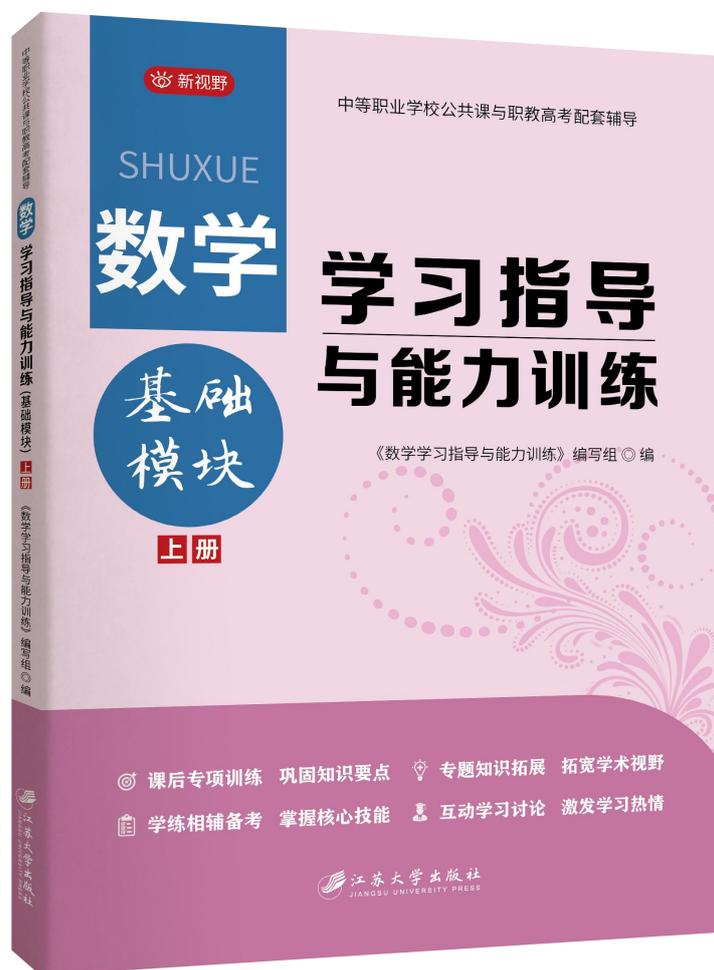


数学学习指导与能力训练(基础模块)·上册



类目：中等职业教育类

书名：数学学习指导与能力训练(基础模块)·上册

主编：编写组

出版社：江苏大学社

开本：大16开

书号：978-7-5684-2263-5

使用层次：中职

出版时间：2024年8月

定价：39.00

印刷方式：双色

是否有资源：是

责任编辑：张小琴
封面设计：旗语书装

中等职业学校公共课与职教高考配套辅导

- ◆ 语文学习指导与能力训练(基础模块)·上册
- ◆ 语文学习指导与能力训练(基础模块)·下册
- ◆ 语文学习指导与能力训练(职业模块)
- ◆ **数学学习指导与能力训练(基础模块)·上册**
- ◆ 数学学习指导与能力训练(基础模块)·下册
- ◆ 数学学习指导与能力训练(拓展模块一)·上册
- ◆ 数学学习指导与能力训练(拓展模块一)·下册
- ◆ 英语学习指导与能力训练(基础模块)·1
- ◆ 英语学习指导与能力训练(基础模块)·2
- ◆ 英语学习指导与能力训练(基础模块)·3
- ◆ 英语学习指导与能力训练(拓展模块)



配套参考答案
请扫描二维码



ISBN 978-7-5684-3261-5
定价：39.00元

中等职业学校公共课与职教高考配套辅导
数学学习指导与能力训练(基础模块)上册
江苏大学出版社

新视野

SHUXUE

数学

基础
模块

上册

中等职业学校公共课与职教高考配套辅导

学习指导 与能力训练

《数学学习指导与能力训练》编写组◎编

- ◎ 课后专项训练 巩固知识要点
- 💡 专题知识拓展 拓宽学术视野
- 📅 学练相辅备考 掌握核心技能
- 🗨️ 互动学习讨论 激发学习热情

江苏大学出版社
JIANGSU UNIVERSITY PRESS

新视野

中等职业学校公共课与职教高考配套辅导

SHUXUE

数学

基础
模块

上册

学习指导 与能力训练

《数学学习指导与能力训练》编写组 © 编

江苏大学出版社
JIANGSU UNIVERSITY PRESS

镇江

图书在版编目 (CIP) 数据

数学学习指导与能力训练：基础模块. 上册 / 《数学学习指导与能力训练》编写组编. — 镇江：江苏大学出版社, 2024. 8. — ISBN 978-7-5684-2263-5

I. G634. 603

中国国家版本馆 CIP 数据核字第 2024PP2844 号

数学学习指导与能力训练：基础模块. 上册

Shuxue Xuexi Zhidao Yu Nengli Xunlian: Jichu Mokuai. Shangce

编者 / 《数学学习指导与能力训练》编写组

责任编辑 / 张小琴

出版发行 / 江苏大学出版社

地址 / 江苏省镇江市京口区学府路 301 号(邮编: 212013)

电话 / 0511-84446464(传真)

网址 / <http://press. ujs. edu. cn>

排版 / 北京万典文化传播有限公司

印刷 / 唐山唐文印刷有限公司

开本 / 889 mm×1 194 mm 1/16

印张 / 7.5

字数 / 156 千字

版次 / 2024 年 8 月第 1 版

印次 / 2024 年 8 月第 1 次印刷

书号 / ISBN 978-7-5684-2263-5

定价 / 39.00 元

如有印装质量问题请与本社营销部联系(电话: 0511-84440882)



前言

PREFACE

2020年版《中等职业学校数学课程标准》中，中等职业学校数学课程的教学目标如下：全面贯彻党的教育方针，落实立德树人根本任务。在完成义务教育的基础上，通过中等职业学校数学课程的学习，使学生获得继续学习、未来工作和发展所必需的数学基础知识、基本技能、基本思想和基本活动经验，具备一定的从数学角度发现和提出问题的能力、运用数学知识和思想方法分析和解决问题的能力。

为了适应当前中等职业学校教学改革的需要，我们在充分研究2020年版《中等职业学校数学课程标准》，以及综合考虑中职学生的年龄特点、兴趣爱好和实际学习水平的基础上，根据《数学（基础模块）上册》教材内容编写了本书，将其作为同步辅导与能力训练用书。

总体而言，本书具有以下特点：

1. 夯实基础，提升能力 每章设有“知识框图”，对整体知识进行梳理。每节设有“知识回顾”“典例解析”“专项小练”3个模块。其中，与教材知识相对应的“知识回顾”可巩固和提升学生对基础知识的掌握能力；“典例解析”对经典题型进行梳理讲解；“专项小练”可提升学生对知识的应用能力。

2. 同步训练，难度适中 本书与数学教材的思路同步，每章均根据《中等职业学校数学课程标准》中规定的知识和能力进行针对训练，且难度适中，有利于学生形成良好的数学素养和应用能力。

在编写的过程中，我们参考了一些相关的学习文献资料，在此向这些资料的作者表示衷心的感谢。由于编者水平有限，书中难免存在疏漏与不足，敬请广大读者批评指正。

编者

2024年5月



第 1 章 集 合	1
知识框图	2
学习目标	2
重难点提要	2
1.1 集合及其表示	3
1.2 集合之间的关系	7
1.3 集合的运算	10
第 2 章 不 等 式	16
知识框图	17
学习目标	17
重难点提要	17
2.1 不等式的基本性质	18
2.2 区 间	23
2.3 一元二次不等式	28
2.4 含绝对值的不等式	33
2.5 不等式的应用举例	37
第 3 章 函 数	44
知识框图	45
学习目标	45
重难点提要	45
3.1 函数的概念	46
3.2 函数的表示方法	51



3.3 函数的性质	59
3.4 函数的应用	67
第4章 三角函数	74
知识框图	75
学习目标	75
重难提要	75
4.1 角的概念的推广	76
4.2 弧度制	81
4.3 任意角的三角函数	86
4.4 同角三角函数的基本关系	91
4.5 诱导公式	96
4.6 正弦函数的图像和性质	101
4.7 余弦函数的图像和性质	106
4.8 已知三角函数值求角	112

第1章

集合

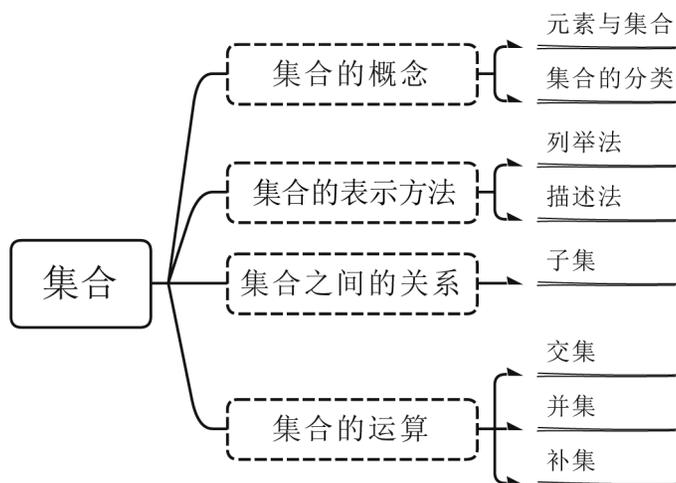


$$x^2 + y^2$$

π



知识框图



学习目标

1. 了解集合的概念,理解元素与集合的关系,了解空集、有限集和无限集的含义,掌握常用数集的表示符号,初步掌握列举法和描述法等集合的表示方法.
2. 理解集合之间的包含关系,理解子集与真子集的含义,掌握集合之间基本关系的符号表示.
3. 理解集合之间的交集、并集运算,了解全集和补集的概念.

重难点提要

重点

集合的定义与性质;集合的表示方法;集合之间的关系;子集的数量计算;交集、并集、补集的图示;交集、并集、补集的计算.

难点

集合的性质;子集数量的计算;交集、并集、补集的计算.



1.1 集合及其表示

数学的本质在于它的自由.

——康托尔



知识回顾

1.1.1 集合的概念

1. 集合

(1) 一般地, 由某些确定的对象组成的整体称为_____, 简称集. 组成集合的对象叫作这个集合的_____.

(2) 集合中的元素有_____, _____、_____三个特征.

2. 元素与集合的关系

(1) 集合常用_____英文字母表示, 如 A, B, C, \dots ; 集合的元素常用_____英文字母表示, 如 a, b, c, \dots .

(2) 如果 a 是集合 A 的元素, 就说 a _____ A , 记作_____, 读作“ a 属于 A ”; 如果 a 不是集合 A 的元素, 就说 a _____ A , 记作_____, 读作“ a 不属于 A ”.

3. 集合的分类

(1) 含有有限个元素的集合是_____.

(2) 含有无限个元素的集合是_____.

(3) 空集是不含任何元素的集合, 记作_____.

(4) 由数组成的集合称为_____.

4. 常用数集

自然数集 \mathbf{N} 、正整数集 \mathbf{N}^* 或 \mathbf{N}_+ 、整数集_____, 有理数集_____, 实数集_____.



1.1.2 集合的表示方法

1. 列举法

把集合的所有元素一一列举出来,中间用_____隔开,并用花括号“{ }”把它们括起来,这种表示集合的方法称为_____.

2. 描述法

利用元素的_____来表示集合的方法称为_____.

格式: {代表元素|元素的特征、性质}.



典例解析

例1 已知下列说法:

- ①{2, 3, 4, 2}是由4个元素组成的集合;
- ②集合{0}表示仅由一个元素“0”组成的集合;
- ③集合{1, 2, 3}与集合{3, 2, 1}是两个不同的集合;
- ④集合{小于1的正有理数}是一个有限集.

其中正确的是().

- A. ③④ B. ②③④ C. ①② D. ②

解答: D

分析: 本题涉及的知识点为集合的互异性、无序性及有限集合的概念. 由集合的互异性知①不正确; 由集合的无序性知③不正确; 小于1的正有理数有无数个, 所以集合{小于1的正有理数}是一个无限集, ④不正确.

例2 如果 $A = \{x | x \leq 4, x \in \mathbf{N}\}$, 那么用列举法表示 $A =$ _____.

分析: 本题考查集合的表示方法及对自然数集 \mathbf{N} 的认识, 容易将0丢掉.

解答: {0, 1, 2, 3, 4}

专项小练

一、选择题

1. 下列四组对象中能构成集合的是()
 - A. 本校学习好的学生
 - B. 在数轴上与原点非常近的点
 - C. 很小的实数
 - D. 倒数等于本身的数



2. 下列四组对象中可以构成集合的是()
- A. 接近 π 的实数
B. 善良的人
C. 某校高一所有聪明的学生
D. 某单位所有身高在 1.7 m 以上的人
3. 下列语句中能确定一个集合的是()
- A. 充分小的负数全体
B. 爱好飞机的一些人
C. 某班本学期视力较差的同学
D. 某校某班某一天的所有课程
4. 下面给出的四类对象中, 能构成集合的是()
- A. 某班个子较高的同学
B. 大于 2 的整数
C. $\sqrt{2}$ 的近似值
D. 长寿的人
5. 下列集合表示正确的是()
- A. $\{2, 4, 4\}$
B. $\{2, 4\}$
C. $(1, 2, 3)$
D. $\{\text{高个子男生}\}$
6. 若集合 $A = \{-2, 1, 4, 8\}$, $B = \{xy \mid x \in A, y \in A\}$, 则 B 中元素的最小值为()
- A. -16
B. -8
C. -2
D. 32
7. 给出下列六个关系: ① $\frac{\sqrt{2}}{2} \in \mathbf{R}$; ② $\sqrt{3} \in \mathbf{Z}$; ③ $0 \notin \mathbf{N}^*$; ④ $\sqrt{4} \notin \mathbf{N}$; ⑤ $\pi \notin \mathbf{Q}$; ⑥ $|-2| \notin \mathbf{Z}$.
- 其中正确关系的个数为()
- A. 4
B. 2
C. 3
D. 5
8. 下列元素与集合的关系中, 正确的是()
- A. $-1 \in \mathbf{N}$
B. $0 \notin \mathbf{N}^*$
C. $\sqrt{3} \in \mathbf{Q}$
D. $\frac{2}{5} \notin \mathbf{R}$
9. 设集合 $A = \{0, 1, 2\}$, 则集合 $B = \{x - y \mid x \in A, y \in A\}$ 中元素的个数是()
- A. 1
B. 3
C. 5
D. 9

二、填空题

1. 下列说法中正确的个数是_____.

- ①集合 \mathbf{N} 中的最小数为 1;
②若 $a \in \mathbf{N}$, 则 $-a \notin \mathbf{N}$;
③若 $a \in \mathbf{N}$, $b \in \mathbf{N}$, 则 $a + b$ 的最小值为 2;
④所有小的正数组成一个集合.

2. 给出下列说法:

- ① $0 \in \mathbf{N}^*$; ②如果 $a, b \in \mathbf{Z}$, 则 $a - b \in \mathbf{Z}$; ③所有正方形构成的集合是有限集; ④如果



$a \in \mathbf{N}$, 则 $-a \notin \mathbf{N}$. 其中正确的是_____。(填序号)

3. 由下列对象组成的总体属于集合的是_____。(填序号)

- ①不超过 3 的正整数;
- ②高一数学课本中所有的难题;
- ③中国的大城市;
- ④平方后等于自身的数;
- ⑤某校高一(2)班中考数学成绩在 90 分以上的学生.

4. 设 P, Q 为两个非空实数集合, 定义集合 $A = \{a - b \mid a \in P, b \in Q\}$. 若 $P = \{0, 2, 5\}$, $Q = \{1, 2, 6\}$, 则 A 中元素的个数是_____.

5. 英文单词 necessary 的所有字母组成的集合共有_____个元素.

6. 集合 $\{(x, y) \mid x + y = 4, x \in \mathbf{N}, y \in \mathbf{N}\}$ 用列举法表示为_____.

7. 将 $\frac{25}{16}$ 表示成小数形式, 则构成这个小数的所有数字的集合用列举法表示为_____.

8. 集合 $A = \left\{x \in \mathbf{N} \mid \frac{16}{11-x} \in \mathbf{N}\right\}$ 用列举法表示为_____.

9. 集合 $A = \left\{x \in \mathbf{Z} \mid \frac{3}{2-x} \in \mathbf{Z}\right\}$ 用列举法表示为_____.

10. 用描述法表示被 3 除余 1 的数的集合_____.

11. 已知集合 $S = \{a^2, 2a, 0\}$, 若 $4 \in S$, 则实数 $a =$ _____.

12. 已知集合 $A = \{0, 4, x^2 - x\}$, 若 $6 \in A$, 则 $x =$ _____.

三、解答题

1. 已知集合 $A = \{a^2 + 4a + 1, a + 1\}$, $B = \{x \mid x^2 + px + q = 0\}$, 若 $1 \in A$.

(1) 求实数 a 的值;

(2) 如果集合 A 是集合 B 的列举表示法, 求实数 p, q 的值.



1.2 集合之间的关系

上帝创造了整数，所有其余的数都是人造的。

——克罗内克

知识回顾

1. 子集

对于两个集合 A 和 B ，如果集合 A 的_____都是集合 B 的元素，则称集合 A 为集合 B 的_____，记作_____（或 $B \supseteq A$ ），读作“ A 包含于 B ”（或 B 包含 A ）。

空集是任何集合的_____。

2. 集合相等

如果集合 A 的元素与集合 B 的元素_____，则称集合 A 与集合 B _____，记作 $A=B$ 。

3. 真子集

如果集合 A 是集合 B 的子集，并且集合 B 中至少有一个元素_____集合 A ，则称集合 A 是集合 B 的_____，记作_____（或 $B \supsetneq A$ ），读作“ A 真包含于 B ”（或“ B 真包含 A ”）。

空集是任何_____的真子集。

典例解析

例 3 设 $M = \{x | x \leq 4, x \in \mathbf{R}\}$ ， $a = \sqrt{15}$ ，下列关系正确的是()。

A. $a \subseteq M$

B. $a \notin M$

C. $\{a\} \in M$

D. $\{a\} \subseteq M$

分析： 本题考查元素与集合之间的关系。选项 A 与 C 显然关系用错，选项 B 在判断 4 与 $\sqrt{15}$ 的大小关系时出现错误。

解答： D



专项小练

一、选择题

- 集合 $A = \{1, 2\}$ 的子集个数为()
 A. 2 B. 4 C. 6 D. 8
- 已知集合 $A = \{x | x < 5 \text{ 且 } x \in \mathbf{N}^*\}$, 则 A 的非空真子集的个数为()
 A. 14 B. 15 C. 30 D. 31
- 已知集合 $A = \left\{x \mid \frac{2}{x-1} \in \mathbf{Z}, x \in \mathbf{Z}\right\}$, 则 A 的真子集的个数为()
 A. 13 B. 14 C. 15 D. 16
- 已知集合 $A = \{x | x^2 < 3, x \in \mathbf{N}\}$, 则 A 的真子集共有()
 A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 7 个
- 集合 $M = \{a, b, c\}$ 的真子集的个数为()
 A. 5 B. 6 C. 7 D. 8
- 已知集合 $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{1, 5\}$, 则()
 A. $A = B$ B. $A \subseteq B$ C. $B \subseteq A$ D. 以上都不正确
- 已知集合 $A = \{x \in \mathbf{N} | x < 3\}$, 则()
 A. $0 \notin A$ B. $-1 \in A$ C. $\{0\} \subseteq A$ D. $\{-1\} \subseteq A$
- 设集合 $A = \{0, -a\}$, $B = \{1, -1, 2a-2\}$, 若 $A \subseteq B$, 则 $a =$ ()
 A. 2 B. 1 C. $\frac{2}{3}$ D. -1
- 下列各式中关系符号运用正确的是()
 A. $1 \subseteq \{0, 1, 2\}$ B. $\{1\} \in \{0, 1, 2\}$
 C. $\emptyset \in \{1, 0, 2\}$ D. $-1 \in \{-1, 0, 3\}$
- 给出下列关系:
 ① $\pi \in \mathbf{R}$; ② $\{2024, 1\} = \{x | x^2 - 2025x + 2024 = 0\}$;
 ③ $\emptyset \subseteq \{0\}$; ④ $\{(1, -2)\} \subseteq \{(x, y) | y = x^2 - x - 2\}$.
 其中正确的个数为()
 A. 1 B. 2 C. 3 D. 4



二、填空题

- 集合 $A = \{x \mid x(x-2)=0\}$, 则集合 A 的子集的个数为_____.
- 写出集合 $\{1, 2\}$ 的所有子集_____.
- 集合 $A = \{x \in \mathbf{Z} \mid 2 \leq x < 5\}$ 的真子集的个数是_____.
- 满足 $\{0\} \subseteq P \subseteq \{0, 1, 2\}$ 的集合 P 的个数为_____.
- 已知集合 $A = \{-1, 3, 0\}$, $B = \{3, m^2\}$, 若 $B \subseteq A$, 则实数 m 的值为_____.
- 已知集合 $A = \{1, 3, \sqrt{m}\}$, $B = \{1, m\}$, 若 $B \subseteq A$, 则 $m =$ _____.
- 满足 $\{2, 3\} \subseteq P \subseteq \{2, 3, 4, 5, 6\}$ 的集合 P 的个数为_____.
- 已知集合 $A = \{4, -2m\}$, $B = \{4, m^2\}$, 且 $A = B$, 则 m 的值为_____.
- 若 $\{5, a+4\} = \{a, b\}$, 则 $a+b =$ _____.
- 满足 $\{1\} \subseteq A \subset \{1, 2, 3\}$ 的集合 A 的个数为_____.
- 已知集合 $A = \{-1\}$, $B = \{-1, 0, 1\}$, 若 $A \subseteq C \subseteq B$, 则符合条件的集合 C 的个数为_____.

三、解答题

- 设 $A = \{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$, $B = \{x \mid x^2 - ax + 2 = 0\}$, $B \subseteq A$.
 - 写出集合 A 的所有子集;
 - 若 B 为非空集合, 求 a 的值.



1.3 集合的运算

聪明在于勤奋，天才在于积累。

——华罗庚



知识回顾

1.3.1 交集

1. 定义

一般地，给定集合 A 与集合 B ，由_____集合 A _____集合 B 的所有元素组成的集合，称为集合 A 与集合 B 的_____，记作_____，读作“ A 交 B ”，即 $A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}$ 。Venn 表示如图 1-1 所示。

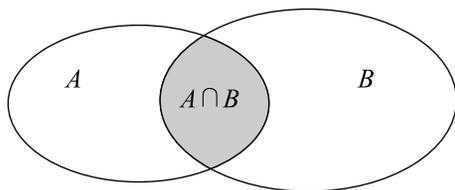


图 1-1

2. 性质

- (1) $A \cap B = \underline{\hspace{2cm}}$;
- (2) $A \cap A = \underline{\hspace{2cm}}$;
- (3) $A \cap \emptyset = \emptyset \cap A = \emptyset$;
- (4) $A \cap B \subseteq A, A \cap B \subseteq B$.



1.3.2 并集

1. 定义

一般地, 对于给定的集合 A 与集合 B , 由集合 A 与集合 B 的_____组成的集合称为集合 A 与集合 B 的_____, 记作_____, 读作“ A 并 B ”, 即 $A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}$. Venn 表示如图 1-2 所示.

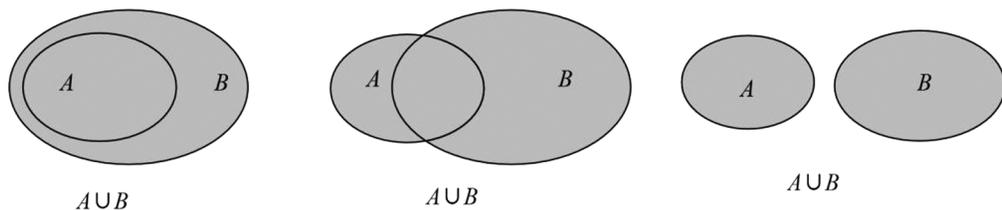


图 1-2

2. 性质

- (1) $A \cup B = B \cup A$;
- (2) $A \cup A = A$;
- (3) $A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = \underline{\hspace{2cm}}$;
- (4) $A \subseteq (A \cup B), B \subseteq (A \cup B)$.

1.3.3 补集

1. 全集定义

一般地, 在研究某些集合时, 如果这些集合都是一个给定集合的_____, 那么这个给定集合称为_____, 通常用字母_____表示.

2. 补集定义

一般地, 如果集合 A 是全集 U 的子集, 那么由集合 U 中不属于 A 的所有元素组成的集合称为集合 A 在全集 U 中的_____, 记作_____, 读作“ A 在 U 中的补集”, 即 $\complement_U A = \{x | x \in U \text{ 且 } x \notin A\}$. Venn 表示如图 1-3 所示.

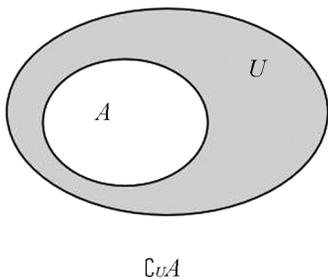


图 1-3

3. 性质

- (1) $A \cap \complement_U A = \underline{\hspace{2cm}}$;
 (2) $A \cup \complement_U A = \underline{\hspace{2cm}}$;
 (3) $\complement_U(\complement_U A) = \underline{\hspace{2cm}}$.

典例解析

例 4 设 $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $B = \{-4, -2, 0, 2\}$, 求 $A \cap B$.

分析: 该题考查的知识点为两个集合的交集运算, 根据定义找出由既属于 A 又属于 B 的元素组成的集合即可.

解答: $A \cap B = \{-2, -1, 0, 1, 2\} \cap \{-4, -2, 0, 2\} = \{-2, 0, 2\}$.

例 5 设 $A = \{a, b, c\}$, $B = \{c, d, e\}$, 求 $A \cup B$.

分析: 该题考查的知识点为两个集合的并集运算, 根据定义找出由集合 A 与 B 的所有元素组成的集合即可.

解答: $A \cup B = \{a, b, c\} \cup \{c, d, e\} = \{a, b, c, d, e\}$.

例 6 设全集 $U = \mathbf{R}$, $A = \{x \mid -2 < x \leq 4\}$, 求 $\complement_U A$.

分析: 该题考查的知识点为集合的补集.

解答: 由题意可知 $\complement_U A = \{x \mid x \leq -2 \text{ 或 } x > 4\}$.

名师点拨



(1) 子集个数计算公式:

对于一个有 n 个元素的集合而言, 其共有 2^n 个子集, 有 $2^n - 1$ 个真子集, 有 $2^n - 2$ 个非空真子集.

(2) 空集是任何一个集合的子集.



专项小练

一、选择题

1. 设集合 $A = \{1, 3, 5, 6\}$, $B = \{2, 3, 5, 8\}$, 则 $A \cap B = (\quad)$
 - A. $\{1, 2, 3, 5, 6, 8\}$
 - B. $\{3, 5\}$
 - C. $\{1, 3\}$
 - D. $\{2, 8\}$
2. 设集合 $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{x \mid 3 \leq x < 6\}$, 则 $A \cap B = (\quad)$
 - A. $\{1, 3\}$
 - B. $\{3, 5\}$
 - C. $\{5, 7\}$
 - D. $\{1, 7\}$
3. 设集合 $M = \{-1, 0, 1\}$, $N = \{x \in \mathbf{N} \mid -1 \leq x \leq 2\}$, 则 $M \cup N = (\quad)$
 - A. $\{0, 1\}$
 - B. $\{0, 1, 2\}$
 - C. $\{x \mid -1 \leq x \leq 2\}$
 - D. $\{-1, 0, 1, 2\}$
4. 已知集合 $A = \{x \mid -3 < x \leq 2\}$, $B = \{x \mid -2 \leq x < 3\}$, 则 $A \cup B = (\quad)$
 - A. $\{x \mid -2 < x < 2\}$
 - B. $\{x \mid -2 \leq x \leq 2\}$
 - C. $\{x \mid -2 < x \leq 3\}$
 - D. $\{x \mid -3 < x < 3\}$
5. 设全集 $U = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, 集合 $A = \{-1, 0, 1\}$, $B = \{y \mid y = 2x, x \in A\}$, 则 $A \cap \complement_U B = (\quad)$
 - A. $\{-2, 0, 2\}$
 - B. $\{-1, 0, 1\}$
 - C. $\{-1, 1\}$
 - D. $\{0\}$
6. 已知集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 2, 3, 6, 7\}$, 记全集 $I = A \cup B$, 则 $\complement_I A = (\quad)$
 - A. $\{1, 2, 3\}$
 - B. $\{4, 5\}$
 - C. $\{6, 7\}$
 - D. $\{4, 5, 6, 7\}$
7. 已知集合 $A = \{x \mid x < 0 \text{ 或 } x > 2\}$, $B = \{x \mid -\sqrt{7} < x < \sqrt{7}\}$, 则 (\quad)
 - A. $A \cap B = \emptyset$
 - B. $A \subseteq B$
 - C. $B \subseteq A$
 - D. $A \cup B = \mathbf{R}$
8. 已知集合 $M = \left\{x \mid -\frac{2}{3} < x \leq 1\right\}$, $N = \{x \mid 2x \in \mathbf{Z}\}$, 则 $M \cap N = (\quad)$
 - A. $\{0, 1\}$
 - B. $\left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$
 - C. $\left\{-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right\}$
 - D. $\left\{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\right\}$



9. 下列集合关系不成立的是()

A. $A \cup A = A$

B. $A \cap \emptyset = \emptyset$

C. $(\complement_U A) \cap (\complement_U B) = \complement_U (A \cup B)$

D. $0 \in \emptyset$

10. 集合 $A = \{x > 1 \mid -1 \leq x \leq 2\}$, $B = \{x \mid x < 1\}$, 则 $A \cup (\complement_{\mathbf{R}} B) = ()$

A. $\{x \mid x > 1\}$

B. $\{x \mid x \geq -1\}$

C. $\{x \mid 1 < x \leq 2\}$

D. $\{x \mid 1 \leq x \leq 2\}$

11. 设集合 $M = \{x \mid -1 < x < 5\}$, $N = \{y \mid y = x - 1, x \in M\}$, 则 $M \cup N = ()$

A. $(-2, 5)$

B. $(-1, 4)$

C. $(-2, 4)$

D. $(-1, 5)$

12. 已知集合 $A = \{x \mid -3 < x < 3\}$, $B = \{-3, 0, 1, 2\}$, 则 $A \cap B = ()$

A. $\{0, 1\}$

B. $\{0, 1, 2\}$

C. $\{-3, 0, 1, 2\}$

D. $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$

13. 设集合 $A = \{x \mid x + 1 > 0\}$, $B = \{y \mid y = \sqrt{1 - 2^x}\}$, 则 $A \cap B = ()$

A. $(-1, 0]$

B. $[0, 1)$

C. $(-1, 1)$

D. $[0, +\infty)$

14. 设集合 $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 4, 6\}$, 则 $A \cup B = ()$

A. $\{2\}$

B. $\{1, 2\}$

C. $\{2, 4, 6\}$

D. $\{1, 2, 4, 6\}$

15. 若集合 $A = \{4, 5, 6, 8\}$, 集合 $B = \{3, 5, 7, 8\}$, 则 $A \cup B = ()$

A. $\{5, 8\}$

B. $\{4, 5, 6, 8\}$

C. $\{3, 5, 7, 8\}$

D. $\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

二、填空题

1. 已知集合 $A = \{1, 2, 4\}$, $B = \{a, a^2\}$, 若 $A \cap B = B$, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. 已知集合 $M = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $N = \{x \mid 2^x < 100\}$, 则 $M \cap N = \underline{\hspace{2cm}}$.

3. 已知集合 $A = \{x \mid x \leq 1\}$, $B = \{x \mid x \geq a\}$, 且 $A \cup B = \mathbf{R}$, 则实数 a 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

4. 已知集合 $A = \{1, 5, m^2\}$, $B = \{1, 2m + 3\}$, 若 $A \cup B = A$, 则 $m = \underline{\hspace{2cm}}$.

5. 若全集 $U = \{0, 1, 2, 3\}$ 且 $\complement_U A = \{2\}$, 则集合 A 的真子集共有 $\underline{\hspace{2cm}}$ 个.

6. 已知全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $A = \{x \mid -3 < x < 5\}$, $B = \{x \mid x \leq 2 \text{ 或 } x \geq 6\}$, 则 $(\complement_U A) \cap (\complement_U B) = \underline{\hspace{2cm}}$.



三、解答题

1. 已知集合 $A = \{x \mid 2 \leq x \leq 5\}$, 集合 $B = \{x \mid 3 < x \leq 7\}$, 求:

(1) $A \cap B$;

(2) $A \cup B$.

2. 已知集合 $A = \{x \mid -2 < x < 4\}$, $B = \{x \mid -1 < x \leq 5\}$, $U = \mathbf{R}$.

(1) 求 $A \cap B$, $A \cup B$;

(2) 求 $(\complement_{\mathbf{R}} A) \cap B$.

第2章

不等式

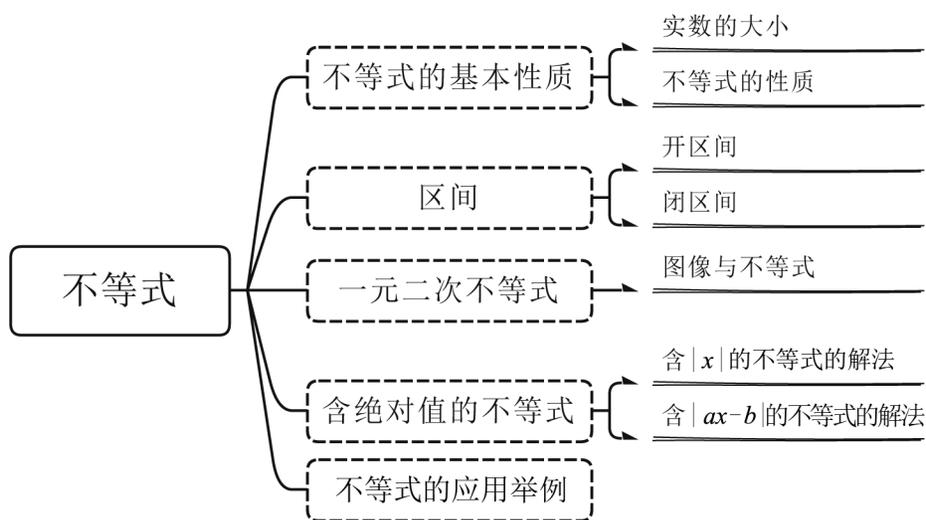


$$x^2 + y^2$$

π



知识框图



学习目标

1. 了解不等式的性质，能用作差的方法比较两个数(式)的大小.
2. 会解一元一次不等式、一元一次不等式组.
3. 理解区间的概念，会用区间表示不等式或不等式组的解集.
4. 会解一元二次不等式.
5. 会解形如 $|ax+b| < c$ 或 $|ax+b| > c$ 的绝对值不等式.

重难点提要

重点

比较实数大小的方法；不等式的性质；区间的表示；求解一元二次不等式；一元二次不等式的应用；求解含绝对值的不等式；含绝对值的不等式的应用.

难点

不等式的性质；区间的表示；一元二次不等式的应用；含绝对值的不等式的应用.



2.1 不等式的基本性质

数无形时少直觉，形少数时难入微。数与形，本是相倚依，焉能分作两边飞。

——华罗庚

知识回顾

2.1.1 实数的大小

一般地，对于任意实数 a 和 b ，如果 $a-b$ 为_____，即 $a-b>0$ ，那么称 a _____ b (或 b 小于 a)。

比较两个实数(或代数式)的大小，可以转化为判断它们的差是正数、负数或零。这种比较大小的方法称为_____。

2.1.2 不等式的性质

1. 性质 1

如果 $a>b$ ，那么 $a+c$ _____ $b+c$ 。

性质 1 表明，不等式两边同时加上(或减去)同一个数(或代数式)，不等号的方向不变。因此，性质 1 也称为不等式的_____。

这表明，不等式的任何一项可以从不等式的一边移到另一边，但同时要改变符号。这个结论也称为_____。

2. 性质 2

如果 $a>b$ ， $c>0$ ，那么 ac _____ bc ；如果 $a>b$ ， $c<0$ ，那么 ac _____ bc 。

性质 2 表明，不等式两边同时乘(或除以)同一个正数，不等号的方向不变；不等式两边同时乘(或除以)同一个负数，不等号的方向改变。

性质 2 也称为不等式的_____。



3. 性质 3

如果 $a > b$, $b > c$, 那么 $a > c$.

性质 3 称为不等式的_____.

4. 性质 4

如果 $a > b$, $c > d$, 那么 $a + c > b + d$.

性质 4 也称为同向不等式的_____.

典例解析

例 1 比较 $\frac{3}{4}$ 与 $\frac{5}{7}$ 的大小.

分析: 通过作差, 可以得出它们的大小关系.

解答: 因为 $\frac{3}{4} - \frac{5}{7} = \frac{21-20}{28} = \frac{1}{28} > 0$, 所以 $\frac{3}{4} > \frac{5}{7}$.

例 2 用符号 “>” 或 “<” 填空.

(1) 设 $a < b$, 则 $a + 2$ _____ $b + 2$, $a - 1$ _____ $b - 1$, $a - 1$ _____ $b + 1$;

(2) 设 $a < b$, 则 $2a$ _____ $2b$, $-2a$ _____ $-2b$, $3a - 1$ _____ $3b - 1$.

分析: 利用不等式的性质来判断.

解答: (1) < < < (2) < > <

专项小练

一、选择题

1. 设 $a > 1$, $b < 0$, 则()

A. $\frac{a^2+b^2}{ab} \geq 2$ B. $a+b > ab$ C. $ab < -1$ D. $b < ab$

2. 设 a, b 为实数, 且 $a > b > 0$, 则下列不等式正确的是()

A. $a - b < 0$ B. $a - c > b - c$ C. $ac^2 > bc^2$ D. $\frac{c}{a} > \frac{c}{b}$

3. 已知 $m < 0 < n$, 则下列说法中一定正确的是()

A. $m^2 > n^2$ B. $\frac{1}{m} < \frac{1}{n}$ C. $mn > m^2$ D. $\sqrt{-m} < \sqrt{n}$



4. 下列结论中正确的是()

A. 若 $a > b$, 则 $\frac{1}{b} > \frac{1}{a}$

B. 若 $a < b$, 则 $a^3 < b^3$

C. 若 $a > b, c > d$, 则 $a - c < b - d$

D. 若 $a > b$, 则 $ac^2 > bc^2$

5. 如果 $a < b < 0$, 那么下列不等式中正确的是()

A. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

B. $a^2 < b^2$

C. $\frac{1}{a-b} > \frac{1}{a}$

D. $\frac{1}{a^2} < \frac{1}{b^2}$

6. 若 $m < n, p < q$, 且 $(p-m)(p-n) < 0, (q-m)(q-n) < 0$, 则()

A. $m < p < n < q$

B. $p < m < q < n$

C. $m < p < q < n$

D. $p < m < n < q$

7. 已知实数 a, b, c, d 满足 $a > b > 0 > c > d$, 则下列不等式中一定正确的是()

A. $a + d > b + c$

B. $ad > bc$

C. $a + c > b + d$

D. $ac > bd$

8. 下列结论中正确的是()

A. 若 $a > b$, 则 $ac^2 > bc^2$

B. 若 $a > b$, 则 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

C. 若 $a > b$, 则 $ab > b^2$

D. 若 $|a| > |b|$, 则 $a^2 > b^2$

9. 若 $a > b, c > d > 0$, 则下列不等式中成立的是()

A. $a + d > b + c$

B. $a - d > b - c$

C. $ac > bd$

D. $\frac{a}{c} < \frac{b}{d}$

10. 已知 $a, b, c, d \in \mathbf{R}$, 则下列结论中正确的是()

A. 若 $a > b$, 则 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

B. 若 $a > b$, 则 $ac^2 > bc^2$

C. 若 $a > b, c > d$, 则 $a + c > b + d$

D. 若 $a > b, c > d$, 则 $ac > bd$

11. 如果 $a^2 > b^2$, 那么下列不等式中成立的是()

A. $a > 0 > b$

B. $a > b > 0$

C. $|a| > |b|$

D. $a > |b|$



12. 已知 $a > b$, 则下列不等式中一定成立的是()

A. $a - b > 0$

B. $ab < b^2$

C. $a^2 < b^2$

D. $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

二、填空题

1. 已知 $a \in \mathbf{R}, b \in \mathbf{R}$, 且 $a > b$, 则 $2 - a$ _____ $3 - b$. (填“>”或“<”)

2. 已知: $a > b > c > 0$, $A = ab + bc$, $B = ac + b^2$, $C = a^2 + b^2$, 则 A, B, C 的大小关系是 _____.

3. 若 a, b 同时满足下列两个条件: ① $a + b > ab$; ② $\frac{1}{a+b} > \frac{1}{ab}$.

请写出一组 a, b 的值 _____.

4. 已知下列四个条件: ① $b > 0 > a$; ② $0 > a > b$; ③ $a > 0 > b$; ④ $a > b > 0$. 其中不能推出 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ 成立的序号是 _____.

5. 已知 $c > a > b > 0$, 则 $\frac{a}{c-a}$ _____ $\frac{b}{c-a}$. (填“>”“<”或“=”)

6. 用“>”“<”或“=”填空:

① 已知 $a < b < c < 0$, 则 ac _____ bc ; $\frac{c}{a}$ _____ $\frac{c}{b}$; $\sqrt{|a|}$ _____ $\sqrt{|b|}$.

② 已知 $x \in \mathbf{R}$, 则 $x^2 + 2$ _____ $2x$.

7. 如果 $a > b, c < d$, 那么 $a - 4c$ _____ $b - 4d$. (填“>”或“<”)

8. 对于实数 a, b, c 有下列命题:

① 若 $a > b$, 则 $ac < bc$;

② 若 $ac^2 > bc^2$, 则 $a > b$;

③ 若 $a < b < 0$, 则 $a^2 > ab > b^2$;

④ 若 $c > a > b > 0$, 则 $\frac{a}{c-a} > \frac{b}{c-b}$;

⑤ 若 $a > b, \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$, 则 $a > 0, b < 0$.

其中真命题的个数是 _____.

9. 已知 $a \in \mathbf{R}, b \in \mathbf{R}$, 且 $a + b < 0$, 则 $a - 2$ _____ $5 - b$. (填“>”或“<”)

10. 已知 $0 < x < 4, 0 < y < 6$, 则 $2x - y$ 的取值范围是 _____.



11. 下列命题正确的个数是_____.

①若 $a > b$, 则 $ac^2 > bc^2$;

②若 $a > b$, 则 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$;

③若 a, b 是非零实数, 且 $a < b$, 则 $\frac{1}{ab^2} < \frac{1}{a^2b}$;

④若 $a < b < 0$, 则 $a^2 > ab > b^2$.

12. 已知实数 a, b 且 $a > b$, 当 a, b 满足条件_____时, 不等式 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ 成立.



2.2 区 间

一门科学,只有当它成功地运用数学时,才能达到真正完善的地步.

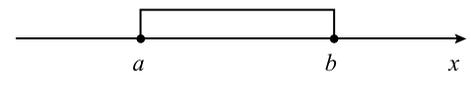
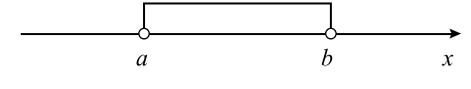
——马克思

知识回顾

一般地,由数轴上两点间的所有实数所组成的集合称为_____ ,这两个点称为_____ .

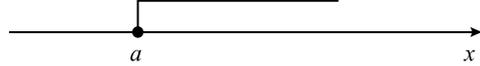
设 a, b 为任意实数,且 $a < b$, 则有限区间的表示如表 2-1 所示.

表 2-1

集合	名称	符号	数轴表示
$\{x a \leq x \leq b\}$	闭区间	$[a, b]$	
$\{x a < x < b\}$	_____	(a, b)	
$\{x a \leq x < b\}$	右半开区间	$[a, b)$	
$\{x a < x \leq b\}$	_____	$(a, b]$	

设 a 为任意实数,则无限区间的表示如表 2-2 所示.

表 2-2

集合	区间	数轴表示
$\{x x \geq a\}$	_____	
$\{x x > a\}$	$(a, +\infty)$	



二、填空题

1. 用区间表示下列集合.

(1) $\{x \mid x \geq -2\}$: _____;

(2) $\{x \mid 1 \leq x < 3\}$: _____;

(3) $\{x \mid -3 < x \leq 0 \text{ 或 } 1 < x < 2\}$: _____;

(4) \mathbf{R} : _____.

2. 用区间表示下列集合:

(1) $\{x \mid x \geq 1\}$: _____;

(2) $\{x \mid 4x + 8 \leq 0\}$: _____;

(3) $\{x \mid 2 \leq x \leq 8\}$: _____.

3. 若 $[a, 3a-1]$ 为一确定区间, 则 a 的取值范围是_____.

4. 在数轴上, 集合 $M = (-2, 10)$ 与集合 $N = [0, 13)$ 的公共部分用区间表示为

_____.

5. 若区间 $[2, a]$ 的长度不超过 5, 则实数 a 的取值范围用区间表示为_____.

三、解答题

1. 将下列集合用区间表示出来.

(1) $\{x \mid 3x - 7 \leq 2\}$;

(2) $\{x \mid x < -4 \text{ 或 } -1 < x \leq 2\}$.



2. 用区间表示下列集合: (1) $\left\{x \mid -\frac{1}{2} \leq x < 5\right\}$; (2) $\{x \mid x < 1\}$; (3) $\{x \mid x \geq 4\}$.

3. 解下列不等式, 并把解集在数轴上用区间表示出来.

(1) $5x + 15 > 4x - 13$;

(2) $\frac{2x-1}{3} - \frac{3x-1}{2} \leq 1$.



2.3 一元二次不等式

纯数学是魔术师真正的魔杖.

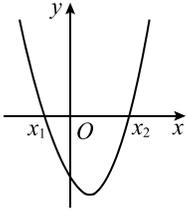
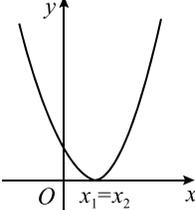
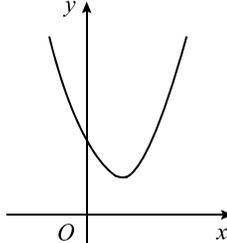
——诺瓦利斯

知识回顾

含有一个未知数, 并且未知数的最高次数为_____的不等式, 称为_____. 其一般形式为 $ax^2+bx+c>0(a\neq 0)$.

根据一元二次方程根的判别式的三种情况, 将一元二次方程的解、二次函数的图像和一元二次不等式的解集列表, 见表 2-3.

表 2-3

$\Delta=b^2-4ac$	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
$y=ax^2+bx+c(a>0)$ 的图像			
$ax^2+bx+c=0(a>0)$ 的解	有两个_____ $x_1, x_2(x_1<x_2)$	有两个相等的实数解 $\{x_1=x_2=_____ \}$	无实数解
$ax^2+bx+c>0(a>0)$ 的解集	_____	$\{x \mid x \neq -\frac{b}{2a}\}$	R
$ax^2+bx+c\geq 0(a>0)$ 的解集	$(-\infty, x_1] \cup [x_2, +\infty)$	_____	R
$ax^2+bx+c<0(a>0)$ 的解集	(x_1, x_2)	\emptyset	\emptyset
$ax^2+bx+c\leq 0(a>0)$ 的解集	$[x_1, x_2]$	_____	\emptyset

(其中 x_1, x_2 为 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的两个根, 判别式 $\Delta=b^2-4ac$)



典例解析

例4 解下列一元二次不等式.

(1) $x^2 - x - 6 > 0$;

(2) $x^2 < 9$;

(3) $-2x^2 + 4x - 3 \leq 0$;

(4) $2x^2 + 3x - 6 > 3x^2 + x - 1$.

分析: 先判断二次项系数是否为正数, 再对应一元二次方程解的情况, 写出不等式的解集.

解答: (1) 因为二次项系数为 $1 > 0$, 且方程 $x^2 - x - 6 = 0$ 的解为 $x_1 = -2$, $x_2 = 3$, 所以不等式 $x^2 - x - 6 > 0$ 的解集为 $(-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$.

(2) $x^2 < 9$ 可化为 $x^2 - 9 < 0$, 因为二次项系数为 $1 > 0$, 且方程 $x^2 - 9 = 0$ 的解为 $x_1 = -3$, $x_2 = 3$, 所以不等式 $x^2 < 9$ 的解集为 $(-3, 3)$.

(3) 因为二次项系数为 $-2 < 0$, 所以将不等式两边同乘 -1 , 得 $2x^2 - 4x + 3 \geq 0$.

由于判别式 $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 2 \times 3 = -8 < 0$, 因此方程 $2x^2 - 4x + 3 = 0$ 没有实数解, 从而不等式 $2x^2 - 4x + 3 \geq 0$ 的解集为 \mathbf{R} , 即 $-2x^2 + 4x - 3 \leq 0$ 的解集为 \mathbf{R} .

(4) 原不等式整理得 $x^2 - 2x + 5 < 0$.

由于判别式 $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 5 = -16 < 0$, 因此方程 $x^2 - 2x + 5 = 0$ 没有实数解, 从而不等式 $2x^2 + 3x - 6 > 3x^2 + x - 1$ 的解集为 \emptyset .

例5 当 x 是何值时, $\sqrt{3x^2 - x - 2}$ 有意义?

分析: 被开方式大于或等于零, 据此解关于 x 的一元二次不等式.

解答: 根据题意得 $3x^2 - x - 2 \geq 0$, $(3x + 2)(x - 1) \geq 0$, $x \leq -\frac{2}{3}$ 或 $x \geq 1$.

所以当 $x \in \left(-\infty, -\frac{2}{3}\right] \cup [1, +\infty)$ 时, $\sqrt{3x^2 - x - 2}$ 有意义.



专项小练

一、选择题

1. 已知集合 $A = \{x \in \mathbf{N} | x^2 \leq x\}$, $B = \{x | x^3 - x = 0\}$, 则()

A. $A \subsetneq B$	B. $A \supsetneq B$
C. $A = B$	D. $A \cap B = \emptyset$
2. 不等式 $x^2 - 4x - 5 < 0$ 的解集为()

A. $(-1, 5)$	B. $(2, 5)$	C. $(-\infty, 5)$	D. $(-\infty, -1)$
--------------	-------------	-------------------	--------------------
3. 已知集合 $M = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $N = \{x | x^2 + 2x - 8 \geq 0\}$, 则 $M \cap N =$ ()

A. $\{-2, 2\}$	B. $\{-2\}$
C. $\{2\}$	D. 2
4. 已知集合 $A = \{x \in \mathbf{N} | 1 < x \leq 4\}$, $B = \{x | x^2 - x - 6 \leq 0\}$, 则 $A \cap B =$ ()

A. $\{-2, 2, 3\}$	B. $\{2, 3\}$
C. $\{2, 3, 4\}$	D. $\{3, 4\}$
5. 设集合 $A = \{x | x^2 - 4x + 3 < 0\}$, $B = \{x | 2 - x > 0\}$, 则 $A \cap B =$ ()

A. $(-3, -2)$	B. $(-3, 2)$	C. $(1, 2)$	D. $(2, 3)$
---------------	--------------	-------------	-------------
6. 已知集合 $S = \{x \in \mathbf{Z} | x^2 - 3x - 4 < 0\}$, $T = \{-2, 0, 1\}$, 则 $S \cup T =$ ()

A. $\{0, 1\}$	B. $\{-2, -1, 0\}$
C. $\{-2, 0, 1, 2, 3\}$	D. $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$
7. 不等式 $(x+3)(x-1) > 0$ 的解集为()

A. $(-\infty, -3)$	B. $(1, +\infty)$
C. $(-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$	D. $(-3, -1)$
8. 已知集合 $A = \{x | 0 \leq x \leq 1\}$, $B = \{x | x^2 - 2x - 3 \geq 0\}$, 则 $A \cap \complement_{\mathbf{R}} B =$ ()

A. A	B. B	C. $\complement_{\mathbf{R}} A$	D. $\complement_{\mathbf{R}} B$
--------	--------	---------------------------------	---------------------------------
9. 已知集合 $A = \{-1, 2\}$, $B = \{x | x(x-2) > 0\}$, 那么 $A \cup B$ 等于()

A. $\{x x < 0 \text{ 或 } x > 2\}$	B. $\{x x < 0 \text{ 或 } x \geq 2\}$
C. $\{x x < -1 \text{ 或 } x \geq 2\}$	D. $\{x -1 < x < 0 \text{ 或 } x \geq 2\}$
10. 设集合 $\{x | x^2 - 3x + 2 > 0\}$, 集合 $B = \{x \in \mathbf{N} | 1 \leq x \leq 4\}$, 则 $A \cap B =$ ()

A. $\{x 2 < x \leq 4\}$	B. $\{2, 3, 4\}$	C. $\{3, 4\}$	D. \emptyset
---------------------------	------------------	---------------	----------------



11. 已知集合 $A = \{x \in \mathbf{N} \mid x^2 - 4x - 5 < 0\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, 则 $\complement_A B = (\quad)$
- A. $\{4\}$ B. $\{0, 4\}$ C. $\{0, 4, 5\}$ D. $\{4, 5\}$
12. 已知集合 $A = \{x \mid x^2 - 3x + 2 > 0\}$, $B = \{x \mid -3 < x < 3\}$, 则 $A \cap B = (\quad)$
- A. $\{x \mid -3 < x < -2 \text{ 或 } -1 < x < 3\}$ B. $\{x \mid 1 < x < 2\}$
- C. $\{x \mid -3 < x < 1 \text{ 或 } 2 < x < 3\}$ D. $\{x \mid x > 1\}$
13. 不等式 $x^2 > 1$ 的解集为 (\quad)
- A. $\{x \mid -1 < x < 0\}$ B. $\{x \mid 0 < x < 1\}$
- C. $\{x \mid -1 < x < 1\}$ D. $\{x \mid x < -1 \text{ 或 } x > 1\}$
14. 设集合 $A = \{x \in \mathbf{N}^* \mid x^2 - x - 2 \leq 0\}$, $B = \{2, 3\}$, 则 $A \cup B = (\quad)$
- A. $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$ B. $\{1, 2, 3\}$
- C. $[-1, 2]$ D. $[-1, 3]$
15. 已知集合 $A = \{x \mid -3 < x < 4\}$, $B = \{x \mid x^2 - 4x - 12 < 0\}$, 则 $A \cap B = (\quad)$
- A. $\{x \mid -2 < x < 4\}$ B. $\{x \mid -3 < x < 6\}$
- C. $\{x \mid -3 < x < 2\}$ D. $\{x \mid -6 < x < 4\}$
16. 已知集合 $A = \{x \mid -1 < x < 3\}$, $B = \{x \in \mathbf{N}^* \mid x^2 - 3x < 0\}$, 则 $A \cap B = (\quad)$
- A. $\{x \mid 0 < x < 3\}$ B. $\{x \mid -1 < x < 3\}$
- C. $\{1, 2\}$ D. $\{0, 1, 2\}$
17. 已知集合 $M = \{x \mid x^2 < 2\}$, $N = \{-1, 0, 1, 2\}$, 则 $M \cap N = (\quad)$
- A. $\{-1, 2\}$ B. $\{0, 1, 2\}$
- C. $\{-1, 1\}$ D. $\{-1, 0, 1\}$

二、填空题

- 不等式 $x^2 + x - 2 < 0$ 的解集为_____.
- 已知集合 $U = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $A = \{0\}$, $B = \{x \mid x^2 + x - 2 < 0\}$, 则 $(\complement_U A) \cap B =$ _____.
- 不等式 $-x^2 + 4x - 3 \geq 0$ 的解集是_____.
- 若关于 x 的不等式 $x^2 + ax - 2 < 0$ 的解集是 $(-1, b)$, 则 $a + b =$ _____.
- 不等式 $8 - x^2 > 2x$ 的解集是_____.
- 若 $0 < a < 1$, 则关于 x 的不等式 $x^2 - 3(a + a^2)x + 9a^3 \leq 0$ 的解集为_____.
- 已知集合 $M = \{x \mid x > -1\}$, $N = \{x \mid x^2 - x - 6 < 0\}$, 则 $M \cap N =$ _____.



8. 不等式 $-x^2 - x + 6 > 0$ 的解集是_____.
9. 若关于 x 的不等式 $x^2 - (m+2)x + 2m < 0$ 的解集中恰有 3 个正整数, 则实数 m 的取值范围为_____.
10. 不等式 $x^2 - 5x - 6 > 0$ 的解集是_____.
11. 已知集合 $M = \{x \in \mathbf{N} \mid (x+2)(x-3) < 0\}$, $N = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, 则 $M \cap N =$ _____.
12. 不等式 $-2x^2 + x + 1 > 0$ 的解集为_____.
13. 若一元二次不等式 $ax^2 + bx + 2 > 0$ 的解集是 $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$, 则 $a+b$ 的值是_____.
14. 若不等式 $(a-2)x^2 + 2(a-2)x - 4 < 0$ 对一切 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 则 a 的取值范围是_____.
15. 已知全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $A = \{x \mid x^2 - 4x \leq 0\}$, $B = \{x \mid m \leq x \leq m+2\}$, 若 $A \cap B \neq \emptyset$, 则实数 m 的取值范围为_____.



2.4 含绝对值的不等式

数学中的一些美丽定理具有这样的特性：它们极易从事实中归纳出来，但证明却隐藏得极深。

——高斯

知识回顾

1. 形如 $|x| < a$ 与 $|x| > a (a > 0)$ 的不等式的解法

$|x| < a$ 的解集是_____；

$|x| > a$ 的解集是_____。

2. 形如 $|ax+b| < c$ 或 $|ax+b| > c (c > 0)$ 的不等式的解法

通过“变量替换”的方法求解。

$|ax+b| < c \Leftrightarrow$ _____。

$|ax+b| > c \Leftrightarrow$ _____或 $ax+b > c$ 。

一般情况下，当 $a > 0$ 时，含绝对值的不等式的解集总结归纳见表 2-4。

表 2-4

含绝对值的不等式	同解不等式	数轴表示
$ x \leq a$	_____	
$ x < a$	_____	
$ x \geq a$	$x \geq a$ 或 $x \leq -a$	
$ x > a$	$x > a$ 或 $x < -a$	



典例解析

例6 解下列不等式.

(1) $3|x| - 1 > 0$; (2) $2|x| \leq 6$; (3) $|2x - 1| \leq 3$; (4) $|2x + 5| > 7$.

分析: 先将不等式化成 $|x| < a$ 或 $|x| > a$ 的形式再求解.

解答: 由不等式 $3|x| - 1 > 0$, 得 $|x| > \frac{1}{3}$, 所以原不等式的解集为 $(-\infty, -\frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3}, +\infty)$.

(2) 由不等式 $2|x| \leq 6$, 得 $|x| \leq 3$, 所以原不等式的解集为 $[-3, 3]$.

(3) 由不等式 $|2x - 1| \leq 3$, 得 $-3 \leq 2x - 1 \leq 3$, 解得 $-1 \leq x \leq 2$, 所以原不等式的解集为 $[-1, 2]$.

(4) 由不等式 $|2x + 5| > 7$, 得 $2x + 5 < -7$ 或 $2x + 5 > 7$, 解得 $x < -6$ 或 $x > 1$, 所以原不等式的解集为 $(-\infty, -6) \cup (1, +\infty)$.

名师点拨



绝对值的加入将不等式的计算提升了一个难度, 看似是一个等式, 实则需要将其转化为两个不等式分别计算, 再求最终解集.

专项小练

一、选择题

1. 不等式 $|x - 1| > 2$ 的解集为()

A. $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$

B. $(-1, 3)$

C. $(-1, +\infty)$

D. $(3, +\infty)$

2. 若关于 x 的不等式 $|x - 1| + |x + 2| < a$ 的解集为空集, 则实数 a 的取值范围是()

A. $a \leq 1$

B. $a < 1$

C. $a < 3$

D. $a \leq 3$

3. 已知 $a, b \in \mathbf{R}$, 且 $ab < 0$, 则()

A. $|a + b| > |a - b|$

B. $|a + b| < |a - b|$

C. $|a - b| < |a| - |b|$

D. $|a - b| < |a| + |b|$

三、解答题 (共 5 题, 满分 45 分)

16. (1) 判断下列各组对象能否构成集合:

- ① 未来世界的高科技产品;
- ② 小于 0 的数;
- ③ 与 0 非常接近的数;
- ④ 函数 $y=5-x$ 的图像上的所有点.

(2) 若 $x \in \mathbf{N}$, 则 $\{2, x, x^2-x\}$ 中的元素 x 必须满足什么条件?

17. 已知集合 $A = \{x | x \leq -2 \text{ 或 } x \geq 5\}$, $B = \{x | m+1 \leq x \leq 2m-1\}$.

(1) 求 $\complement_{\mathbf{R}}A$.

(2) 若 $(\complement_{\mathbf{R}}A) \cup B = \complement_{\mathbf{R}}A$, 求实数 m 的取值范围. (结果用集合表示)

18. 已知集合 $A = \{x | 3 \leq x < 7\}$, $B = \{x | 2 < x < 10\}$, $C = \{x | 5-a < x < a\}$.

(1) 求 $A \cup B$;

(2) 若 $C \subseteq (A \cup B)$, 求实数 a 的取值范围.

19. 已知集合 $A = \{x | 3 \leq x < 7\}$, $B = \{x | 2 < x < 10\}$, 求, $\complement_{\mathbf{R}}(A \cup B)$, $\complement_{\mathbf{R}}(A \cap B)$, $(\complement_{\mathbf{R}}A) \cap B$, $A \cup (\complement_{\mathbf{R}}B)$.

20. 学校开运动会, 设 $A = \{x | x \text{ 是参加 } 100 \text{ m 跑的同学}\}$, $B = \{x | x \text{ 是参加 } 200 \text{ m 跑的同学}\}$, $C = \{x | x \text{ 是参加 } 400 \text{ m 跑的同学}\}$, 学校规定, 每个参加上述比赛的同学最多只能参加两项比赛, 请你用集合的运算说明这项规定, 并解释以下集合运算的含义:

(1) $A \cup B$;

(2) $A \cap C$.

三、解答题 (共 5 题, 满分 45 分)

16. (1) 用列举法表示下列集合:

- ① 15 的正约数组成的集合;
- ② 不大于 10 的非负偶数集;
- ③ 两边分别在坐标轴的非正半轴上, 且边长为 1 的正方形的顶点组成的集合;
- ④ 设 x, y 都是非零实数, $\frac{x}{|x|} + \frac{y}{|y|} + \frac{xy}{|xy|}$ 的可能取值组成的集合.

(2) 用描述法表示下列集合:

- ① 正偶数集;
- ② 被 3 除余 2 的正整数的集合.

17. 已知集合 $A = \{x \mid -5 < x \leq 2\}$.

- (1) 若 $B = \{x \mid x \geq m\}$, $A \cup B = B$, 求实数 m 的取值范围;
- (2) 若 $C = \{x \mid x < m - 2 \text{ 或 } x > m\}$, $A \cup C = \mathbf{R}$, 求实数 m 的取值范围.

18. 已知全集 $U = \mathbf{R}$, 若集合 $A = \{x \mid -1 \leq x \leq 2\}$, $B = \{x \mid x - a \leq 0\}$.

- (1) 若 $a = 1$, 求 $A \cup B$;
- (2) 若 $A \cap B = A$, 求实数 a 的取值范围.

19. 设 $A = \{x \mid x^2 + ax - 2 = 0\}$, $B = \{x \mid x^2 - 3x + b = 0\}$, $A \cap B = \{1\}$, $C = \{2, -4\}$.

- (1) 求 a, b 的值及 A, B ;
- (2) 求 $(A \cup B) \cap C$.

20. 已知集合 $A = \{x \mid -3 < 2x + 1 < 7\}$, 集合 $B = \{x \mid x < -4 \text{ 或 } x > 2\}$, $C = \{x \mid 3a - 2 < x < a + 1\}$.

- (1) 求 $A \cap (\complement_{\mathbf{R}} B)$;
- (2) 若 $\complement_{\mathbf{R}}(A \cup B) \subseteq C$, 求实数 a 的取值范围.

数学第 1 单元测试 (三)

(本卷满分 120 分, 完成时间 150 分钟)

一、单项选择题 (共 10 题, 满分 50 分)

1. 若全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, 集合 $A = \{1, 3, 6\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, 则 $A \cap (\complement_U B) = (\quad)$
 - A. $\{3\}$
 - B. $\{1, 6\}$
 - C. $\{5, 6\}$
 - D. $\{1, 3\}$
2. 若集合 $A = \{x \mid -1 < x < 3\}$, $B = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$, $C = \{1, 2, 3\}$, 则集合 $(A \cap B) \cup C = (\quad)$
 - A. $\{-1, 0, 1, 2\}$
 - B. $\{0, 1, 2\}$
 - C. $\{0, 1, 2, 3\}$
 - D. $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$
3. 已知集合 $A = \{x \mid -3 < x < 7\}$, $B = \{x \in \mathbf{N} \mid x > 3\}$, 则 $A \cap B = (\quad)$
 - A. $\{x \mid 3 < x < 7\}$
 - B. $\{x \mid -3 < x < 3\}$
 - C. $\{4, 5, 6\}$
 - D. $\{4, 5, 6, 7\}$
4. 设集合 $A = \{x \mid -2 < x < 4\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$, 则 $A \cap B = (\quad)$.
 - A. $\{2\}$
 - B. $\{2, 3\}$
 - C. $\{3, 4\}$
 - D. $\{2, 3, 4\}$
5. 已知集合 $M = \{x \mid x+2 \geq 0\}$, $N = \{x \mid x-1 < 0\}$, 则 $M \cap N = (\quad)$
 - A. $\{x \mid -2 \leq x < 1\}$
 - B. $\{x \mid -2 < x \leq 1\}$
 - C. $\{x \mid x \geq -2\}$
 - D. $\{x \mid x < 1\}$
6. 已知 $x \in \{1, 2, x^2\}$, 则 x 的值为 (\quad)
 - A. 1
 - B. 1 或 2
 - C. 0 或 2
 - D. 0 或 1 或 2

7. 已知 $A = \{x \mid x = 3k+1, k \in \mathbf{Z}\}$, 则下列判断正确的是 (\quad)
 - A. $-4 \in A$
 - B. $4 \notin A$
 - C. $-7 \in A$
 - D. $7 \in A$
8. 集合 $A = \{x \mid 3x+2 > m\}$, 若 $-1 \in A$, 则 (\quad)
 - A. $m < -1$
 - B. $m > -1$
 - C. $m \leq -1$
 - D. $m \geq -1$
9. 由实数 $x, -x, |x|, \sqrt{x^2}, -\sqrt[3]{x^3}$ 所组成的集合中最多含有 (\quad)
 - A. 2 个元素
 - B. 3 个元素
 - C. 4 个元素
 - D. 5 个元素
10. 已知集合 $A = \{x \mid -5 < x^3 < 5\}$, $B = \{-3, -1, 0, 2, 3\}$, 则 $A \cap B = (\quad)$
 - A. $\{-1, 0\}$
 - B. $\{2, 3\}$
 - C. $\{-3, -1, 0\}$
 - D. $\{-1, 0, 2\}$

二、填空题 (共 5 题, 满分 25 分)

11. 已知集合 $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $B = \{x \mid x > m\}$. 若 $A \cap (\complement_{\mathbf{R}} B)$ 中只有三个元素, 则实数 m 的取值范围是_____.
12. 设集合 $M = \{(x, y) \mid x+y < 0, xy > 0\}$ 和集合 $P = \{(x, y) \mid x < 0, y < 0\}$, 那么 M 与 P 的关系为_____.
13. 已知 $A = \{x \mid 2x \leq 1\}$, $B = \{-1, 0, 1\}$, 则 $A \cap B =$ _____.
14. 已知集合 $A = \{-4, 2a-1, a^2\}$, $B = \{a-5, 1-a, 9\}$, $9 \in A \cap B$, 则 $a =$ _____.
15. 设全集 $U = \{x \mid x^2 - 6x + a = 0\}$, $\complement_U A = \{5\}$, 则集合 $A =$ _____.

三、解答题 (共 5 题, 满分 45 分)

16. 用列举法表示下列集合:

- (1) $A = \{x \mid x^2 = 9\}$;
- (2) $B = \{x \in \mathbf{N} \mid 1 \leq x \leq 2\}$;
- (3) $C = \{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$.

17. 已知全集 $U = A \cup B = \{x \in \mathbf{N} \mid 0 \leq x \leq 10\}$, $A \cap (\complement_U B) = \{1, 3, 5, 7\}$, 试求集合 B .

18. 指出下列各集合之间的关系, 并用 Venn 图表示: $A = \{x \mid x \text{ 是四边形}\}$, $B = \{x \mid x \text{ 是平行四边形}\}$, $C = \{x \mid x \text{ 是矩形}\}$, $D = \{x \mid x \text{ 是正方形}\}$.

19. 已知集合 $A = \{x \mid 0 < x < 2\}$, $B = \{x \mid 1 < x < -a\}$.

- (1) 若 $a = -3$, 求 $A \cup (\complement_{\mathbf{R}} B)$;
- (2) 若 $A \cap B = B$, 求 a 的取值范围.

20. 已知集合 $A = \{x \mid -2 < x < 8\}$, $B = \{x \mid 2m - 1 < x < m + 3\}$.

- (1) 若 $A \cup B = A$, 求实数 m 的取值范围;
- (2) 若 $A \cap B = \{x \mid a < x < b\}$, 且 $b - a = 3$, 求实数 m 的值.

三、解答题 (共 5 题, 满分 45 分)

16. 回答下列问题:

- (1) 已知 $x^2 - 4x + y^2 + 2y + 5 = 0$, 求 $x + y$ 的值;
- (2) 比较代数式 $x^2 - 1$ 与 $2x - 3$ 的大小.

17. 已知 $a > b > 0$, $c < d < 0$, $e < 0$, 比较 $\frac{e}{a-c}$ 与 $\frac{e}{b-d}$ 的大小.

18. 试比较下列各组式子的大小:

- (1) $\sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ 与 $\sqrt{x} - \sqrt{x-1}$, 其中 $x > 1$;
- (2) $M = \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b}$ 与 $N = \frac{b}{1+a} + \frac{a}{1+b}$, 其中 $a > 0$, $b > 0$;
- (3) $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$ 与 $\frac{a-b}{a+b}$, $a > b > 0$.

19. 设 $a_1 > 0$, 且 $a_1 \approx \sqrt{2}$, 令 $a_2 = 1 + \frac{1}{1+a_1}$.

- (1) 证明: $\sqrt{2}$ 介于 a_1 , a_2 之间.
- (2) 求 a_1 , a_2 中哪个更接近 $\sqrt{2}$.
- (3) 你能设计一个比 a_2 更接近 $\sqrt{2}$ 的 a_3 吗? 并说明理由.

20. 解关于 x 的不等式 $x^2 - (a+1)x + a \geq 0$, $a \in \mathbf{R}$.

