# 复变函数与积分变换


类目：数学类
书名：复变函数与积分变换
主编：王 英 洪银胜 孙振川
出版社：湖南大学出版社
开本：大 16 开
书号：978-7-5667-4045-8
使用层次：通用
出版时间：2025 年 7 月
定价：45.00 元
印刷方式：双色
是否有资源：有

责任编辑：金红艳
封面设计：旗语书装

# 复变函数与积分变换

ISBN 978-7-5667-4045-8
9 787566 740458 >
定价：45.00元

数学类创新融合精品教材
“互联网+”教育改革新理念教材

复变函数与积分变换

主编 ◎ 王 英 洪银胜 孙振川

湖南大学出版社

数学类创新融合精品教材
“互联网+”教育改革新理念教材

# 复变函数与积分变换

主编 ◎ 王 英 洪银胜 孙振川

湖南大学出版社

数学类创新融合精品教材

“互联网+”教育改革新理念教材

# 复变函数与积分变换

主　编 ◎ 王　英　洪银胜　孙振川

副主编 ◎ 杨小平　罗　维　朱　峰

步　丹　孟　蕊

湖南大学出版社

·长沙·

图书在版编目(CIP)数据

复变函数与积分变换 / 王英，洪银胜，孙振川主编. 长沙 ：湖南大学出版社，2025. 7. -- ISBN 978-7-5667-4045-8

Ⅰ. O174. 5；O177. 6

中国国家版本馆 CIP 数据核字第 2025GB0672 号

复变函数与积分变换

FUBIAN HANSHU YU JIFEN BIANHUAN

主　　编：王　英　洪银胜　孙振川

责任编辑：金红艳

印　　装：唐山唐文印刷有限公司

开　　本：889 mm×1194 mm　1/16　印　　张：11　字　　数：268 千字

版　　次：2025 年 7 月第 1 版　印　　次：2025 年 7 月第 1 次印刷

书　　号：ISBN 978-7-5667-4045-8

定　　价：45. 00 元

出 版 人：李文邦

出版发行：湖南大学出版社

社　　址：湖南·长沙·岳麓山　邮　　编：410082

电　　话：0731-88822559(营销部)，88821174(编辑室)，88821006(出版部)

传　　真：0731-88822264(总编室)

网　　址：http://press. hnu. edu. cn

电子邮箱：xiaoshulianwenhua@163. com

# 前言

Preface

复变函数与积分变换是高等院校许多理工科专业的一门基础课，更是自然科学与工程技术中常用的数学工具。因此，复变函数与积分变换的理论与方法，对于理工科专业的学生来说是必须掌握的数学基础知识，有着重要的意义。

通过对本门课程的学习，学生可以较系统、完整地了解复变函数与积分变换理论的基本内容，并学会借助高等数学中的相关知识处理复变函数的一些基本问题。

本书深入浅出，突出基础概念和方法，在确保知识体系完整的基础上，尽量做到数学推导简单易懂，并在与工程问题密切结合等方面形成了自己的特色。书中精心编排了大量的例题和习题，以供学生进一步理解内容。在编写过程中，力求突出以下几个特点：

(1)注重复变函数与积分变换内容发生、发展的自然过程，强调概念的产生过程所蕴含的思想方法，注重概念、定理叙述的精确性，从而在学生获得知识的同时培养学生推理、归纳、演绎和创新的能力。

(2)对基本概念的引入尽可能联系实际，突出其物理意义；基础理论的推导深入浅出、循序渐进，以适合理工科专业学生的特点；基础方法的阐述具有启发性，使学生能举一反三、融会贯通，以期达到培养学生的创新能力、提高学生的基本素质的目的。

(3)例题和习题丰富，有利于学生掌握所学的内容，提高学生分析问题、解决问题的能力。

由于编者的水平有限，书中难免有不足和疏漏之处，恳请广大学生和教师批评指正。

编　者

2025 年 1 月

# 目录

Contents

# 第 1 章
# 复数与复变函数

复变函数是变量为复数的函数,属于分析学的一个分支,主要研究对象是在某种意义下可导的复变函数,即解析函数.本章首先介绍复数的概念、性质、四则运算;其次引入复平面上的点集、区域、曲线以及复变函数的极限与连续等概念.这门学科的所有讨论都是在复数范围内进行的.

# 1.1　复数及其运算

在初等代数中已经学过复数，为了便于以后讨论和理解，本节在初等代数的知识基础上，给出复数的两点式定义，在简要回顾过去相关结论的同时，加以必要的补充.

## 1.1.1　复数定义及运算

一元二次方程 $x^2+1=0$ 在实数范围内显然无解，为使负数开方有意义，数学家引入了虚数单位 i，并定义 $i^2=-1$，这样方程 $x^2+1=0$ 就有两个根 i 和 $-i$. 复数的研究在 18 世纪迅速发展，数学研究的领域也从实数域扩展到复数域.

**定义 1.1**　设 $x,y$ 为任意实数，称形如 $x+iy$ 的数为**复数**，记作：$z=x+iy$，其中 $i^2=-1$，i 称为虚数单位，$x$ 称为复数 $z$ 的**实部**，$y$ 称为复数 $z$ 的**虚部**，分别记作：

$$x=\mathrm{Re}(z),y=\mathrm{Im}(z).$$

当 $x=0$ 时，$z=iy$ 为纯虚数；

当 $y=0$ 时，$z=x$ 为实数；

当 $x=y=0$ 时，$z=0$ 既是纯虚数，又是实数.

对任意两个复数 $z_1=x_1+iy_1$，$z_2=x_2+iy_2$ 规定：

(1) 当且仅当 $x_1=x_2$ 且 $y_1=y_2$ 时，称 $z_1$ 与 $z_2$ 相等，记作 $z_1=z_2$.

要注意的是，两个实数可以比较大小，而两个复数不能比较大小，因而实数是有序的，复数是无序的.

(2) 复数的运算：

① 加减法：

$$z_1\pm z_2=(x_1+iy_1)\pm(x_2+iy_2)=(x_1\pm x_2)+i(y_1\pm y_2),$$

② 乘法：

$$z_1z_2=(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1),$$

③ 除法：

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}(z_2\neq 0).$$

在复数域中，加法和乘法满足交换律与结合律，乘法对加法满足分配律. 因此，实数域中由这些规律推导的恒等式在复数域中仍然有效. 复数集关于加、减、乘、除(除数不为零)四则运算是封闭的，其代数结构是一个域. 复数集用 $\mathbf{C}$ 表示，即 $\mathbf{C}=\{x+\mathrm{i}y \mid x,y\in\mathbf{R}\}$，$\mathbf{R}$ 为实数集.

## 1.1.2 复数的模与共轭复数

对给定的复数 $z=x+\mathrm{i}y$，称复数 $x-\mathrm{i}y$ 为 $z$ 的**共轭复数**，记作 $\bar{z}=x-\mathrm{i}y$. 称 $\sqrt{x^2+y^2}$ 为复数 $z$ 的模，记作 $|z|=r=\sqrt{x^2+y^2}$.

关于复数的模与共轭复数，有下列关系：

(1) $|z_1z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$，$\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}\quad(z_2\neq 0)$；

(2) $x\leqslant|x|\leqslant|z|$，$y\leqslant|y|\leqslant|z|$；

(3) $z\bar{z}=x^2+y^2$；

(4) $x=\dfrac{1}{2}(z+\bar{z})$，$y=\dfrac{1}{2\mathrm{i}}(z-\bar{z})$；

(5) $|z|=|\bar{z}|$，$|z|^2=z\bar{z}$，$\bar{\bar{z}}=z$；

(6) $\overline{z_1\pm z_2}=\bar{z}_1\pm\bar{z}_2$，$\overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\,\bar{z}_2$，$\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}\quad(z_2\neq 0)$.

这些性质作为练习，由读者自己去证明.

【例 1.1】 设 $z=\dfrac{2+\mathrm{i}}{\mathrm{i}}-\dfrac{2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$，求 $\bar{z}$，$|z|$.

解 $z=\dfrac{2+\mathrm{i}}{\mathrm{i}}-\dfrac{2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\dfrac{(2+\mathrm{i})(-\mathrm{i})}{\mathrm{i}\cdot(-\mathrm{i})}-\dfrac{2\mathrm{i}(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}$

$=-2\mathrm{i}+1-\mathrm{i}+1=2-3\mathrm{i}$，

所以 $\bar{z}=2+3\mathrm{i}$，$|z|=\sqrt{2^2+(-3)^2}=\sqrt{13}$.

# 1.2 复数的几何表示

## 1.2.1 复平面与复数的向量式

复平面与复数的向量式

用建立了笛卡儿直角坐标系的平面来表示复数的平面称为复平面或 $z$ 平面. 复平面赋予了复数直观的几何意义，复数的数对表示式 $(x,y)$ 也可以看作是直角坐标系中的坐标（见图 1-1），其中 $x$ 是实部，$y$ 是虚部. 它建立了复数与点之间的一一对应关系. 由此，今后可将复数与其在复平面上的对应点视为等同. 例如，把复数 $1+2\mathrm{i}$ 称为点 $1+2\mathrm{i}$，把点 $4+\mathrm{i}$ 称为复数 $4+\mathrm{i}$.

复数的几何解释使得许多关于复数的“量”有着清晰的“形”的表示. 例如，复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 的模 $|z|$ 表示复平面上点 $M(x,y)$ 到原点的距离 $r$（见图 1-2）. 这种“形”的表示对研究复变函数有着重要的意义.

在复平面上，由于点 $M(x,y)$ 与向量 $\overrightarrow{OM}$ 是一一对应的，所以复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 可看成一个起点在原点、终点在点 $M(x,y)$ 的向量（向径）（见图 1-2）. 复数的向量形式是复数在复平面上的又一几何解释.

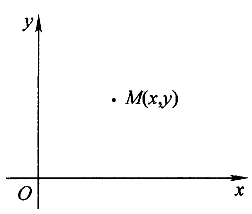


图 1-1

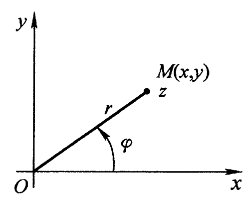


图 1-2

## 1.2.2 复数的三角式与指数形式

### 1.2.2.1 复数 $z\neq 0$ 的辐角

当 $z\neq 0$ 时，以正实轴（$x$ 轴）为始边、以表示 $z$ 的向量 $\overrightarrow{Oz}$ 为终边的角的弧度数 $\theta$ 称为 $z$ 的**辐角**（argument），记作：$\mathrm{Arg}\,z=\theta$. 其方向规定逆时针方向为正，顺时针方向为负.

显然，对复数 $z=0$ 无辐角可言，而对任一个复数 $z\neq 0$，其辐角有无穷多个值，若 $\theta_0$ 是复数 $z$ 的一个辐角，则

$$\mathrm{Arg} z=\theta_0+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$$

就是复数 $z$ 的全部辐角.

若用 $\arg z$ 表示满足条件 $-\pi<\arg z\leqslant\pi$ 的一个特定值，则称 $\arg z$ 为复数 $z$ 的主辐角或辐角的主值. 显然，有

$$\mathrm{Arg}\, z=\arg z+2k\pi(k\in\mathbf{Z}).$$

辐角的主值 $\arg z(z\neq 0)$ 可以由反正切 $\arctan\dfrac{y}{x}$ 按下列关系确定：

$$\arg z=\begin{cases}\arctan\dfrac{y}{x}，当\ x>0，\\ \pm\dfrac{\pi}{2}，当\ x=0,y\neq 0，\\ \arctan\dfrac{y}{x}+\pi，当\ x<0,y\geqslant 0，\\ \arctan\dfrac{y}{x}-\pi，当\ x<0,y<0，\end{cases}$$

其中 $-\dfrac{\pi}{2}<\arctan\dfrac{y}{x}<\dfrac{\pi}{2}$.

### 1.2.2.2 复数的三角表示式

$z=x+\mathrm{i}y$ 称为复数的**代数式**.

利用直角坐标与极坐标的关系式，可知 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，因此很容易得到 $z=x+\mathrm{i}y$ 的三角表示式，称为复数 $z$ 的**三角式**：

$$z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)(z\neq 0,\theta\ 通常取\ \arg z)，$$

其中 $r$ 为 $z$ 的**模**.

### 1.2.2.3 复数的指数表示式

由欧拉公式 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$，则由复数的三角表示式得

$$z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}，$$

这种表示形式称为复数 $z(z\neq 0)$ 的**指数表示式**，其中 $r$ 是 $z$ 的模，$\theta$ 是 $z$ 的辐角. 此时，

$$\begin{aligned}\bar{z}&=r(\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta)\\&=r[\cos(-\theta)+\mathrm{i}\sin(-\theta)]\\&=r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}.\end{aligned}$$

利用复数的指数式做乘除法较简单，可得到两个等式：

$$\mathrm{Arg}(z_1z_2)=\mathrm{Arg}\, z_1+\mathrm{Arg}\, z_2，$$

$$\mathrm{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\mathrm{Arg}\ z_1-\mathrm{Arg}\ z_2.$$

按以下约定来理解这两个等式：

第一个等式表明：由于辐角的多值性，等式在两个无限集合意义下成立，即当在左端取定一个值 $\alpha$ 时，可以在右端分别从 $\mathrm{Arg}\ z_1$ 中取出一个值 $\alpha_1$ 及从 $\mathrm{Arg}\ z_2$ 中取出一个值 $\alpha_2$，使得 $\alpha=\alpha_1+\alpha_2$. 反之，当右端分别从 $\mathrm{Arg}\ z_1$ 与 $\mathrm{Arg}\ z_2$ 中取出 $\alpha_1$ 与 $\alpha_2$ 时，左端也必定存在某个 $\alpha$，使得 $\alpha=\alpha_1+\alpha_2$.

第二个等式的理解与此类似. 今后，凡涉及含多值的等式时，均按此约定理解. 复数的各种表示法可以相互转换，以适应讨论不同问题时的需要.

**【例 1.2】** 将复数 $z=-2+2\sqrt{3}\mathrm{i}$ 化为三角表示式和指数表示式.

**解** 因为 $r=\sqrt{(-2)^2+(2\sqrt{3})^2}=\sqrt{16}=4$，$\arg z=\arctan\left(\frac{2\sqrt{3}}{-2}\right)+\pi=-\frac{\pi}{3}+\pi=\frac{2\pi}{3}$，

所以 $z$ 的三角表示式是 $z=4\left(\cos\frac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right)$，指数表示式是 $z=4\mathrm{e}^{\frac{2\pi}{3}\mathrm{i}}$.

## 1.2.3 复数的乘幂与方根

设 $z$ 为复数，$n$ 为正整数，$z^n$ 表示 $n$ 个 $z$ 的乘积，称为 $z$ 的 $n$ 次幂. 若

$$z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=r(\cos\theta+i\sin\theta),$$

则

$$z^n=r^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}=r^n(\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta).$$

特别地，当 $r=1$，即 $z=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$ 时，有

$$(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^n=\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta,$$

这就是著名的棣莫弗(De Moivre)公式.

若存在复数 $w$ 满足方程

$$w^n=z(z\text{ 为已知复数}),$$

则称 $w$ 为 $z$ 的一个 $n$ 次方根，称求 $z$ 的全部 $n$ 次方根为把复数 $z$ 开 $n$ 次方，或称为求 $z$ 的 $n$ 次根，记作 $w=\sqrt[n]{z}$.

当 $z=0$ 时，$\sqrt[n]{0}=0$；当 $z\neq0$，求 $w=\sqrt[n]{z}$，令

$$z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},w=\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi},$$

于是

$$\rho^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},$$

所以

$$\rho^n=r,n\varphi=\theta+2k\pi,$$

得

$$\rho=\sqrt[n]{r},\varphi=\frac{\theta+2k\pi}{n}\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

所以
$$w=\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\,e^{\frac{\theta+2k\pi}{n}i}.$$

当 $k=0,1,2,\cdots,n-1$ 时,得到 $w$ 的 $n$ 个不同的值;当 $k$ 取其他整数值时,这些根又重复出现,因此一个复数的 $n$ 次方根只取这 $n$ 个不同的值,即
$$w=\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\,e^{\frac{\theta+2k\pi}{n}i}\quad(k=0,1,2,\cdots,n-1).$$

从几何意义上讲,这 $n$ 个不同的值就是以原点为中心、$\sqrt[n]{r}$ 为半径的圆的内接正 $n$ 边形的 $n$ 个顶点.

**【例 1.3】** 解方程:(1) $z^3+1=0$; (2) $\sqrt[5]{1+i}$.

**解** (1) 求方程 $z^3+1=0$ 的解就是求 $z=-1$ 的全部三次方根.

因 $-1=e^{\pi i}$, 所以方程的解是 $z=e^{\frac{\pi+2k\pi}{3}i}(k=0,1,2)$.

这三个根是内接于以中心为原点、半径为 1 的圆的内接正三角形的三个顶点.

(2) 因 $1+i=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$, 所以 $\sqrt[5]{1+i}=\sqrt[10]{2}\,e^{\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{5}i}\quad(k=0,1,2,3,4)$.

这五个根是内接于以中心为原点、半径为 $\sqrt[10]{2}$ 的圆的内接正五边形的五个顶点.

## 1.2.4 无穷远点与复球面

由于某种需要,引入一个特殊的复数 —— 无穷大,记作∞.

关于∞, 没有定义其实部、虚部与辐角,但规定其模 $|\infty|=+\infty$.

有关∞参与的运算规定如下:

设 $a$ 是异于∞的 一个复数,规定:
$$a\pm\infty=\infty\pm a=\infty,$$
$$a\cdot\infty=\infty\cdot a=\infty(a\neq 0),$$
$$\frac{a}{\infty}=0,\frac{\infty}{a}=\infty,$$

但是 $0\cdot\infty,\frac{\infty}{\infty},\infty\pm\infty,\frac{0}{0}$ 仍然没有确定的意义.

∞的几何解释:由于在复平面上没有一点能与∞相对应,所以只得假想在复平面上添加一个“假想点”(或理想点),使它与∞对应,称此“假想点”为无穷远点.

关于无穷远点,约定:在复平面添加“假想点”后所成的平面上,每一条直线都通过无穷远点,同时,任一半平面都不包含无穷远点.

为了与复平面区别,称复平面添加无穷远点后所成的平面为**扩充复平面**. 扩充复平面又称**闭平面**,复平面又称**开平面**. 有时与扩充复平面相对而言,也把复平面称为**有限复平面**.

要特别注意的是:这里的记号∞是一个数,而在高等数学中所见的记号+∞或−∞均不是数,

它们只是表示变量的一种变化状态. 为使无穷远点有更加令人信服的直观解释，人们引入了黎曼球面(或复球面)：

将一个球心为$O'$、半径为$\frac{1}{2}$的球按照以下方法放在直角坐标系$Oxyz$中(见图1-3)(设复平面与$xOy$坐标平面重合)：使球的一条直径与$z$轴重合，并且使球与$xOy$平面相切于原点$O$. 球面上的点$O$称为南极，点$N$称为北极.

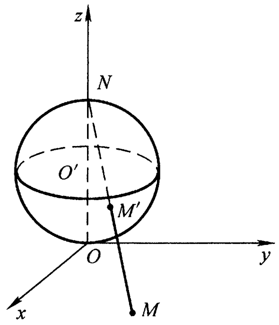


图 1-3

对于复平面内任一点$M$，如果用一直线将点$M$与北极点$N$连接起来，那么该直线一定与球面相交于异于北极的一点$M'$。反过来，对于球面上任何一个异于$N$的点$M'$，用直线将$N$与$M'$连接起来，这条直线的延长线就一定与复平面相交于一点.

若规定点$N$为点$\infty$在黎曼球面上的对应点，而点$\infty$是点$N$在扩充复平面上的对应点，则扩充复平面与黎曼球面之间便建立了一一对应关系.

至此，关于复数的几何解释又可以理解为：复数域的几何模型就是复平面或挖掉点$N$的黎曼球面，复数域添加无穷远点后所成集合的几何模型是扩充复平面或黎曼球面.

## 1.3 平面点集

本节主要是对一些常见的点与点集做出规定. 若无特殊声明，均在复平面上讨论.

### 1.3.1 邻域

若$z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1, z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$，则点$z_1$与$z_2$之间的距离$d(z_1, z_2)$规定为

$$d(z_1,z_2)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2},$$

显然

$$d(z_1,z_2)=|z_2-z_1|.$$

设 $z_0$ 为一定点,$\rho>0$,称满足$|z-z_0|<\rho$的点$z$ 的全体为点$z_0$ 的 $\rho$ **邻域**,即以 $z_0$ 为圆心、以 $\rho$ 为半径的圆内的全体点所组成的集合记作$U(z_0,\rho)$. 称$U(z_0,\rho)-\{z_0\}$为 $z_0$ 的**去心 $\rho$ 邻域**,简称为点 $z_0$ 的**去心邻域**.

下面利用邻域来刻画一些特殊的点与点集:

设 $E$ 是 一点集,$z_0$ 是一定点:

(1) 若 $z_0$ 的任意一个邻域内都含有 $E$ 的无穷多个点,则称 $z_0$ 为 $E$ 的**聚点**.

(2) 若 $z_0\in E$ 且存在某个$U(z_0,\rho)$,使得$U(z_0,\rho)$内除$z_0$ 外再无 $E$ 的点,则称 $z_0$ 为 $E$ 的**孤立点**. 若 $z_0\in E$ 且存在某个 $U(z_0,\rho)$,使得 $U(z_0,\rho)\subset E$,则称点 $z_0$ 为 $E$ 的**内点**.

(3) 若存在某个$U(z_0,\rho)$,使得$U(z_0,\rho)$内的全部点都不属于$E$, 则称 $z_0$ 为 $E$ 的**外点**.

(4) 若 $z_0$ 的任意一个邻域内既有属于 $E$ 的点,又有不属于 $E$ 的点,则称 $z_0$ 为 $E$ 的**边界点**.

(5) 称由 $E$ 的全部边界点组成的集合为$E$ 的边界,记作$\partial E$.

(6) 若 $E$ 的点都是$E$ 的内点,则称 $E$ 为**开集**.

(7) 若$E$的全部聚点都属于$E$, 则称$E$为**闭集**. 若存在一个正数$M$, 使得$E$内的任意一点$z$都满足 $z<M$, 则称 $E$ 为**有界集**,否则称 $E$ 为**无界集**.

### 1.3.2 曲线

**定义 1.2** 设 $x(t)$与 $y(t)$是定义在区间$[\alpha,\beta]$上的实值连续函数,称由

$$z(t)=x(t)+\mathrm{i}y(t)$$

确定的点集 $C$ 为复平面上的**连续曲线**,$z(\alpha)$与$z(\beta)$分别称为曲线$C$ 的起点与终点.

若 $z(\alpha)=z(\beta)$, 则称曲线为**闭曲线**.

曲线 $C$ 的方向规定为参数$t$ 增加的方向. 曲线 $C$ 的反向曲线记为$C^-$.

若连续曲线 $C$ 仅当$t_1=t_2$ 时,$z(t_1)=z(t_2)$,则称 $C$ 为简单曲线或若尔当(Jordan) 曲线.

当 $t_1\neq t_2$ 而有 $z(t_1)=z(t_2)$时,点 $z(t_1)$,$z(t_2)$称为曲线 $C$ 的重点. 没有重点的连续曲线称为简单曲线或若尔当曲线.

若连续曲线$C$是一闭曲线,且仅当$t_1\neq t_2$ 时,有 $z(t_1)=z(t_2)$,则称$C$是简单闭曲线或若尔当闭曲线(即简单曲线起点与终点重合).

若 $C$ 是简单曲线,$x'(t)$与 $y'(t)$在$[\alpha,\beta]$上连续,且对 $t\in[\alpha,\beta]$, 有

$$z'(t)=x'(t)+\mathrm{i}y'(t)\neq 0 \quad \{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2\neq 0\},$$

则称 $C$ 为**光滑曲线**,称由有限条光滑曲线首尾连接而成的曲线为**逐段光滑曲线**.

为方便起见,称逐段光滑的闭曲线为**围线**. 关于围线的方向规定为:逆时针方向为正向,顺时针方向为负向.

### 1.3.3 区域

设 $E$ 为点集,若对 $E$ 中任意两点,总能用一条完全属于 $E$ 的连续曲线将它们连接起来,则称 $E$ 是连通的. 设 $E$ 为点集,若它是开集,且是连通的,则称 $E$ 为区域.

若点集 $D$ 为区域,则称 $D$ 连同其边界 $\partial D$ 所成的集合为闭区域,记作$\overline{D}$.

任意一条简单闭曲线 $C$ 必将复平面唯一地分成 $D_1$,$C$,$D_2$ 三个点集(见图 1-4),使它们满足:

(1) 彼此不相交;

(2) $D_1$ 是一个有界区域(称为曲线 $C$ 的内部);

(3) $D_2$ 是一个无界区域(称为曲线 $C$ 的外部);

(4) $C$ 既是 $D_1$ 的边界又是 $D_2$ 的边界;

(5) 若简单折线(指满足简单曲线定义的折线) $\Gamma$ 的一个端点属于 $D_1$,另一个端点属于 $D_2$,则 $\Gamma$ 必与 $C$ 相交.

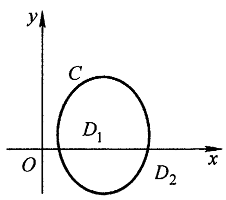

图 1-4

设 $D$ 为区域,若 $D$ 中任意一条简单闭曲线的内部仍属于 $D$,则称 $D$ 为**单连通区域**,不是单连通区域的区域称为**复连通区域**,由定义得知,上述的 $E$ 是单连通区域,$D$ 是复连通区域.

单连通区域的特征是在该区域内任一个简单闭曲线可经过连续变形而缩成一个点,而复连通区域不具有这个特征.

## 1.4 复变函数

复变函数研究的主要对象是定义在复数域上的解析函数,而解析函数是一种特殊的复变函数,因此,在讨论了复数集后,还需要讨论复变函数的有关概念,进而为研究后续解析函数做好准备.

### 1.4.1 复变函数的概念

**定义 1.3** 设 $D$ 与 $E$ 为复平面上的两个复数集,若存在对应关系 $f$,使得对于每一个 $z \in$

$D$，都有确定的 $w \in E$ 与之对应，则称在 $D$ 上确定一函数，记作

$$w = f(z)(z \in D).$$

习惯上称复变数 $w$ 是复变数 $z$ 的函数，简称**复变函数**.

若对每个 $z \in D$，只有一个 $w$ 与之对应，则称 $w = f(z)$ 为单值函数. 否则，称 $w = f(z)$ 为多值函数. 例如，$w = z^2$，$w = z$ 为单值函数，$w = \sqrt[n]{z}$，$w = \mathrm{Arg}\, z$ 为多值函数.

今后，若无特殊声明，则讨论的函数均为单值函数.

与高等数学一样，在上述定义中，称集合 $D$ 为函数的定义域，称 $D$ 的生成集

$$f(G) = \{w \mid w = f(z), z \in D\}$$

为函数的值域，$z$ 与 $w$ 分别称为函数的**自变量与因变量**.

函数 $w = f(z)$ 又称为变换或映射. 变换或映射着重刻画点与点之间的对应关系，而函数则着重刻画数与数之间的对应关系.

设有函数 $w = f(z)(z \in D)$，$D$ 为区域，当 $z_1 \neq z_2$ 时，有 $f(z_1) \neq f(z_2)$，则称 $w = f(z)$ 为 $D$ 上的单叶函数，称 $D$ 为 $w = f(z)$ 的单叶性区域.

例如，$w = z + 1$ 是复平面上的单叶函数，复平面是该函数的单叶性区域.

设有函数 $w = f(z)(z \in D)$，若对值域 $G$ 中的每一个 $w$，都有确定的 $z \in D$ 与之对应，且使 $w = f(z)$，则称在 $G$ 上确定一函数，记作 $z = f^{-1}(w)(w \in G)$，称为函数 $w = f(z)$ 的反函数. 显然，反函数也有单值函数与多值函数之分.

例如，$w = z + 1$ 的反函数 $z = w - 1$ 是单值函数，而 $w = z^3$ 的反函数 $w = \sqrt[3]{z}$ 是多值函数.

设有函数 $w = f(z)(z \in D)$，若存在 $M > 0$，使对任意的 $z \in D$ 都有 $f(z) < M$，则称函数 $w = f(z)$ 为 $D$ 上的有界函数；否则，称为无界函数.

复变函数与实值函数有无联系呢？为弄清这个问题，下面来观察一个例子.

设 $w = z^2$，令

$$z = x + \mathrm{i}y, w = u + \mathrm{i}v,$$

则有

$$u + \mathrm{i}v = (x + \mathrm{i}y)^2 = (x^2 - y^2) + \mathrm{i}2xy,$$

于是有

$$u = x^2 - y^2, v = 2xy.$$

由此可知，函数 $w = z^2$ 的实部与虚部均为二元实值函数.

一般而言，对于 $w = f(z)(z \in D)$，若令 $z = x + \mathrm{i}y, w = u + \mathrm{i}v$，则由对应关系 $f$ 与复数相等的定义，易知 $u$ 与 $v$ 均是二元实值函数. 若设 $z = x + \mathrm{i}y, w = u + \mathrm{i}v$，则有

$$w = f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y).$$

因此，研究复变函数可以转化为研究二元实值函数.

至此,可以说,复变函数与实值函数有联系. 这种联系表现为:定义了一个复变函数 $w=f(z)$,相当于定义了两个实变函数 $u=u(x,y)$,$v=v(x,y)$.

由于复变函数 $w=f(z)$的几何图形需在四维空间中考虑,因此无法像实变函数那样直观地表示. 为了更直观地理解复变函数,通常从变换或映射的角度进行分析. 设有函数 $w=f(z)(z\in D)$,值域 $G=f(D)$. 取两张复平面,分别称为 $z$ 平面和 $w$ 平面,将定义域 $D$ 放在 $z$ 平面上,值域 $G$ 放在 $w$ 平面上,则复变函数 $w=f(z)$的几何意义是,将 $z$ 平面上的集合 $D$ 变换(映射)为 $w$ 平面上的集合 $G$. 通常,称 $D$ 为**原像集**,称 $G$ 为**像集**. 若 $w_0\in G$ 是由点 $z_0\in D$ 变换(映射)来的,则称 $w_0$ 为 $z_0$ 的**像点**,$z_0$ 为 $w_0$ 的**原像点**.

**【例 1.4】** 设 $w=f(z)=z^2$,试问它把 $z$ 平面上的下列曲线分别映射成 $w$ 平面上的什么曲线:

(1)$D=\left\{z\,\middle|\,|z|<2,0<\arg z<\dfrac{\pi}{2}\right\}$; (2)$G=\{z\mid x^2-y^2=4\}$.

**解** (1) 设 $z=re^{i\theta}$,$w=\rho e^{i\varphi}$,代入 $w=f(z)=z^2$ 得 $\rho=r^2$,$\varphi=2\theta$.

而由 $D$ 可知 $r=2$,$0<\arg z<\dfrac{\pi}{2}$,故有 $\rho=4$,$0<\varphi<\pi$,即像为

$$G=\{w\,|\,|w|<4,0<\arg w<\pi\}.$$

(2) 设 $z=x+iy$,$w=u+iv$,代入 $w=f(z)=z^2$ 得

$$u=x^2-y^2,v=2xy.$$

而由 $D$ 可知 $x^2-y^2=4$,故有 $u=4$,即像为

$$G=\{w\mid \mathrm{Re}(w)=4\}.$$

## 1.4.2 复变函数的极限

**定义 1.4** 设函数 $w=f(z)$在 $z_0$ 的某一去心邻域 $0<|z-z_0|<\rho$ 内有定义,若存在复数 $A$,对于任意的 $\varepsilon>0$,总存在 $\delta>0$,使得当 $0<|z-z_0|<\delta$ 时,有

$$|f(z)-A|<\delta,$$

则称 $f(z)$当 $z$ 趋于 $z_0$ 时有极限 $A$,记作

$$\lim_{z\to z_0}f(z)=A \text{ 或 } f(z)\to A(z\to z_0).$$

从定义上看,复变函数的极限概念与高等数学中实变函数的极限概念极为相似. 然而,由于复变函数涉及复数域,其极限行为与实变函数有本质区别:在复变函数的极限概念中,$z\to z_0$ 时关于路径的要求比实变函数中 $x\to x_0$ 时关于路径的要求要苛刻得多,前者 $z\to z_0$ 要求 $z=x+iy$ 沿任意路径趋于 $z_0=x_0+iy_0$,相当于 $\begin{cases}x\to x_0\\ y\to y_0\end{cases}$,而后者 $x\to x_0$ 仅要求 $x$ 在实轴上任意趋

于 $x_0$.

由复变函数的极限定义,可仿照高等数学中的方法获得关于极限的四则运算法则.

**定理 1.1** 若函数 $f(z)$与 $g(z)$均定义在 $G$ 上,且 $f(z)\to A, g(z)\to B(z\to z_0)$,则有:

(1) $[f(z)\pm g(z)]\to A\pm B(z\to z_0)$;

(2) $[f(z)\cdot g(z)]\to AB(z\to z_0)$;

(3) $\dfrac{f(z)}{g(z)}\to \dfrac{A}{B}(B\neq 0, z\to z_0)$.

**定理 1.2** 若 $f(z)=u(x,y)+v(x,y), z\in G, z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$ 是 $G$ 的聚点,则 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=A$ 的充分必要条件是

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)=\mathrm{Re}(A) \text{ 且} \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)=\mathrm{Im}(A).$$

该定理告诉我们:复变函数的极限的存在性等价于其实部和虚部两个二元实变函数极限的存在性,于是将求复变函数的极限问题转化为求两个二元实变函数的极限问题.

## 1.4.3 复变函数的连续性

**定义 1.5** 设 $w=f(z)(z\in G)$, $z_0$ 为 $G$ 的聚点且 $z_0\in G$, 若

$$\lim_{\substack{z\to z_0\\ (z\in G)}} f(z)=f(z_0),$$

则称 $f(z)$在点 $z_0$ 连续. 若 $f(z)$在 $G$ 中每一点都连续,则称 $f(z)$在 $G$ 上连续.

**定理 1.3** 函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$在点 $z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$ 连续的充分必要条件是 $u(x,y)$与 $v(x,y)$同时在点$(x_0,y_0)$连续.

与高等数学中的一元连续函数一样,由连续的定义可类似地获得以下结论:

**定理 1.4** 若 $f(z)$与 $g(z)$均 在点 $z_0$ 连续,则 $f(z)\pm g(z), f(z)\cdot g(z), \dfrac{f(z)}{g(z)}[g(z_0)\neq 0]$在点 $z_0$ 也连续.

**定理 1.5** 若函数 $h=g(z)$在点 $z_0$ 连续,函数 $w=f(h)$在 $h_0=g(z_0)$连续,那么复合函数 $w=f(g(z))$在点 $z_0$ 也连续.

在有界闭区域 $\overline{D}$ 上的连续函数 $f(z)$在 $\overline{D}$ 上为有界函数,即存在有限正数 $M$,使得

$$|f(z)\leqslant M|\ (z\in\overline{D}).$$

## 习题 1

1. 求下列复数的实部与虚部、共轭复数、模与辐角：

(1) $\dfrac{1}{\mathrm{i}}-\dfrac{3\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$；

(2) $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}\right)^5$；

(3) $\mathrm{i}^8+4\mathrm{i}^{21}+\mathrm{i}$；

(4) $(1+2\mathrm{i})(2+\sqrt{3}\mathrm{i})$.

2. 设 $z_1=\dfrac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}$，$z_2=\sqrt{3}-\mathrm{i}$，试用指数式表示 $z_1z_2$，$\dfrac{z_1}{z_2}$.

3. 求下列各式的值：

(1) $(\sqrt{3}-\mathrm{i})^5$；

(2) $\sqrt[6]{-1}$；

(3) $(-1+\mathrm{i})^{10}$.

4. 求方程 $z^4+a^4=0$($a$ 是正实数) 的根.

5. 将下列方程($t$ 为实参数) 给出的曲线用一个实直角坐标系方程给出.

(1) $z=t(1+\mathrm{i})$；

(2) $z=a\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}+b\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}$；

(3) $z=t+\dfrac{\mathrm{i}}{t}$；

(4) $z=t^2+\dfrac{\mathrm{i}}{t^2}$.

6. 下列各题中表示点 $z$ 的轨迹的图形是什么?它是不是区域?

(1) $\mathrm{Re}(z+2)=-1$；

(2) $|z+2\mathrm{i}|\geqslant 1$；

(3) $|z+\mathrm{i}|=|z-\mathrm{i}|$；

(4) $\arg(z-\mathrm{i})=\dfrac{\pi}{4}$；

(5) $|z+3|+|z+1|=4$；

(6) $0<\arg z<\pi$；

(7) $\left|\dfrac{z-3}{z-2}\right|\geqslant 1$.

7. 在映射 $w=z^2$ 下，区域 $0<\arg z<\dfrac{\pi}{4}$($|z|<1$)映射为什么样的区域?

8. 求下列函数的定义域，并判断这些函数在定义域内是否为连续函数.

(1) $w=|z|$；

(2) $w=\dfrac{z+1}{(z+2)^2+1}$.

9. 试证：函数 $f(z)=z$ 在 $z$ 平面上处处连续.

10. 试证：$\arg z(-\pi<\arg z\leqslant\pi)$ 在负实轴上(包括原点)不连续，除此而外在 $z$ 平面上处处连续.

11. 设函数 $f(z)$ 在点 $z_0$ 处连续，且 $f(z_0)\neq 0$，证明：存在 $z_0$ 的邻域使 $f(z)\neq 0$.

# 第 2 章 解析函数

解析函数是复变函数中的实、虚部具有特殊关系的一类函数，它的性质在理论和实际问题中有着广泛的应用，是复变函数研究的主要对象. 本章在介绍复变函数导数和求导法则的基础上，首先介绍解析函数的概念和判定方法，然后介绍一些常用的初等函数，说明它们的解析性.

## 2.1 解析函数的概念与柯西－黎曼条件

**定义 2.1** 给定在区域 $D$ 上有定义的复变函数 $w=f(z)$，取 $D$ 中一点 $z$，任意取定 $\Delta z\neq 0$，且使 $z+\Delta z\in D$，设

$$\Delta w=\Delta f=f(z+\Delta z)-f(z),$$

若极限

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

为一个有限复数，则称此极限为函数 $f(z)$ 在点 $z$ 的**导数**，记作：$f'(z)$，即

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}. \tag{2-1}$$

用不等式描述式(2-1)为：任意给定 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $0<|\Delta z|<\delta$，且 $z+\Delta z\in D$ 时，恒有

$$\left|\frac{\Delta w}{\Delta z}-f'(z)\right|<\varepsilon,$$

则称 $f(z)$ 在点 $z$ 处**可导**，$f'(z)$ 称为 $f(z)$ 在点 $z$ 的导数.

这是一个构造性定义，不但定义了导数，还提供了求导数的方法. 定义中的 $\Delta z\neq 0$，且 $z+\Delta z\in D$ 和 $\Delta z\to 0$ 是关键性条件. 由 $\Delta z\neq 0$，$z+\Delta z\in D$ 得到了比值 $\frac{\Delta w}{\Delta z}$；再由 $\Delta z\to 0$，求比值 $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ 的极限(而非极限的比)，$\Delta z$ 的这两大作用完成了导数的定义. 导数建立后，$\Delta z$ 便消失了. 我们不能仅仅认为 $\Delta z$ 曾经存在过而现在不存在，而应深刻理解它在导数定义中的重要作用，这对今后研究解析函数具有重要意义.

需要注意的是，同第 1 章复变函数极限的定义类似，该定义中 $\Delta z\to 0$(即 $z+\Delta z\to z$) 的方式是任意的，极限存在的要求与 $\Delta z\to 0$ 的路径和方式无关. 也就是说，$\Delta z$ 在 $D$ 内沿任何路径以任何方式趋于 0 时，比值 $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ 都趋于同一常数，才能说 $f(z)$ 在 $z$ 可导. 这一点与实变函数有显著不同，在一元实变函数导数的定义中，$\Delta x$ 只是在数轴上的左、右两侧趋于 0. 显然，当 $\Delta z$ 在 $D$ 内沿两条不同路径趋于 0 时，比值 $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ 趋于不同的常数，或当 $\Delta z$ 在 $D$ 内沿某一路径趋于 0 时，比值

$\frac{\Delta w}{\Delta z}$不能趋于一个确定的常数，那么 $f(z)$在 $z$ 处不可导.

若令 $\zeta = z+\Delta z$，则式(2-1)又可写成

$$\lim_{\zeta \to z}\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z} = f'(z). \tag{2-2}$$

如果 $f(z)$在区域$D$ 内每点都可导，那么称 $f(z)$在区域$D$ 内可导.

**【例 2.1】** 证明：函数 $f(z)=\mathrm{Re}\,z$ 在 $z$ 平面每点都不可导.

**证明** 对 $z$ 平面上任一点 $z=x+\mathrm{i}y$ 有 $\Delta z=\Delta x+\mathrm{i}\Delta y$，从而

$$\frac{\Delta f}{\Delta z}=\frac{\mathrm{Re}(z+\Delta z)-\mathrm{Re}\,z}{\Delta z}=\frac{(x+\Delta x)-x}{\Delta x+\mathrm{i}\Delta y}=\frac{\Delta x}{\Delta x+\mathrm{i}\Delta y}.$$

当 $\Delta z$ 取实数趋于0(即 $z+\Delta z$ 沿平行于实轴的方向趋于$z$)时，$\frac{\Delta f}{\Delta z}\to 1$；当 $\Delta z$ 取纯虚数趋于0(即$z+\Delta z$沿平行于虚轴的方向趋于$z$)时，$\frac{\Delta f}{\Delta z}\to 0$，这表明极限$\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z}$不存在，即 $\mathrm{Re}\,z$ 在点$z$ 不可导，由 $z$ 的任意性知，$\mathrm{Re}\,z$ 在 $z$ 平面上每点不可导.

显然 $\mathrm{Re}\,z$ 在 $z$ 平面上每点都连续. 在复变函数中，处处连续而处处不可导的函数几乎随手可得，而在实变函数中，要找这样一个函数，却是不容易办到的.

**定理 2.1** 若函数 $f(z)$在点 $z$ 可导，则 $f(z)$在点 $z$ 连续.

**证明** 由于

$$f(\zeta)-f(z)=\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}(\zeta-z),$$

两边取极限，由 $f(z)$在点 $z$ 可导，得

$$\lim_{\zeta\to z}[f(\zeta)-f(z)]=f'(z)\cdot 0=0,$$

即

$$\lim_{\zeta\to z}f(\zeta)=f(z),$$

从而 $f(z)$在点 $z$ 连续.

由例2.1知，该定理的逆定理显然不成立.

**【例 2.2】** 设 $f(z)=z^2$，则 $f'(z)=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{(z+\Delta z)^2-z^2}{\Delta z}=\lim\limits_{\Delta z\to 0}(2z+\Delta z)=2z$.

由导数的定义还可以推出：对任意正整数 $n$，$z^n$ 在 $z$ 平面上可导，且 $(z^n)'=nz^{n-1}$，该结论可作为公式使用. 事实上，由于复变函数中导数的定义与一元实变函数中导数的定义在形式上完全相同，而且复变函数中的极限运算法则也和一元实变函数相同，因而一元实变函数中的求导法则都可以不加更改地推广到复变函数中来，而且证法也是相同的，现将几个常用的复变函数求导法则罗列如下：

(1) 复常数 $c$ 的导数为0，即$c'=0$；

(2) $(z^n)' = nz^{n-1}$, $n$ 为正整数;

(3) 可导函数的和、差、积、商仍可导,有

$$[f(z)\pm g(z)]' = f'(z)\pm g'(z),$$

$$[f(z)\cdot g(z)]' = f'(z)g(z)+f(z)g'(z),$$

$$\left[\frac{f(z)}{g(z)}\right]' = \frac{f'(z)g(z)-f(z)g'(z)}{g^2(z)}, g(z)\neq 0;$$

(4) 可导函数的复合函数仍可导,有$F'[f(z)] = F'(w)f'(z)$,其中 $w = f(z)$;

(5) 反函数求导法则 $f'(z) = \dfrac{1}{\varphi'(w)}$,其中,$w = f(z)$与$z = \varphi(w)$是两个互为反函数的单值函数,且$\varphi'(w)\neq 0$.

显然,复有理多项式函数

$$P(z) = a_0z^n + a_1z^{n-1} + \cdots + a_n \quad (a_0 \neq 0)$$

在复平面处处可导. 复有理分式函数

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{a_0z^n + a_1z^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0z^m + b_1z^{m-1} + \cdots + b_m} \quad (a_0 \neq 0, b_0 \neq 0)$$

在除使分母 $Q(z) = 0$ 的各点外处处可导.

【例 2. 3】 已知 $f(z) = (z^2 - 2z + \mathrm{i})^3$,求 $f'(0)$.

解 根据求导法则,有 $f'(z) = 3(z^2 - 2z + \mathrm{i})^2(2z-2)$, $f'(0) = 6$.

【例 2. 4】 判断函数 $g(z) = \dfrac{z}{z^2+1}$ 在哪些点可导,并写出函数在可导点处的导数.

解 $g(z) = \dfrac{z}{z^2+1}$ 在复平面上 $z\neq\pm\mathrm{i}$ 的点均可导,根据求导法则有

$$g'(z) = \frac{z'(z^2+1) - z(z^2+1)'}{(z^2+1)^2} = \frac{1-z^2}{(z^2+1)^2}.$$

[注意] 许多情形不能用求导法则来求导,如 $f(z) = z + \mathrm{Im}\, z$, $f(z) = \mathrm{Re}\, z$ 等,需用其他方法来讨论函数的可导性.

下面给出复变函数微分的概念.

设函数 $w = f(z)$在点 $z$ 可导,于是

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z),$$

即

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z) + \alpha,$$

其中$\lim\limits_{\Delta z\to 0}\alpha = 0$,从而有

$$\Delta w = f'(z)\Delta z + \alpha\Delta z, \tag{2-3}$$

其中$|\alpha\Delta z|$为比 $|\Delta z|$ 高阶的无穷小,而 $f'(z)\Delta z$ 是函数 $w = f(z)$的改变量 $\Delta w$ 的线性部分,

称 $f'(z)\Delta z$ 为 $w=f(z)$ 在点 $z$ 的**微分**，记作：$\mathrm{d}w$ 或 $\mathrm{d}f(z)$，即

$$\mathrm{d}w=f'(z)\Delta z, \tag{2-4}$$

此时也称函数 $f(z)$ 在 $z$ 处**可微**.

特别地，当 $f(z)=z$ 时，$f'(z)=1$，代入 $\mathrm{d}w=f'(z)\Delta z$ 中，得 $\mathrm{d}z=\Delta z$，从而式(2-4)变为

$$\mathrm{d}w=f'(z)\mathrm{d}z,$$

即有

$$f'(z)=\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}.$$

由此可见，$f(z)$ 在 $z$ 可导与 $f(z)$ 在 $z$ 可微是等价的.

在定义了复变函数 $f(z)$ 的导数、微分的概念后，下面进一步探讨 $f(z)$ 在 $z$ 处可导的条件. 若 $w=f(z)$ 在点 $z$ 可导，则由式(2-3)知

$$\Delta f=\Delta w=f'(z)\Delta z+\alpha\Delta z,$$

其中 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\alpha=0$，进一步设 $\Delta f=\Delta u+\mathrm{i}\Delta v$，$f'(z)=a+\mathrm{i}b$，$\Delta z=\Delta x+\mathrm{i}\Delta y$，则有

$$\Delta u+\mathrm{i}\Delta v=(a+\mathrm{i}b)(\Delta x+\mathrm{i}\Delta y)+\alpha\Delta z=(a\Delta x-b\Delta y)+\mathrm{i}(b\Delta x+a\Delta y)+\alpha\Delta z.$$

比较上式的实部与虚部可得

$$\Delta u=a\Delta x-b\Delta y+\mathrm{Re}(\alpha\Delta z),\Delta v=b\Delta x+a\Delta y+\mathrm{Im}(\alpha\Delta z).$$

这里 $\mathrm{Re}(\alpha\Delta z)$ 及 $\mathrm{Im}(\alpha\Delta z)$ 都是关于 $|\Delta z|=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ 的高阶无穷小，以 $\mathrm{Re}(\alpha\Delta z)$ 为例，由

$$\frac{|\mathrm{Re}(\alpha\Delta z)|}{|\Delta z|}\leqslant\frac{|\alpha\Delta z|}{|\Delta z|}=|\alpha|\xrightarrow[|\Delta z|\to 0]{}0,$$

知 $\mathrm{Re}(\alpha\Delta z)$ 是关于 $|\Delta z|$ 的高阶无穷小，故 $u(x,y)$，$v(x,y)$ 在点 $(x,y)$ 皆可微，并且有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=a,\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}=-b.$$

事实上，有如下重要的定理：

**定理 2.2**　设 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 是定义在区域 $D$ 上的函数，则在 $D$ 内一点 $z=x+\mathrm{i}y$ 可导的充要条件是：在点 $(x,y)$ 处，$u$，$v$ 皆可微，并且满足条件

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y},\\[2ex]\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x},\end{cases} \tag{2-5}$$

这里 $u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$.

**证明**　定理的必要性前面已证，下面证明其充分性. 若 $u(x,y)$，$v(x,y)$ 在点 $(x,y)$ 处皆可微，则有

$$\Delta u=\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+\alpha_1,\quad \Delta v=\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y+\alpha_2,$$

其中，$\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{\alpha_1}{\rho}=0$，$\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{\alpha_2}{\rho}=0\left(\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\right)$，记$\frac{\partial u}{\partial x}=a$，$\frac{\partial v}{\partial x}=b$，根据式(2-5)有$\frac{\partial u}{\partial y}=-b$，$\frac{\partial v}{\partial y}=a$，从而

$$\begin{aligned}\Delta f&=\Delta u+\mathrm{i}\Delta v=(a\Delta x-b\Delta y)+\mathrm{i}(b\Delta x+a\Delta y)+\alpha_1+\mathrm{i}\alpha_2\\&=(a+\mathrm{i}b)(\Delta x+\mathrm{i}\Delta y)+\alpha_1+\mathrm{i}\alpha_2,\end{aligned}$$

两端同除以 $\Delta z$，得

$$\frac{\Delta f}{\Delta z}=a+\mathrm{i}b+\frac{\alpha_1+\mathrm{i}\alpha_2}{\Delta z}.$$

因为

$$\left|\frac{\alpha_1+\mathrm{i}\alpha_2}{\Delta z}\right|\leqslant\frac{|\alpha_1|}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}+\frac{|\alpha_2|}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\xrightarrow[|\Delta z|\to 0]{}0,$$

故

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\alpha_1+\mathrm{i}\alpha_2}{\Delta z}=0,$$

从而有

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z}=a+\mathrm{i}b,$$

故 $f(z)$在点 $z=x+\mathrm{i}y$ 可导，从而定理 2.2 的充分性得证.

式(2-5)称为**柯西-黎曼**(Cauchy-Riemann)条件，简称为C-R条件，它表示可导函数的实部与虚部有着特别的联系.

由第 1 章的知识知，复变函数的极限与连续性均等价于两个二元实变函数(函数的实部与虚部)的极限与连续性，但由定理 2.2 知，函数 $f(z)$的可导性，并不等价于两个二元实变函数 $\mathrm{Re}f(z)$与 $\mathrm{Im}f(z)$的可微性，因此可导的概念在复变函数的研究中起着分水岭的作用.

**推论 2.1** 若 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 在点 $z=x+\mathrm{i}y$ 处可导，则有

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}-\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}.\tag{2-6}$$

从定理 2.2 的证明中看出推论 2.1 成立.

**推论 2.2** 设函数 $f(z)=u+\mathrm{i}v$，若 $u$，$v$ 在点$(x,y)$的四个一阶偏导数都连续且满足 C-R 条件，则 $f(z)$在点 $z=x+\mathrm{i}y$ 处可导.

事实上，根据高等数学课程中的相关知识，当 $u$，$v$ 在点$(x,y)$有一阶连续偏导数时，$u$，$v$ 在点$(x,y)$可微，再由定理 2.2 知，推论 2.2 成立.

还需注意："$u(x,y)$，$v(x,y)$可微"和"$u(x,y)$，$v(x,y)$满足 C-R 条件"二者是相互独立的，这可从下面的一些例题中看出.

**【例 2.5】** 设 $f(z)=\bar{z}=x-\mathrm{i}y$，$u=x$，$v=-y$，可求得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=1,\frac{\partial u}{\partial y}=0,\frac{\partial v}{\partial x}=0,\frac{\partial v}{\partial y}=-1.$$

显然，$u$，$v$ 处处不满足 C-R 条件，故 $f(z)=\bar{z}$ 处处不可导.

【例 2.6】 设 $f(z)=z\mathrm{Re}\,z=x^2+\mathrm{i}xy$，$u=x^2$，$v=xy$，可求得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x,\frac{\partial u}{\partial y}=0,\frac{\partial v}{\partial x}=y,\frac{\partial v}{\partial y}=x.$$

显然，四个偏导数处处连续，但 $u,v$ 仅在点$(0,0)$满足 C-R 条件，故 $f(z)=z\mathrm{Re}z$ 仅在点 $z=0$ 可导，且 $f'(0)=0$.

【例 2.7】 设 $f(z)=\sqrt{|\mathrm{Im}\,z^2|}=\sqrt{|2xy|}$，证明：$u=\sqrt{|2xy|}$，$v=0$ 在点$(0,0)$满足 C-R 条件，但在点 $z=0$，$f(z)$不可导.

证明　在点$(0,0)$有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(\Delta x,0)-u(0,0)}{\Delta x}=0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{u(0,\Delta y)-u(0,0)}{\Delta y}=0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0,$$

这说明 $u,v$ 在点$(0,0)$满足 C-R 条件.

在 $z=0$ 处有

$$\frac{\Delta f}{\Delta z}=\frac{f(\Delta z)-f(0)}{\Delta z}=\frac{\sqrt{|2\Delta x\Delta y|}}{\Delta x+\mathrm{i}\Delta y},$$

取 $\Delta z$ 沿直线 $y=kx$ 趋于 0 时，有

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y=k\Delta x}}\frac{\Delta f}{\Delta z}=\frac{\sqrt{|2k(\Delta x)^2|}}{\Delta x+\mathrm{i}k\Delta x}=\frac{\pm\sqrt{2|k|}}{1+\mathrm{i}k},$$

该值与 $k$ 有关，随着 $k$ 的变化而变化，这说明 $f(z)=\sqrt{|\mathrm{Im}\,z^2|}$ 在点 $z=0$ 不可导.

由定理 2.2 可断定 $u,v$ 在$(0,0)$点至少有一个不可微，这里是 $u$ 在$(0,0)$点不可微.

定义 2.2　若函数 $f(z)$在点 $z_0$ 的某一个邻域内可导，则称 $f(z)$在点 $z_0$ 解析. 若函数 $f(z)$在区域 $D$ 内的每一点都解析，则称 $f(z)$在区域 $D$ 内解析.

设$\overline{D}$为闭区域，若存在区域 $G$，使$\overline{D}\subset G$ 且函数 $f(z)$在 $G$ 内解析，则称 $f(z)$在$\overline{D}$解析.

由于区域的每点都是内点，所以函数在区域内解析与函数在区域内可导是等价的. 然而，函数在某一点处解析与函数在该点处可导不是等价的. 事实上，若函数 $f(z)$在点 $z_0$ 解析，则 $f(z)$必在点 $z_0$ 可导，但反过来未必成立. 因为 $f(z)$在点 $z_0$ 解析，不仅要求 $f(z)$在 $z_0$ 可导，而且要求 $f(z)$在 $z_0$ 的某一个邻域内可导. 所以，函数在某一点解析比函数在该点可导的要求高得多. 如在例 2.6 中，$f(z)=z\mathrm{Re}\,z$ 仅在点 $z=0$ 处可导，在点 $z=0$ 处不解析，因为 $f(z)$在 0 的任何邻域内都不可导，显然 $f(z)=z\mathrm{Re}z$ 没有解析点，是复平面上处处不解析的函数.

在区域 $D$ 内，除了某些例外点外，$f(z)$在 $D$ 内各点解析，则称这些例外点为 $f(z)$的奇点. 例如，$z=\mathrm{i}$，$z=-\mathrm{i}$ 都是函数$\dfrac{1}{1+z^2}$的奇点.

【例 2.8】 研究函数 $f(z)=\dfrac{1}{z}$ 的解析性.

解 $f(z)=\dfrac{1}{z}$ 除原点外处处可导,且有 $f'(z)=-\dfrac{1}{z^2}$,故 $f(z)=\dfrac{1}{z}$ 在去掉原点的复平面内解析,$z=0$ 是它的一个奇点.

【例 2.9】 设函数 $f(z)=2\sin x+\mathrm{i}y^2$,解答下列问题:

(1)$f(z)$在复平面上的哪些点可导?

(2) 写出 $f(z)$在可导点处的导数;

(3)$f(z)$在复平面上的哪些点解析?

解 (1)$u=2\sin x, v=y^2$,有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2\cos x,\frac{\partial u}{\partial y}=0,\frac{\partial v}{\partial x}=0,\frac{\partial v}{\partial y}=2y,$$

这四个偏导数处处连续. 又根据$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y},\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$,得 $2\cos x=2y$,即 $y=\cos x$,故 $f(z)$在 $y=\cos x$ 上可导.

(2)$f'(z)=\dfrac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\dfrac{\partial v}{\partial x}=2\cos x$.

(3) 根据解析的定义,$f(z)$无解析点,从而 $f(z)$在复平面上处处不解析.

容易得到下面的定理.

**定理 2.3** 若函数 $f(z),g(z)$皆在区域 $D$ 内解析,则 $f(z)\pm g(z),f(z)\cdot g(z),\dfrac{f(z)}{g(z)}[g(z)\neq 0]$ 也在区域 $D$ 内解析.

**定理 2.4** 设 $\zeta=f(z)$在 $z$ 平面上的区域 $D$ 内解析,$w=F(\zeta)$在 $\zeta$ 平面上的区域 $D_1$ 内解析,当 $z\in D$ 时,$\zeta=f(z)\in D_1$,则 $w=F[f(z)]$在 $D$ 内也解析.

定理 2.3 和定理 2.4 表明:区域内解析函数的和、差、积、商、复合仍是区域内的解析函数. 由定理 2.2 以及函数在区域内解析与可导的等价关系可推出如下定理.

**定理 2.5** 函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$在区域 $D$ 内解析的充要条件是:$u(x,y)$与 $v(x,y)$在区域 $D$ 内皆可微且满足 C-R 条件.

显然,对于函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$,若 $u(x,y)$与 $v(x,y)$在区域 $D$ 内具有一阶连续偏导数,且满足 C-R 条件,则 $f(z)$在区域 $D$ 内解析.

【例 2.10】 设函数 $f(z)=(ax^3-3xy^2-2x)+\mathrm{i}(bx^2y-y^3-2y)$,试确定 $a,b$ 的值,使 $f(z)$成为整个复平面上的解析函数.

解 由 $u=ax^3-3xy^2-2x, v=bx^2y-y^3-2y$,可求得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3ax^2-3y^2-2,\frac{\partial u}{\partial y}=-6xy,\frac{\partial v}{\partial x}=2bxy,\frac{\partial v}{\partial y}=bx^2-3y^2-2.$$

显然对任意实数 $a,b$，这四个偏导数处处连续，又根据$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$，得

$$\begin{cases}3ax^2-3y^2-2=bx^2-3y^2-2,\\-6xy=-2bxy,\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}a=1,\\b=3.\end{cases}$$

故当 $a=1,b=3$ 时，$u,v$ 处处满足 C-R 条件，从而当 $a=1,b=3$ 时，$f(z)$是整个复平面上的解析函数.

**【例 2.11】** 设函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$在区域$D$ 内解析，而且满足下列条件之一，则 $f(z)$在 $D$ 内为常数.

(1) 在 $D$ 内成立 $f'(z)=0$；

(2) $|f(z)|$ 在 $D$ 内恒为常数；

(3) $\overline{f(z)}$ 在 $D$ 内解析.

**证明** (1) 对 $D$ 内任意一点 $z=x+\mathrm{i}y$，有 $f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}=0$，即有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=0,$$

故 $u(x,y)=C_1$(常数)，$v(x,y)=C_2$(常数)，从而 $f(z)=C_1+\mathrm{i}C_2$，即 $f(z)$在$D$ 内为常数.

(2) 由于$|f(z)|=C$(常数)，于是$\sqrt{u^2+v^2}=C$，即有

$$u^2+v^2=C^2,$$

在此式两边分别对 $x$ 和 $y$ 求偏导，有

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial x}=0, \tag{2-7}$$

$$u\frac{\partial u}{\partial y}+v\frac{\partial v}{\partial y}=0. \tag{2-8}$$

又 $f(z)$在$D$ 内解析，故$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$，代入式(2-7) 和式(2-8) 之中，得

$$u\frac{\partial v}{\partial y}+v\frac{\partial v}{\partial x}=0,\quad -u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=0,$$

这两个方程组成以$\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y}$为未知元的二元齐次线性方程组，即

$$\begin{cases}v\frac{\partial v}{\partial x}+u\frac{\partial v}{\partial y}=0,\\-u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=0,\end{cases}$$

其系数行列式为$\begin{vmatrix} v & u \\ -u & v \end{vmatrix}=u^2+v^2$.

若$u^2+v^2=0$，得$u=v=0$，此时$f(z)=0$，即$f(z)$在$D$内为常数0.

若$u^2+v^2\neq 0$，则该方程组只有零解，即$\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}=0$. 又由C-R条件，可得$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$，故$u(x,y)=C_1$(常数)，$v(x,y)=C_2$(常数)，于是$f(z)=C_1+\mathrm{i}C_2$，即$f(z)$在$D$内为常数.

(3) 因$f(z)=u+\mathrm{i}v$与$\overline{f(z)}=u-\mathrm{i}v$在$D$均解析，故有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x};\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial(-v)}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial(-v)}{\partial x},$$

由此得$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$，从而可知$u(x,y)=C_1$(常数)，$v(x,y)=C_2$(常数)，于是$f(z)=C_1+\mathrm{i}C_2$，$f(z)$在$D$内为常数.

由例2.11中(3)的结论知，当$f(z)$在$D$内不为常数时，$f(z)$与$\overline{f(z)}$不能同时在$D$内解析.

# 2.2 初等函数

本节把微积分中的实变初等函数推广到复变函数的情形，研究复变初等函数保持了实变初等函数的哪些性质，又产生了哪些新的性质，并讨论它们的解析性.

## 2.2.1 指数函数

对于复变数$z=x+\mathrm{i}y$，定义**指数函数**为

$$w=\mathrm{e}^z={}^{x+\mathrm{i}y}=\mathrm{e}^x(\cos y+\mathrm{i}\sin y). \tag{2-9}$$

在式(2-9)中，令$x=0$，便得欧拉公式

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}=\cos y+\mathrm{i}\sin y.$$

指数函数具有如下性质：

(1) 对任何复数$z$，$\mathrm{e}^z\neq 0$. 实际上$|\mathrm{e}^z|=\mathrm{e}^x>0$.

(2) $z$为实数$x$时，$w=\mathrm{e}^z=\mathrm{e}^x$. 实际上令$y=0$，得$\mathrm{e}^z=\mathrm{e}^x$.

(3) $\mathrm{e}^{-z}=\dfrac{1}{\mathrm{e}^z}$. 其实

$$e^{-z}=e^{-x-iy}=e^{-x}[\cos(-y)+i\sin(-y)]$$
$$=\frac{1}{e^{x}}(\cos y-i\sin y)=\frac{1}{e^{x}}\frac{1}{\cos y+i\sin y}=\frac{1}{e^{z}}.$$

(4) 对任何复数 $z_1$ 和 $z_2$，有

$$e^{z_1}\cdot e^{z_2}=e^{z_1+z_2}. \tag{2-10}$$

设 $z_1=x_1+iy_1, z_2=x_2+iy_2$，则

$$\begin{aligned}e^{z_1}\cdot e^{z_2}&=e^{x_1+iy_1}\cdot e^{x_2+iy_2}\\&=e^{x_1}(\cos y_1+i\sin y_1)\cdot e^{x_2}(\cos y_2+i\sin y_2)\\&=e^{x_1+x_2}[\cos(y_1+y_2)+i\sin(y_1+y_2)]\\&=e^{z_1+z_2}.\end{aligned}$$

(5) 对任何复数 $z_1$ 和 $z_2$，有

$$\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}}=e^{z_1}\cdot e^{-z_2}=e^{z_1-z_2}. \tag{2-11}$$

(6)$w=e^z$ 是周期函数,周期为 $2k\pi i(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

事实上,对任何复数 $z$,$e^{z+\gamma}=e^z$ 的充要条件是:$\gamma=2k\pi i$，其中 $k$ 为任一整数.

(必要性) 若 $e^{z+\gamma}=e^z$，则 $e^\gamma=1$，令 $\gamma=\alpha+i\beta$，有

$$e^{\alpha}(\cos\beta+i\sin\beta)=1,$$

于是 $e^\alpha=1,\beta=2k\pi$，从而 $\alpha=0$，得 $\gamma=2k\pi i$.

(充分性) 反之,对 $\gamma=2k\pi i$($k$ 为任一整数) 有

$$e^{z+\gamma}=e^{z+2ki}=e^{z}e^{2ki}=e^{z}(\cos 2k\pi+i\sin 2k\pi)=e^{z}.$$

$w=e^z$ 是周期函数,这个性质是实变指数函数 $y=e^x$ 所没有的.

(7)$w=e^z$ 在整个 $z$ 平面上解析,且有

$$(e^z)'=e^z. \tag{2-12}$$

实际上,对复平面上的任意点 $z=x+iy$，设 $e^z=u+iv$，由 $e^z=e^x(\cos y+i\sin y)$知

$$u=e^x\cos y, v=e^x\sin y,$$

可求得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^x\cos y,\frac{\partial u}{\partial y}=-e^x\sin y,\frac{\partial v}{\partial x}=e^x\sin y,\frac{\partial v}{\partial y}=e^x\cos y.$$

$u,v$ 的一阶偏导数处处连续,又

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=e^x\cos y,\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}=-e^x\sin y.$$

故 $u,v$ 处处满足 C-R 条件,从而在整个 $z$ 平面上 $w=e^z$ 解析,而且对 $z$ 平面任一点 $z=x+iy$，有

$$(e^z)'=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=e^x(\cos y+i\sin y)=e^z.$$

由于 $w=e^z$ 有周期 $2k\pi i$，所以可研究 $z$ 在 $0<\mathrm{Im}\,z<2\pi$ 的带形域 $B$ 中变化时 $w=e^z$ 的映射性质.

设 $u=\mathrm{Re}\,w, v=\mathrm{Im}\,w$，则当 $z$ 从左向右描出一条直线 $L:\mathrm{Im}\,z=y_0$ 时，有 $w=e^{x+iy_0}$，于是 $|w|$ 从 0(不包括 0) 增加到 $+\infty$，而 $\mathrm{Arg}\,w=y_0$ 保持不变. 因此 $w$ 描出射线 $L_1:\mathrm{Arg}\,w=y_0$(不包括 $w=0$). 这样 $L$ 与 $L_1$ 上的点一一对应. 让 $y_0$ 从 0(不包括 0) 增加到 $2\pi$(不包括 $2\pi$)，那么直线 $L$ 扫过 $B$[见图 2-1(a)]，而相应的射线 $L_1$ 按逆时针方向从 $w$ 平面的正实轴(不包括正实轴)变到正实轴(不包括正实轴)[见图 2-1(b)]，由此可见，$w=e^z$ 把带形域 $B$ 映射到 $w$ 平面上去掉原点和正实轴的区域.

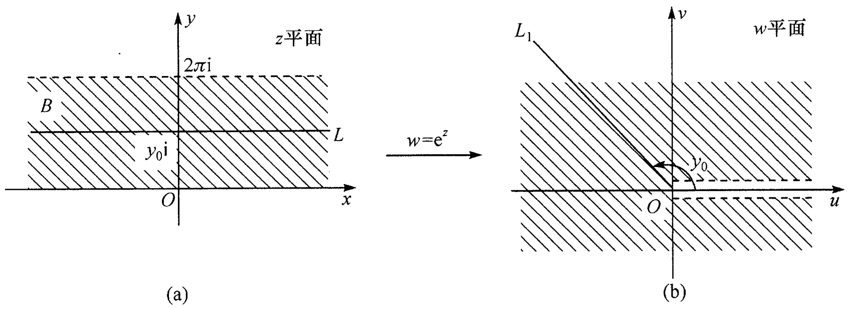


**图 2-1**

用同样的方法可知，函数 $w=e^z$ 把带形域 $B_\alpha:\alpha<\mathrm{Im}\,z<\alpha+2\pi$($\alpha$ 是任意实数)映射成 $w$ 平面上去掉原点和射线 $\mathrm{Arg}\,w=\alpha$ 的区域.

## 2.2.2 对数函数

与实变对数函数一样，复变对数函数也定义为复变指数函数的反函数. 也就是称满足方程 $z=e^w(z\neq 0)$ 的函数 $w=f(z)$ 为对数函数，记作：$w=\mathrm{Ln}\,z$.

令 $w=u+iv$，则 $z=e^{u+iv}=e^u\cdot e^{iv}=e^u(\cos v+i\sin v)$，从而

$$e^u=|z|, v=\mathrm{Arg}\,z,$$

故 $u=\ln|z|, v=\mathrm{Arg}\,z$，这样有

$$w=\mathrm{Ln}\,z=\ln|z|+i\mathrm{Arg}\,z=\ln|z|+i\arg z+2k\pi i\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots).\tag{2-13}$$

由于 $\mathrm{Arg}\,z$ 可取无穷多个值，所以 $w=\mathrm{Ln}\,z$ 是一个无穷多值函数，其中任意两个相异值之差为 $2\pi i$ 的整数倍. 在式(2-13)中，对于每一个固定的 $k$，便得到一个单值函数，称为 $\mathrm{Ln}\,z$ 的一个分支. 称 $\ln z=\ln|z|+i\arg z$ 为 $w=\mathrm{Ln}\,z$ 的主值. 这样便有

$$w=\mathrm{Ln}\,z=\ln z+2k\pi i\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots).\tag{2-14}$$

当 $z=x>0$ 时，$\mathrm{Ln}\,z$ 的主值 $\ln z=\ln x$ 就是实变对数函数.

**【例 2.12】** $\mathrm{Ln}(1+i)=\ln|1+i|+i\mathrm{Arg}(1+i)=\frac{1}{2}\ln 2+i\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

$\mathrm{Ln}\,2=\ln|2|+\mathrm{i}\,\mathrm{Arg}\,2=\ln 2+\mathrm{i}\arg 2+2k\pi\mathrm{i}=\ln 2+2k\pi\mathrm{i}\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

$\mathrm{Ln}(-2)=\ln|-2|+\mathrm{i}\,\mathrm{Arg}(-2)=\ln 2+\mathrm{i}\arg(-2)+2k\pi\mathrm{i}=\ln 2+(2k+1)\pi\mathrm{i}\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

在实变函数中，负数无对数，这个事实在复数范围内不再成立，而且正实数的对数也是无穷多值的. 显然，如果 $z$ 为正实数 $x$，那么

$$\mathrm{Ln}\,x=\ln x+2k\pi\mathrm{i}\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots);$$

如果 $z$ 为负实数 $x$，那么

$$\mathrm{Ln}x=\ln|x|+(2k+1)\pi\mathrm{i}\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

【例 2.13】 解方程：$\mathrm{e}^z+5=0$.

**解** $\mathrm{e}^z=-5, z=\mathrm{Ln}(-5)=\ln 5+(2k+1)\pi\mathrm{i}(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

设两个复数 $z_1,z_2$ 满足 $z_1\cdot z_2\neq 0$，则有

$$\begin{aligned}\mathrm{Ln}(z_1z_2)&=\ln|z_1z_2|+\mathrm{i}\,\mathrm{Arg}(z_1z_2)=\ln|z_1|+\ln|z_2|+\mathrm{i}\,\mathrm{Arg}\,z_1+\mathrm{i}\,\mathrm{Arg}\,z_2\\&=\mathrm{Ln}\,z_1+\mathrm{Ln}\,z_2,\end{aligned}$$

$$\mathrm{Ln}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\mathrm{Ln}|z_1|-\mathrm{Ln}|z_2|+\mathrm{i}\,\mathrm{Arg}\,z_1-\mathrm{i}\,\mathrm{Arg}\,z_2=\mathrm{Ln}\,z_1-\mathrm{Ln}\,z_2.$$

就 $\mathrm{Ln}\,z$ 的主值 $\ln z=\ln|z|+\mathrm{i}\arg z$ 而言，其中的 $\ln|z|$ 除原点外在其他点都是连续的，而由前文可知，$\arg z$ 除原点和负实轴外在其他点都是连续的，因此主值 $w=\ln z$ 在 $z$ 平面上去掉原点和负实轴的区域内连续. 由于 $w=\ln z$ 与 $z=\mathrm{e}^w$ 在区域 $-\pi<\arg z=\mathrm{Im}\,w<\pi$ 内是互为反函数的单值函数，根据反函数求导法则知

$$\frac{\mathrm{d}\ln z}{\mathrm{d}z}=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^w}{\mathrm{d}w}}=\frac{1}{\mathrm{e}^w}=\frac{1}{z},$$

所以 $w=\ln z$ 在 $z$ 平面上去掉原点和负实轴的区域内解析，而由式(2-14)知，$w=\mathrm{Ln}\,z$ 的各个分支在 $z$ 平面上去掉原点和负实轴的区域内也解析，且导数为 $(\mathrm{Ln}\,z)'=\dfrac{1}{z}$.

## 2.2.3 一般幂函数与一般指数函数

在高等数学中，若 $a,b$ 是实数，$a>0$，则乘幂 $a^b=\mathrm{e}^{b\ln a}$，现在我们将此式推广到复数的情形. 若 $\alpha,\beta$ 是复数，$\alpha\neq 0$，则定义乘幂 $\alpha^\beta$ 为 $\mathrm{e}^{\beta\mathrm{Ln}\,\alpha}$，即有

$$\alpha^\beta=\mathrm{e}^{\beta\mathrm{Ln}\,\alpha}.$$

【例 2.14】 $1^{\sqrt2}=\mathrm{e}^{\sqrt2\,\mathrm{Ln}\,1}=\mathrm{e}^{\sqrt2(\ln 1+\mathrm{i}\arg 1+2k\pi\mathrm{i})}=\mathrm{e}^{2\sqrt2 k\pi\mathrm{i}}=\cos(2\sqrt2 k\pi)+\mathrm{i}\sin(2\sqrt2 k\pi)\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

$\mathrm{i}^\mathrm{i}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathrm{Ln}\mathrm{i}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\ln|\mathrm{i}|+\mathrm{i}\arg\mathrm{i}+2k\pi\mathrm{i})}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}(\frac{\pi}{2}+2k\pi)}=\mathrm{e}^{-(\frac{\pi}{2}+2k\pi)}\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

$$3^{i}=e^{i\mathrm{Ln}\,3}=e^{i\ln 3+i(2ki)}=e^{i\ln 3-2k\pi}\quad(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots).$$

### 2.2.3.1 一般幂函数

$$w=z^{\alpha}=e^{\alpha\mathrm{Ln}\,z}\quad(z\neq 0,\alpha\ \text{为复常数})$$

称为 $z$ 的一般幂函数.

(1) 当 $\alpha$ 为整数时,有

$$w=z^{\alpha}=e^{\alpha(\ln z+2k\pi i)}=e^{\alpha\ln z+2\alpha k\pi i}=e^{\alpha\ln z}\cdot e^{2\alpha k\pi i}=e^{\alpha\ln z}\quad(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots),$$

这里 $e^{2\alpha k\pi i}=\cos(2\alpha k\pi)+i\sin(2\alpha k\pi)=1$, 从而 $w=z^{\alpha}$ 是单值函数.

(2) 当 $\alpha$ 为有理数$\frac{m}{n}$(既约分数)时,有

$$\begin{aligned}w=z^{\frac{m}{n}}&=e^{\frac{m}{n}(\ln|z|+i\arg z+2k\pi i)}=e^{\frac{m}{n}\ln|z|+i\frac{m}{n}(\arg z+2k\pi)}\\&=\sqrt[n]{|z|^{m}}\left[\cos\frac{m(\arg z+2k\pi)}{n}+i\sin\frac{m(\arg z+2k\pi)}{n}\right],\end{aligned}\tag{2-15}$$

可以看出这是 $n$ 值函数,当 $k=0,1,2,\cdots,n-1$ 时,得到 $n$ 个不同的值,当 $k$ 取其他值时,得不到新的不同值.

在式(2-15)中,令 $m=1$, 便有

$$w=z^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\arg z+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\arg z+2k\pi}{n}\right).$$

(3) 当 $\alpha$ 为无理数或其他复数($\mathrm{Im}\,\alpha\neq 0$)时,$w=z^{\alpha}$ 是无穷多值函数. 事实上由

$$w=z^{\alpha}=e^{\alpha(\ln z+2k\pi i)}=e^{\alpha\ln z+2\alpha k\pi i}=e^{\alpha\ln z}\cdot e^{2\alpha k\pi i}\quad(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots),$$

对任意两相异整数$k_1$,$k_2$, 必有

$$e^{2\alpha k_1\pi i}\neq e^{2\alpha k_2\pi i}.$$

(反证法)否则,若 $e^{2\alpha k_1\pi i}=e^{2\alpha k_2\pi i}$, 则有

$$2k_1\alpha\pi i=2k_2\alpha\pi i+2k\pi i\quad(k\ \text{为整数}),$$

从而

$$\alpha=\frac{k}{k_1-k_2}$$

为有理数,与假设 $\alpha$ 为无理数或虚部不为零的复数矛盾,从而此时 $w=z^{\alpha}$ 是无穷多值函数.

由于对数函数 $\mathrm{Ln}z$ 的各个分支在 $z$ 平面上去掉原点和负实轴的区域内是解析的,因而不难看出幂函数 $w=z^{\alpha}$ 的各个分支在$z$ 平面上去掉原点和负实轴的区域内也是解析的,且由复合函数的求导法则知

$$(z^{\alpha})'=(e^{\alpha\mathrm{Ln}z})'=e^{\alpha\mathrm{Ln}z}\alpha\frac{1}{z}=z^{\alpha}\alpha\frac{1}{z}=\alpha z^{\alpha-1}.$$

特别地,当 $\alpha$ 为正整数 $n$ 时,$w=z^{n}$ 在整个 $z$ 平面上单值解析,且有$(z^{n})'=nz^{n-1}$.

下面考察当 $n$ 为自然数且 $n>1$ 时，$w=z^n$ 的映射性质.

令 $z=re^{i\theta}$，$w=\rho e^{i\varphi}$，由 $w=z^n$ 得 $\varphi=n\theta$，$\rho=r^n$，据此知映射 $w=z^n$ 把自原点出发的射线 $\theta=\theta_0$ 映射成自原点出发的射线 $\varphi=n\theta_0$，并把圆周 $r=r_0$ 映射成圆周 $\rho=r_0^n$（见图 2-2）.

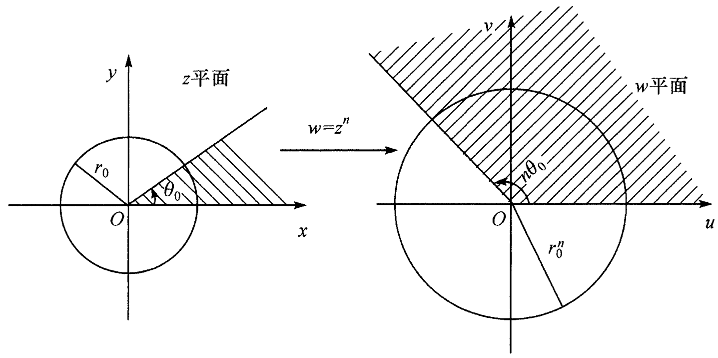


图 2-2

当 $z$ 平面上的射线 $\theta=0$ 扫动到射线 $\theta=\theta_0$ 时，在映射 $w=z^n$ 下，$w$ 平面上的像自射线 $\varphi=0$ 扫动到射线 $\varphi=n\theta_0$，因此 $z$ 平面上的角形域 $0<\theta<\theta_0$ 被映射为 $w$ 平面上的角形域 $0<\varphi<n\theta_0$（见图 2-2）. 特别地，映射 $w=z^n$ 把 $z$ 平面上的角形域 $-\dfrac{\pi}{n}<\theta<\dfrac{\pi}{n}$ 映射为 $w$ 平面上去掉原点和负实轴的区域（见图 2-3）.

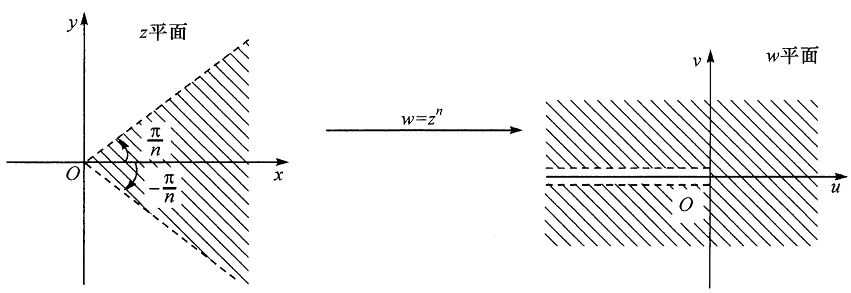


图 2-3

一般地，映射 $w=z^n$ 把 $z$ 平面上每个顶点在原点、张角为 $\dfrac{2\pi}{n}$ 的角形域

$$T_k:\frac{2k\pi}{n}-\frac{\pi}{n}<\theta<\frac{2k\pi}{n}+\frac{\pi}{n}\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)\tag{2-16}$$

都映射成 $w$ 平面上去掉原点和负实轴的区域（图 2-3 是 $k=0$ 的特殊情形）.

显然 $w=z^n$ 在式(2-16)的每个取定 $k$ 的角形域内是单叶的，事实上，任意取定 $k$ 后，对 $T_k$ 内任一点 $z_1$，满足

$$|z_1|=|z_2|,\arg z_2=\arg z_1+\frac{2k\pi}{n}$$

的 $z_2\notin T_k$，于是当 $z_1,z_2\in T_k$，且 $z_1\neq z_2$ 时，一定有 $w_1=z_1^n\neq w_2=z_2^n$.

事实上，可以证明 $w=z^n$ 在任何顶点在原点、张角不超过$\dfrac{2\pi}{n}$的角形区域内均是单叶的.

#### 2.2.3.2　一般指数函数

$$w=\alpha^z=e^{z\mathrm{Ln}\alpha}\quad(\alpha\neq 0,\alpha\text{ 为复常数})$$

称为**一般指数函数**. 由于复对数函数 Ln $\alpha$ 是多值的，因此 $\alpha^z$ 也是多值的. 对$\alpha^z$ 的每个单值解析分支，有

$$(\alpha^z)'=(e^{z\mathrm{Ln}\,\alpha})'=\alpha^z\mathrm{Ln}\,\alpha.$$

由 $w=\alpha^z=e^{z\mathrm{Ln}\,\alpha}\cdot e^{z2k\pi i}$，得到 $\alpha$ 的 $z$ 次幂与指数函数 $e^z$ 重合的两种情况是：

(1) 当 $\alpha=e$ 且 Ln$\alpha$ 取主值(即 $k=0$) 时，有 $e^{z2k\pi i}=1$，$e^{z\ln e}=e^z$，此时 $w=\alpha^z$ 是单值解析函数 $w=e^z$.

(2) 当 $\alpha=e$ 且 $z$ 取整数时，有 $e^{z2k\pi i}=1$，$e^{z\ln e}=e^z$，此时 $w=\alpha^z$ 也是单值解析函数$w=e^z$.

### 2.2.4　三角函数

三角函数

对任何复数 $z$，定义正弦函数和余弦函数如下：

$$\sin z=\frac{1}{2i}(e^{iz}-e^{-iz}),\tag{2-17}$$

$$\cos z=\frac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz}).\tag{2-18}$$

正弦函数和余弦函数具有如下性质：

(1) 对任何复数 $z$，有如下的欧拉公式：

$$e^{iz}=\cos z+i\sin z.\tag{2-19}$$

其实，$\cos z+i\sin z=\dfrac{1}{2}(e^{iz}+e^{iz})=e^{iz}$.

(2) $\sin z$，$\cos z$ 都是周期函数，其周期为 $2\pi$. 实际上，$e^{iz}$，$e^{-iz}$ 都有周期 $2\pi$.

(3) $\sin z$ 是奇函数，$\cos z$ 是偶函数. 由式(2-17) 和式(2-18) 知

$$\sin(-z)=-\sin z,\cos(-z)=\cos z.$$

(4)
$$\cos(z_1+z_2)=\cos z_1\cos z_2-\sin z_1\sin z_2,\tag{2-20}$$

$$\sin(z_1+z_2)=\sin z_1\cos z_2+\cos z_1\sin z_2.\tag{2-21}$$

实际上，有

$$\begin{aligned}&\cos(z_1+z_2)+i\sin(z_1+z_2)\\&=e^{i(z_1+z_2)}=e^{iz_1}\cdot e^{iz_2}=(\cos z_1+i\sin z_1)(\cos z_2+i\sin z_2)\\&=(\cos z_1\cos z_2-\sin z_1\sin z_2)+i(\sin z_1\cos z_2+\cos z_1\sin z_2),\end{aligned}$$

即

$$\cos(z_1+z_2)+\mathrm{i}\sin(z_1+z_2)$$
$$=(\cos z_1\cos z_2-\sin z_1\sin z_2)+\mathrm{i}(\sin z_1\cos z_2+\cos z_1\sin z_2). \tag{2-22}$$

在式(2-22)中以 $-z_1$ 代替 $z_1$，$-z_2$ 代替 $z_2$ 得到

$$\cos(z_1+z_2)-\mathrm{i}\sin(z_1+z_2)$$
$$=(\cos z_1\cos z_2-\sin z_1\sin z_2)-\mathrm{i}(\sin z_1\cos z_2+\cos z_1\sin z_2). \tag{2-23}$$

式(2-22)和式(2-23)分别相加和相减便得到式(2-20)和式(2-21).

(5) $\cos^2 z+\sin^2 z=1$. 实际上,由式(2-20)知

$$\cos(z-z)=\cos z\cos(-z)-\sin z\sin(-z),$$

即

$$1=\cos 0=\cos^2 z+\sin^2 z.$$

(6) $\sin z=0\Leftrightarrow z=k\pi$, $\cos z=0\Leftrightarrow z=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$，其中 $k$ 是任意整数.

下面用两种方法证明正弦函数的情形：

方法一：$\sin z=0\Leftrightarrow \mathrm{e}^{\mathrm{i}z}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}\Leftrightarrow \mathrm{i}z=-\mathrm{i}z+2k\pi\mathrm{i}\Leftrightarrow z=k\pi$.

方法二：$\sin z=0\Leftrightarrow \mathrm{e}^{\mathrm{i}z}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}\Leftrightarrow \mathrm{e}^{2\mathrm{i}z}=1\Leftrightarrow 2\mathrm{i}z=\mathrm{Ln}1\Leftrightarrow 2\mathrm{i}z=2k\pi\mathrm{i}\Leftrightarrow z=k\pi$.

对余弦函数可类似地证明.

(7) $\sin z$, $\cos z$ 都在 $z$ 平面上解析,并且有

$$(\sin z)'=\cos z, \tag{2-24}$$
$$(\cos z)'=-\sin z. \tag{2-25}$$

实际上,有

$$(\sin z)'=\frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z})'=\frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}+\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z})=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z})=\cos z;$$

对余弦函数可类似地证明.

(8) 在复数域内不能断言 $|\sin z|\leqslant 1$, $|\cos z|\leqslant 1$. 例如,取 $z=\mathrm{i}y(y>0)$，则

$$\cos(\mathrm{i}y)=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathrm{i}y)}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\mathrm{i}y)}}{2}=\frac{\mathrm{e}^{-y}+\mathrm{e}^{y}}{2}>\frac{\mathrm{e}^{y}}{2},$$

只要 $y$ 充分大,$\cos(\mathrm{i}y)$就可大于任一预先给定的正数.

用 $\sin z$ 和 $\cos z$ 还可以定义其他三角函数：

$$\tan z=\frac{\sin z}{\cos z},\cot z=\frac{\cos z}{\sin z},$$

$$\sec z=\frac{1}{\cos z},\csc z=\frac{1}{\sin z},$$

分别称为正切函数、余切函数、正割函数及余割函数. 这四个函数都在 $z$ 平面上使分母不为零的点处解析,且

$$(\tan z)' = \sec^2 z, \quad (\cot z)' = -\csc^2 z,$$

$$(\sec z)' = \sec z \cdot \tan z, \quad (\csc z)' = -\csc z \cdot \cot z.$$

正切函数和余切函数的周期为 $\pi$，正割函数和余割函数的周期为 $2\pi$.

与 $\sin z$ 和 $\cos z$ 密切相关的是双曲函数，称

$$\sinh z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}), \cosh z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}), \tanh z = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} \tag{2-26}$$

分别为双曲正弦函数、双曲余弦函数和双曲正切函数. 当 $z$ 为实数 $x$ 时，它们与高等数学中双曲函数的定义完全一致. 显然有

$$\sinh z = -\mathrm{i}\sin(\mathrm{i}z), \cosh z = \cos(\mathrm{i}z), \tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}. \tag{2-27}$$

$\sinh z$，$\cosh z$ 和 $\tanh z$ 都是以 $2\pi\mathrm{i}$ 为周期的周期函数，$\sinh z$ 和 $\tanh z$ 是奇函数，$\cosh z$ 是偶函数，且 $\sinh z$ 和 $\cosh z$ 都在 $z$ 平面上解析，导数分别为

$$(\sinh z)' = \cosh z, \quad (\cosh z)' = \sinh z.$$

设 $z = x + \mathrm{i}y$，可以证明：

$$\cosh \mathrm{i}y = \cos y, \sinh \mathrm{i}y = \mathrm{i}\sin y,$$

$$\sinh(x + \mathrm{i}y) = \sinh x \cos y + \mathrm{i}\cosh x \sin y,$$

$$\cosh(x + \mathrm{i}y) = \cosh x \cos y + \mathrm{i}\sinh x \sin y.$$

### 2.2.5 反三角函数

前面看到，在复变函数中，指数函数是对数函数、三角函数、一般幂函数和一般指数函数的共同基础. 下面可以看到，反三角函数是可以用对数函数表示的，也是以指数函数为基础的.

若 $z = \sin w$，则称 $w$ 为 $z$ 的**反正弦函数**，记作：$w = \mathrm{Arcsin}\, z$. 由

$$z = \sin w = \frac{1}{2\mathrm{i}}(e^{\mathrm{i}w} - e^{-\mathrm{i}w})$$

知

$$e^{\mathrm{i}w} - 2\mathrm{i}z - e^{-\mathrm{i}w} = 0,$$

即

$$(e^{\mathrm{i}w})^2 - 2\mathrm{i}z e^{\mathrm{i}w} - 1 = 0,$$

解出 $e^{\mathrm{i}w}$，得

$$e^{\mathrm{i}w} = \mathrm{i}z \pm \sqrt{1 - z^2}.$$

因 $\sqrt{1 - z^2}$ 是复数平方根函数，具有两个分支，故 $\pm$ 号可只取 $+$ 号，于是

$$w = \mathrm{Arcsin}\, z = -\mathrm{i}\mathrm{Ln}(\mathrm{i}z + \sqrt{1 - z^2}). \tag{2-28}$$