，可基本满足工程需要。

桁架中杆件内力的计算方法，一般有节点法和截面法两种。

（一）节点法

平面桁架的每个节点都受平面汇交力系的作用。在计算时，可逐个取节点为研究对象，解出各杆的内力，这种方法称为节点法。由于平面汇交力系只有两个独立平衡方程，因此计算时应从只有两个未知力的节点开始。求解时，各杆的内力一般设为拉力，若计算结果为正，表示轴力为拉力；反之，表示轴力为压力。

（二）截面法

如果只要求计算桁架内某几个杆件的内力，则可用截面法。这种方法是假想用一個截面将桁架截开，任取其中一部分为研究对象；在截开处画出杆件的内力，分离体受平面一般力系作用，可解出三个未知力。



任务二

空间力系



一、力在空间直角坐标轴上的投影

力在空间直角坐标轴上投影的概念与力在平面直角坐标轴上投影的概念基本相同，由于力所对应的参考系不同，计算方法也有所不同。力在空间直角坐标轴上的投影有两种运算方法，即直接投影法和二次投影法。

（一）直接投影法

设力 $\boldsymbol{F}$ 与空间直角坐标轴 x 、 y 和 z 的夹角分别为 α 、 β 和 γ ，如图 2-13 所示，则 $\boldsymbol{F}$ 在空间直角坐标轴上的投影分别为

$$\begin{cases} F_x = F \cos \alpha \\ F_y = F \cos \beta \\ F_z = F \cos \gamma \end{cases} \quad (2-12)$$

力在轴上的投影是代数量，其正负号规定为：从力的起点到终点的连线与坐标轴正向一致时，力的投影为正；反之为负。而力沿坐标轴的分量为矢量。

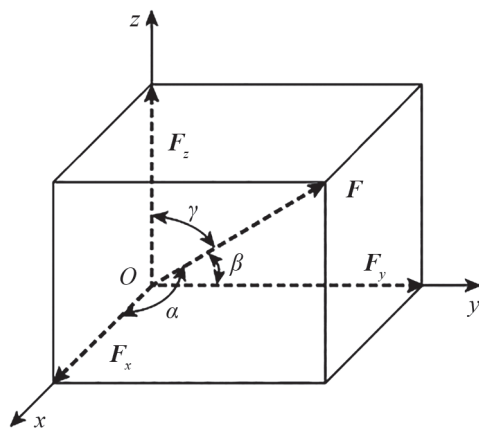


图 2-13 直接投影法

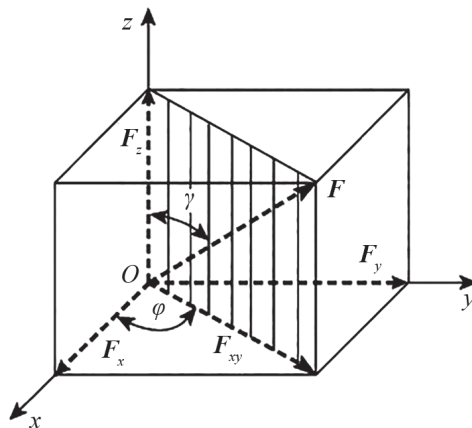


图 2-14 二次投影法

（二）二次投影法

当力与坐标轴的夹角没有全部给出时，可采用二次投影法，即先将力投影到某一坐标平面上得到一个矢量，然后再将这个矢量进一步投影到坐标轴上。

如图 2-14 所示，已知力 $\boldsymbol{F}$ 的值和 $\boldsymbol{F}$ 与坐标轴 z 的夹角 γ ，以及力 $\boldsymbol{F}$ 在 xy 平面上的投影 $\boldsymbol{F}_{xy}$ 与 x 轴的夹角 φ ，则力 $\boldsymbol{F}$ 在 x 、 y 和 z 轴上的投影可写为

$$F \Rightarrow \begin{cases} F_z = F \cos \gamma \\ F_{xy} = F \sin \gamma \Rightarrow \begin{cases} F_x = F_{xy} \cos \varphi = F \sin \gamma \cos \varphi \\ F_y = F_{xy} \sin \varphi = F \sin \gamma \sin \varphi \end{cases} \end{cases} \quad (2-13)$$

必须注意：力在轴上的投影是代数量，而力在平面上的投影为矢量。

若已知力 F 在三个坐标轴上的投影 F_x 、 F_y 、 F_z ，则合力 F 的大小和方向可由下式求得

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

$$\cos \alpha = \left| \frac{F_x}{F} \right|, \cos \beta = \left| \frac{F_y}{F} \right|, \cos \gamma = \left| \frac{F_z}{F} \right| \quad (2-14)$$

式中， α 、 β 和 γ 分别为力 F 与 x 、 y 和 z 轴间所夹的锐角。



课堂试练

长方体上作用有三个力，已知 $F_1=500$ N， $F_2=1\ 000$ N， $F_3=1\ 500$ N，方向和尺寸如图 2-15 所示。求各力在 x 、 y 、 z 轴上的投影。

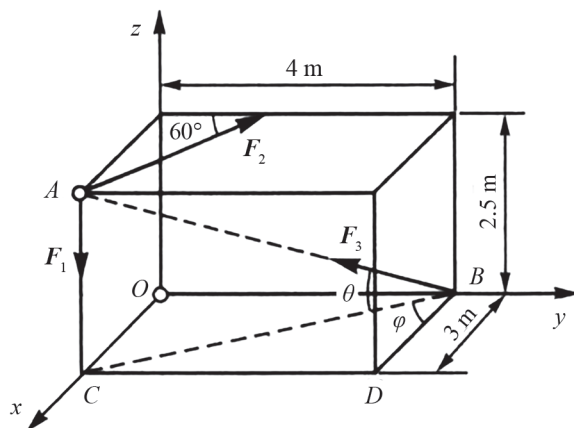


图 2-15 长方体上的三个力作用示意图

解：由于力 F_1 及 F_2 与坐标轴间的夹角已知，可应用直接投影法；力 F_3 则可采用二次投影法。由 $BC=5$ m，所以 $AB=\sqrt{(5\text{ m})^2+(2.5\text{ m})^2}=5.59$ m，得

$$\sin \theta = \frac{AC}{AB} = \frac{2.5\text{ m}}{5.59\text{ m}}, \quad \cos \theta = \frac{BC}{AB} = \frac{5\text{ m}}{5.59\text{ m}}$$

$$\sin \varphi = \frac{CD}{CB} = \frac{4\text{ m}}{5\text{ m}}, \quad \cos \varphi = \frac{DB}{CB} = \frac{3\text{ m}}{5\text{ m}}$$

因此各力在坐标轴上的投影分别为

$$F_{1x} = 0, \quad F_{1y} = 0, \quad F_{1z} = -500\text{ N}$$

$$F_{2x} = -1\ 000 \sin 60^\circ = -866\text{ N}$$

$$F_{2y} = 1\ 000 \cos 60^\circ = 500\text{ N}, \quad F_{2z} = 0$$

$$F_{3x} = 1\ 500 \cos \theta \cos \varphi = 805\text{ N}, \quad F_{3y} = -1\ 500 \cos \theta \sin \varphi = -1\ 073\text{ N}, \quad F_{3z} = 1\ 500 \sin \theta = 671\text{ N}$$



(三) 合力投影定理

设有一空间汇交力系 $F_1, F_2, \dots, F_n$, 运用力的平行四边形法则, 可将其逐步合成为一个合力 F_R , 故有

$$F_R = F_1 + F_2 + \dots + F_n = \sum_{i=1}^n F_i \quad (2-15)$$

将各力向 x, y, z 三个坐标轴投影, 可得

$$F_{Rx} = \sum_{i=1}^n F_{ix}, \quad F_{Ry} = \sum_{i=1}^n F_{iy}, \quad F_{Rz} = \sum_{i=1}^n F_{iz} \quad (2-16)$$

式 (2-16) 又称为“合力投影定理”, 它表明合力在某轴上的投影等于各分力在同一轴上投影的代数和。

二、力对轴的矩

(一) 力对轴之矩的概念

在工程实际中, 经常遇到刚体绕定轴转动的情形, 为了度量力使物体绕定轴转动的效应, 引入力对轴之矩的概念。

如图 2-16 所示, 可将推门的力 F 在作用点 A 处分解为平行于 z 轴的分力 F_z 和垂直于 z 轴的平面内的分力 F_{xy} 。

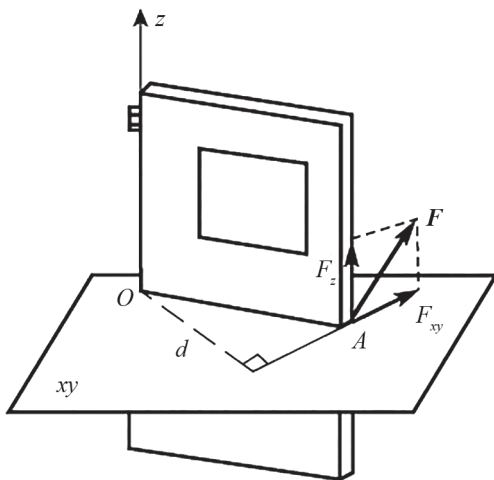


图 2-16 力对轴之矩

由经验可知, 分力 F_z 不能使门转动, 力 F_z 对 z 轴之矩等于零。只有分力 F_{xy} 才能使门绕 z 轴转动。若分力 F_{xy} 所在的平面与 z 轴的交点为 O , 则力 F_{xy} 对 z 轴之矩可用力 F_{xy} 对 O 点之矩来计算。设 O 点到力 F_{xy} 的作用线的距离为 d , 于是

$$M_z(F) = M_z(F_{xy}) = M_O(F_{xy}) = \pm F_{xy}d \quad (2-17)$$

式 (2-17) 表明, 空间力对轴之矩等于力在与轴垂直的平面上的分力对轴与此平面交点之矩。

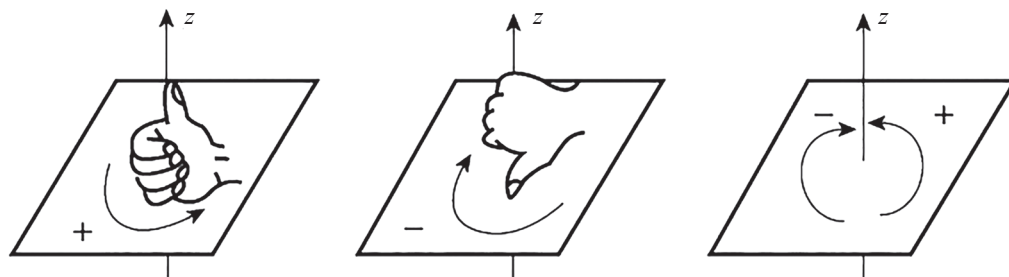


图 2-17 力对轴之矩正负的判断

力对轴之矩的单位为 $\text{N} \cdot \text{m}$ 或 $\text{kN} \cdot \text{m}$ ，正负号可用右手螺旋法则判定，如图 2-17 所示，用右手握住转轴，四指与力矩转动方向一致，伸开拇指，若拇指指向与转轴正向一致，则力对该轴之矩为正；反之，为负。也可以从转轴正方向看过去，逆时针转向的力矩为正，顺时针转向的力矩为负。

当力的作用线与轴平行或相交时，力对轴之矩等于零，力不能使物体绕该轴转动。

(二) 合力矩定理

设有一空间汇交力系 $F_1, F_2, \dots, F_n$ ，其合力为 F_R ，则合力对某轴之矩等于各分力对同一轴之矩的代数和，表达式为

$$\begin{cases} M_x(F_R) = M_x(F_1) + M_x(F_2) + \dots + M_x(F_n) = \sum_{i=1}^n M_x(F_i) \\ M_y(F_R) = M_y(F_1) + M_y(F_2) + \dots + M_y(F_n) = \sum_{i=1}^n M_y(F_i) \\ M_z(F_R) = M_z(F_1) + M_z(F_2) + \dots + M_z(F_n) = \sum_{i=1}^n M_z(F_i) \end{cases} \quad (2-18)$$

公式称为合力矩定理。

三、空间力系平衡方程

(一) 空间一般力系的简化

设在物体上作用空间力系 $F_1, F_2, \dots, F_n$ ，如图 2-18 (a) 所示。与平面一般力系的简化方法一样，在物体内任取一点 O 作为简化中心。利用力的平移定理，将各力向 O 点平移，加入相应的附加力偶，这样就可得到作用于 O 点的空间汇交力系 $F'_1, F'_2, \dots, F'_n$ ，和一个附加的空间力偶系 $M_1, M_2, \dots, M_n$ ，如图 2-18 (b) 所示。将空间汇交力系和空间力偶系进一步合成，就可得到作用于简化中心 O 点的主矢 F'_R 和一个主矩 M_O 。

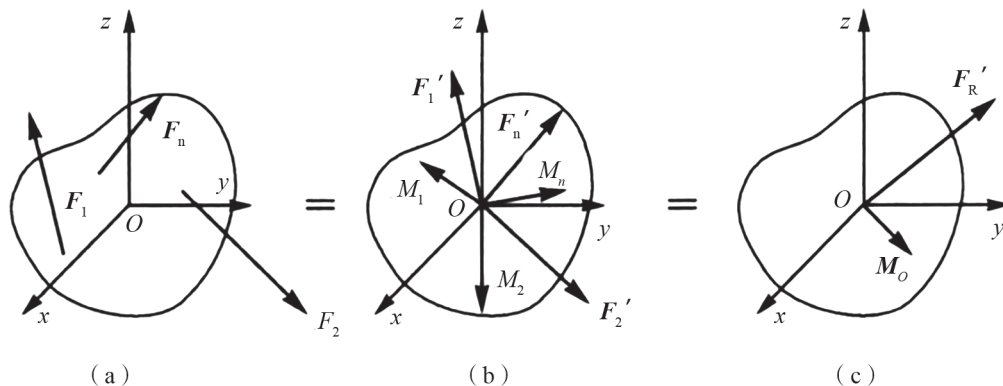


图 2-18 空间一般力系的简化