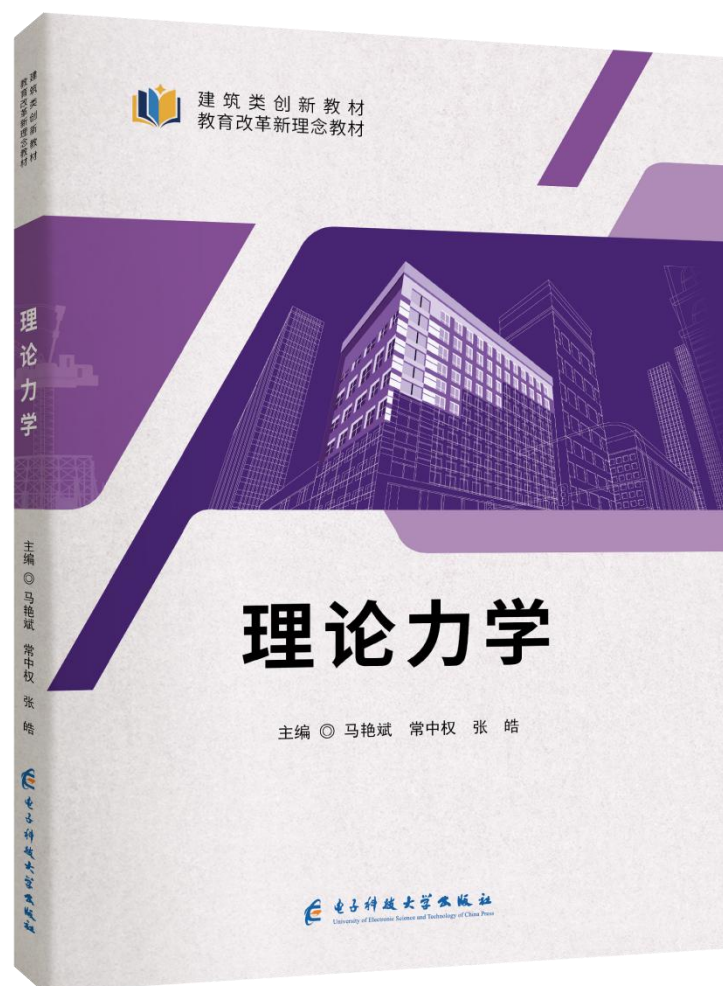


理论力学



类目：建筑类

书名：理论力学

主编：马艳斌 常中权 张皓

出版社：电子科技大学出版社

开本：大 16 开

书号：978-7-5770-1871-3

使用层次：通用

出版时间：2025 年 8 月

定价：45.00 元

印刷方式：双色

是否有资源：有

建筑类创新教材
教育改革新理念教材



建筑类创新教材
教育改革新理念教材

理论力学

理论力学

主编 © 马艳斌 常中权 张皓

电子科技大学出版社

理论力学

主编 © 马艳斌 常中权 张皓

电子科技大学出版社
University of Electronic Science and Technology of China Press

策划编辑: 万晓桐
责任编辑: 万晓桐
封面设计: 旗语书装



定价: 45.00元



建筑类创新教材
教育改革创新理念教材



理论力学

主编 © 马艳斌 常中权 张 皓



电子科技大学出版社
University of Electronic Science and Technology of China Press

· 成都 ·

图书在版编目(CIP)数据

理论力学 / 马艳斌, 常中权, 张皓主编. -- 成都 :
成都电子科大出版社, 2025. 8. -- ISBN 978-7-5770
-1871-3

I. O31

中国国家版本馆 CIP 数据核字第 2025HH6666 号

理论力学

LILUN LIXUE

马艳斌 常中权 张 皓 主编

策划编辑 万晓桐
责任编辑 万晓桐
责任校对 李燕芬
责任印制 梁 硕

出版发行 电子科技大学出版社
成都市一环路东一段 159 号电子信息产业大厦九楼 邮编 610051

主 页 www.uestcp.com.cn

服务电话 028-83203399

邮购电话 028-83201495

印 刷 涿州汇美亿浓印刷有限公司

成品尺寸 210 mm×285 mm

印 张 11

字 数 278 千字

版 次 2025 年 8 月第 1 版

印 次 2025 年 8 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-5770-1871-3

定 价 45.00 元

版权所有，侵权必究

前言

本书是根据教育部对高等学校工科理论力学课程（中、少学时）教学的基本要求编写而成的。

“理论力学”是一门重要的、理论性较强的专业基础课，是工科专业的基础课程，尤其是机械类、航空航天类、土木建筑类专业的必修课，在工程领域具有广泛的应用。通过本课程的学习，使学生在掌握本课程基本知识的基础上，学会运用基本理论、方法解决工程中的实际问题，培养学生的辩证唯物主义世界观及分析解决问题的能力，为学习后续课程打好基础。

在编写过程中，编者根据多年来在理论力学教学中积累的经验，汲取同类教材的精华，尝试用现代和实用的观点阐述理论力学的核心内容和方法，使本书既满足了本课程的基本要求，又注重与先修的“高等数学”“大学物理”课程的衔接，以及向“材料力学”等后续课程的过渡。在优化教学内容的同时，加强学生能力的培养，本书特点概括如下。

（1）充分利用先修课程的基础作用，减少课程间内容的重复。本书内容做了较大幅度的整合和调整，激发学生的学习兴趣 and 主观能动性。

（2）注重以工程实际为背景，加深对基本概念的阐述和工程建模能力的培养，既重视理论，又注重对解题过程的分析。

（3）本书定位明确，可作为高等学校相关专业理论力学课程（中、少学时）的教材。

由于作者水平有限，疏漏之处敬请读者批评指正。

编者
2025年5月

目 录

绪论 / 1

- 一、理论力学的研究对象与内容 / 1
- 二、理论力学发展的简要回顾 / 1
- 三、学习理论力学的方法 / 2

第一篇 静力学

项目一 静力学基础 / 5

- 任务一 静力学基本概念 / 5
- 任务二 静力学公理 / 6
- 任务三 约束与约束反力 / 9
- 任务四 受力图 / 12
- 项目小结 / 16
- 项目习题 / 17

项目二 平面基本力系 / 19

- 任务一 平面汇交力系合成 / 19
- 任务二 平面汇交力系平衡方程及应用 / 22
- 任务三 力对点之矩 合力矩定理 / 26
- 任务四 平面力偶系 / 28
- 任务五 平面力偶系的合成与平衡 / 31
- 项目小结 / 34
- 项目习题 / 34

项目三 平面任意力系 / 38

- 任务一 力的平移定理 / 38
- 任务二 平面任意力系向一点简化 / 40
- 任务三 分布载荷 / 43
- 任务四 平面任意力系的平衡方程及应用 / 45

任务五 平面平行力系的平衡方程 / 50

任务六 摩擦 / 51

项目小结 / 58

项目习题 / 60

项目四 空间力系和重心 / 64

任务一 力在空间直角坐标轴上的投影 / 64

任务二 力沿空间直角坐标轴的分解 / 66

任务三 力对轴之矩 / 67

任务四 空间任意力系的平衡方程 / 70

任务五 空间汇交力系及空间平行力系的平衡方程 / 73

任务六 重心 / 74

项目小结 / 81

项目习题 / 82

第二篇 运动学

项目五 点的曲线运动 / 85

任务一 点的运动规律 / 85

任务二 用自然法求点的速度、加速度 / 89

任务三 用直角坐标法求点的速度、加速度 / 94

项目小结 / 98

项目习题 / 99

项目六 刚体的基本运动 / 101

任务一 刚体的平动 / 101

任务二 刚体绕定轴转动 / 103

任务三 转动刚体内各点的速度和加速度 / 106

项目小结 / 110

项目习题 / 110

项目七 点的合成运动 / 112

任务一 绝对运动、相对运动、牵连运动 / 112

任务二 点的速度合成与加速度合成 / 115

项目小结 / 120

项目习题 / 120

项目八 刚体的平面运动 / 123

- 任务一 刚体的平面运动方程 / 123
- 任务二 基点法求平面图形内各点速度 / 124
- 任务三 瞬心法求平面图形内各点速度 / 128
- 任务四 基点法求平面图形内各点加速度 / 130
- 项目小结 / 132
- 项目习题 / 132

第三篇 动力学**项目九 质点和刚体动力学 / 136**

- 任务一 动力学基本定律 / 136
- 任务二 质点运动微分方程及应用 / 138
- 任务三 动静法 / 142
- 任务四 刚体定轴转动微分方程 / 144
- 项目小结 / 148
- 项目习题 / 149

项目十 动能定理 / 153

- 任务一 力的功 / 153
- 任务二 质点的动能定理 / 157
- 任务三 功率 / 160
- 项目小结 / 163
- 项目习题 / 164

参考文献 / 168

绪 论

理论力学是一门理论性较强的专业基础课,随着科学技术的发展,工程专业中许多课程均以理论力学为基础。本课程的理论和方法对于解决现代工程问题具有重要意义。

一、理论力学的研究对象与内容

理论力学是研究物体机械运动一般规律的学科。

理论力学的研究对象是刚体,研究内容是刚体的受力与机械运动关系的一般规律。

机械运动是指物体在空间的位置随时间的变化。机械运动是生活和生产实际中最常见的一种运动。平衡是机械运动的一种特例。在客观世界中,存在各种各样的物质运动,如热、光和电磁等物理现象,化合和分解等化学变化,以及人的思维活动等。在这些运动形式中,机械运动是最简单的一种。

本课程研究的对象是速度远小于光速的宏观物体的机械运动,它以伽利略和牛顿的基本定律为基础,属于古典力学的范畴。当研究运动速度接近于光速的物质运动时,必须用相对论和量子力学的方法。宏观物体远小于光速的运动是日常生活和一般工程中常见的,因此,古典力学有广泛的应用。理论力学所研究的就是这种运动中的一般、普遍的规律,是各门力学分支学科的基础。

本课程的内容包括以下三部分。

静力学——主要研究物体平衡时作用力应满足的条件,物体受力的分析方法和力系的简化方法等。

运动学——从几何的角度研究物体运动的描述方法,如运动的轨迹、速度和加速度等,而不涉及引起物体运动的物理原因。

动力学——研究物体的运动与作用在物体上的力之间的关系。

二、理论力学发展的简要回顾

力学的发展具有悠久的历史,是科学发展史的一部分,力学的发展过程体现了人类通过观察生活和生产实践中的各种现象,不断深化对物体机械运动的认识过程。

远古时代,人们使用杠杆、斜面和滑轮进行简单的建筑施工,制造推车用作长途运输,制造

船舶用以进行航运等。这些生产工具的制造和使用,使得人类对于机械运动有了初步的认识。但是,在很长的一段时期内,人类的认知仅仅限于经验的积累,而未形成理论知识。

关于力学理论最早的记述,当推我国的墨翟(约前 470—约前 380 年)。在他所著的《墨经》里,对于力和运动给出了合适的定义,并对于杠杆平衡问题进行了理论叙述。阿基米德(约公元前 287—公元前 212 年)在他的两本著作里,较系统地论述了杠杆平衡学说,从而奠定了静力学的基础。

15 世纪中叶到 18 世纪后半叶,是欧洲的封建社会向资本主义社会转化时期,为了适应当时的社会与工业发展,力学与其他自然科学一样得到了发展。如意大利人达·芬奇(1452—1519 年)提出了力矩概念;芬兰物理学家斯蒂文(1548—1620 年)在进行斜面问题研究时提出了力的合成与分解定律;潘索(1777—1859 年)提出了力偶的概念及有关的理论等,使得静力学理论得到了进一步的发展。

哥白尼(1473—1543 年)提出了太阳中心学说后,在科学界引起了宇宙观的大革命。开普勒(1571—1630 年)根据哥白尼的学说以及别的一些天文学家的观测资料,得出了行星运动三大定律,成为牛顿万有引力的基础。伽利略观察了落体运动并试验了物体沿斜面的运动,从而提出了落体在真空中的运动定律,并引出了加速度的概念,奠定了动力学的基础。他是用实验及演绎的方法研究动力学的创始人。

力学发展的新阶段是从牛顿(1643—1727 年)开始的。他总结了以前无数科学家的成就,发表了著名的运动定律学说,创立了现代的经典力学。

由此可见,运动学与动力学的理论研究,可以认为是从哥白尼提出的太阳中心学说开始,由伽利略奠定基础,而由牛顿总结而成的,并由此形成了理论力学的理论框架与体系。理论力学的发展过程,充分反映了人们不断通过科学实验、分析、综合和归纳,并总结出力学中最基本规律的认识过程。

三、学习理论力学的方法

实践—认识—再实践—再认识,这是我们认识客观世界的基本规律,是任何科学技术发展的正确途径。理论力学的发展也必须遵循这一规律,具体地说,就是从实际出发,先经过抽象、综合、归纳,建立公理;然后运用数学演绎和逻辑推理而得到定理和结论,形成理论体系;再通过实践来验证理论的正确性,正确的理论再被反过来用于指导人们改造世界的各种实践活动。

学习理论力学要准确地理解基本原理和方法,还要加强应用基本原理解决工程问题的实践练习。理论力学课程是将基本原理用于工程实际的训练园地,对培养学生的基本素质有重要的作用。在这门课程中,同学们还要学习解决工程实际问题的简化方法和建模的原理以及求解工程实际问题的模式。工程实际问题多种多样,进行力学分析时要抓住其特点进行必要

的简化。例如,约束是从对物体运动的限制观点对常见的约束进行分析和简化。

另外,在本门课程中,同学们还要接受解决工程实际问题的基本方法和模式的训练,如物体的受力分析方法、复杂运动的分解方法和解决动力学问题的基本步骤等。这些分析方法是工程界长期使用和遵循的基本步骤,同学们要有意识地适应和掌握有关的步骤,逐渐掌握科学思考问题和解决问题的正确方法。

理论力学中解决同一问题可以选择多种不同的方法,在学习的过程中同学们要注意分析每种方法的特点,比较各种方法的异同,灵活运用所学的原理,并通过一定数量的练习,达到准确掌握、熟练应用理论力学的基本原理和方法的目的。

理论力学课程的内容是学习“材料力学”“机械设计”以及“流体力学”等多门课程的基础,学好本门课程将为其他课程的学习和今后的研究奠定坚实的基础。

第一篇 静力学

- 项目一 静力学基础
- 项目二 平面基本力系
- 项目三 平面任意力系
- 项目四 空间力系和重心



项目一 静力学基础

任务一

静力学基本概念

任务描述：掌握力的概念及力的三要素；

掌握力学中标量和矢量的概念及表达方式；

熟悉刚体的概念。

任务分析：研究静力学之前，应掌握静力学中的基本概念。本任务主要介绍这些基本概念，包括力和刚体的概念。

一、力

人用手去拉悬挂着的静止弹簧，人手和弹簧之间有了相互作用，这种作用引起了弹簧的运动和变形。人们在生活和生产实践中，经过长期的观察和分析，逐步形成和建立了力的科学概念：力是物体之间相互的机械作用，这种作用使物体的运动状态和形状发生了改变。物体运动状态的改变是力的外效应，物体形状的改变是力的内效应。静力学、运动学和动力学只研究力的外效应，材料力学研究力的内效应。

应当指出，上述机械作用是指物体在机械运动中的相互作用，而不是物体在其他物质运动形式中的相互作用(如热的、电磁的、化学的作用)。力是物体间相互的机械作用，因此力不能脱离物体而存在。

力对物体的效应，取决于力的大小、方向和作用点三个因素。这三个因素称为力的三要素。当这三个要素中任何一个有所改变时，力的作用效果就会改变。

为了度量力的大小必须选择单位，本书采用国际单位制(SI)，力的单位为牛顿(N)或千牛(kN)。在工程单位制中，力的单位为千克力(kgf)。二者的换算关系为 $1 \text{ kgf} = 9.8 \text{ N}$ 。

在力学中有两类量：标量和矢量。只考虑大小的量称为标量，例如：长度、时间和质量

都是标量；既考虑大小又考虑方向的量称为矢量，例如：力和速度都是矢量。

矢量可用一条具有方向的线段来表示，如图 1-1 所示。线段的起点 A (或终点 B) 表示力的作用点；箭头的指向表示力的方向；线段的长度(按一定的比例尺)表示力的大小。通过力的作用点沿力的方向的直线，称为力的作用线。本书中用粗体字母表示矢量，而以普通字母表示该向量的模(即大小)。图 1-1 中 \mathbf{F} 表示力的矢量， F (普通体) 表示该力的大小($F=60\text{ N}$)。手写时，也可在字母上加带箭头的横线 \vec{F} 或用 \overrightarrow{AB} 来表示矢量。

10N

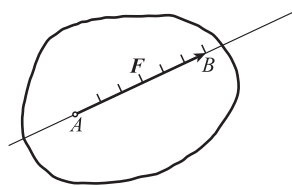


图 1-1 力的表示

如果一个力系对物体的作用，能用另一个力系来代替而不改变它对物体作用的效果，则这两个力系互为等效力系。若一个力和一个力系等效，则称这个力是该力系的合力，而力系中的各个力都是其合力的分力。把各分力代换成合力的过程，称为力的合成；把合力代换成几个分力的过程，称为力的分解。

二、刚体

所谓刚体，就是在任何情况下，物体内任意两点间的距离都保持不变。或者说，在任何外力作用下，大小和形体始终保持不变的物体称为刚体。事实上，刚体是不存在的。任何物体受力后，都将或多或少地改变形状，即发生变形。但在多数情况下，变形都很微小，在研究物体的平衡问题时将它略去不计不会影响计算结果的准确性。因此，在静力学中把真实的物体当作理想的刚体。可见刚体是力学中对物体进行抽象简化后的一种理想模型，这样的抽象化，将使静力学问题的研究大为简化。

任务二

静力学公理

任务描述：掌握静力学四大公理及其推论。

任务分析：所谓公理，就是符合客观现实的真理。静力学公理就是人类对客观现实长期观察、分析、抽象、归纳和总结而得出的结论。它的正确性只能用实验方法证实，而不能用更基本的原理来证明。静力学的全部理论，就是以静力学公理为依据推导而来的。本任务主要学习这些静力学公理及其推论。

公理 1(二力平衡公理) 作用于刚体的两个力,使刚体保持平衡的充分必要条件是:这两个力大小相等,方向相反并且作用在同一直线上。

对于变形体来说,公理 1 给出的条件是必要的,但不充分。例如,软绳受两个等值、反向的拉力可以平衡;当受两个等值、反向的压力时,就不能平衡了(图 1-2)。

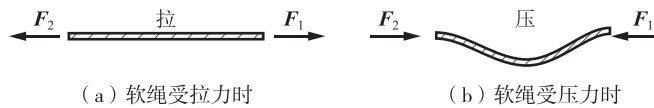


图 1-2 变形体受力示意图

在两个力作用下处于平衡的物体称为二力构件,也称为“二力杆件”。图 1-3(a)为一棘轮机构,棘爪 AB 的 A 端用圆柱形销钉连接, B 端被卡在棘轮的槽中,棘爪若不计自重则为二力构件。根据二力平衡公理可以确定销钉给爪的力 F_A 和棘轮给爪的力 F_B 一定是等值、反向且共线的,如图 1-3(b)所示。由此可见,二力杆件所受二力的作用线一定是沿此二力作用点的连线。

公理 2(加减平衡力系公理) 在已知力系上加上或者减去任意一个平衡力系,不会改变原力系对刚体的作用效果。

推论(力的可传性原理) 作用在刚体上的力,可以沿其作用线任意移动而不改变对刚体的作用。

在实践中,人们有这样的体会,以等量的力在车后 A 点推和在车前 B 点拉,效果是一样的(图 1-4)。由力的可传性原理可以看出,对刚体来说力的作用点已不再是决定其效应的要素之一,而是被作用线取代。因此,作用于刚体上力的三要素是力的大小、方向和作用线位置。

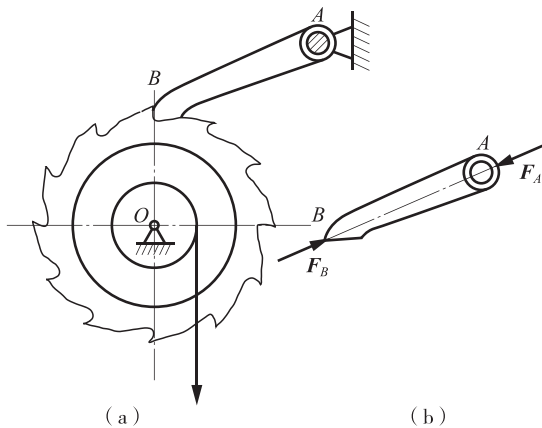


图 1-3 棘爪受力分析

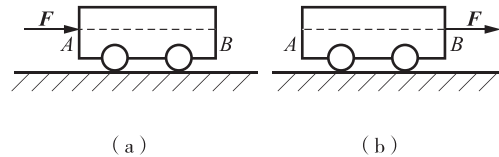


图 1-4 等效的作用力

应当指出,加上或减去一个平衡力系,或使力沿着作用线移动,不会改变力对物体的外效应,但要改变力对物体的内效应。所以,公理 2 及其推论都只适用于刚体而不适用于变形体。

公理 3(力的平行四边形公理) 作用于某一点的两个力的合力,其作用线必通过该点,其大小和方向可由以此二力的力矢为邻边所作的平行四边形的对角线矢量表示,如图 1-5(a)所示。

这个公理也称为“平行四边形定则”,根据这个公理所作出的平行四边形,称为力的平行四边形。

这种求合力的方法,称为矢量加法,合力矢等于原来两力的矢量和(几何和),可用公式表示为

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$$

为了方便,在用矢量加法求合力时,可不必画出整个平行四边形,而是从 A 点作一个力与力 \mathbf{F}_1 大小相等、方向相同的向量 \overrightarrow{AB} ,过 B 点作一个与力 \mathbf{F}_2 大小相等、方向相同的向量 \overrightarrow{BC} ,则 \overrightarrow{AC} 就是力 \mathbf{F}_1 、 \mathbf{F}_2 的合力 \mathbf{R} 。这种求合力的方法,称为力三角形法则,如图 1-5(b)所示。

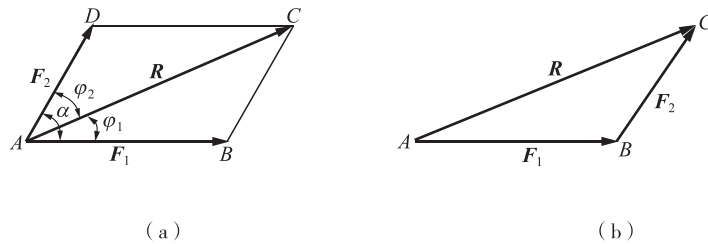


图 1-5 力的平行四边形公理与力的三角形法则

推论(三力平衡汇交定理) 当刚体受到同平面内互不平行的三个力作用而平衡时,则此三力作用线必汇交于一点。这就是三力平衡汇交定理。

证明 图 1-6 中,刚体上 A、B、C 三点,分别作用着互成平衡的三个力 \mathbf{F}_1 、 \mathbf{F}_2 和 \mathbf{F}_3 ,它们的作用线都在平面 ABC 内但不平行。 \mathbf{F}_1 与 \mathbf{F}_2 的作用线交于 O 点,根据力的可传性原理,可将此二力分别移至 O 点,则此二力的合力 \mathbf{R} 必定在此平面内且通过 O 点(公理 3)。而 \mathbf{R} 必须和 \mathbf{F}_3 平衡。由公理 1 知 \mathbf{F}_3 与 \mathbf{R} 必共线,所以 \mathbf{F}_3 的作用线亦必通过力 \mathbf{F}_1 、 \mathbf{F}_2 的交点,即三个力的作用线汇交于一点。

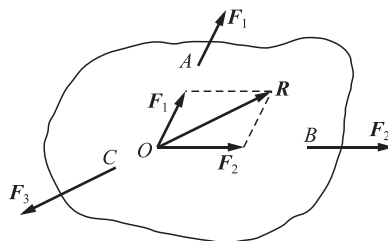


图 1-6 三力平衡汇交力系

公理 4(作用与反作用公理) 一物体对另一物体有一作用力时,另一物体对此物体必有一反作用力。这两个力大小相等、方向相反,且分别作用在两个物体上。

这个公理说明力永远是成对出现的,物体间的作用总是相互的,有作用力就有反作用力,两者总是同时存在,又同时消失。

图 1-7(a)表示一重物用钢丝绳吊在天车上, G 为重物所受的重力, T 为钢绳对重物的拉力,它们都作用在重物上,所以二者不是作用与反作用的关系。当钢绳给重物以拉力 T 的同时,重物必给钢绳以反作用力 T' ,如图 1-7(b)所示。 T 作用在重物上, T' 作用在钢绳上, T 和 T' 是作用力与反作用力的关系。

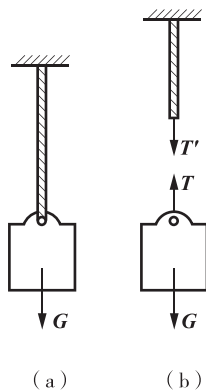


图 1-7 作用力与反作用力

任务三

约束与约束反力

任务描述: 掌握约束的概念;

掌握主动力和约束反力的概念;

了解常见的约束类型。

任务分析: 机械和工程结构中的每个构件,都是相互联系而又相互制约的,它们之间存在着相互作用的力。在解决工程中一般的力学问题时,都必须对零件、构件的受力情况进行分析,因此就需要对物体相互联系的方式进行研究。本任务主要介绍约束的相关概念,讨论常见的约束类型并进行受力分析。

工程上所遇到的物体通常分为两种:不受任何限制,可向一切方向自由运动的物体,称为自由体,例如飞行的飞机、发射的炮弹等;受到其他物体的限制,沿着某些方向不能运动

的物体,称为非自由体。

限制非自由体运动的其他物体,称为该非自由体的约束。在图 1-8 中,灯是非自由体,绳子是灯的约束。

使物体产生运动(或运动趋势)的力称为主动力。非自由体在主动力作用下,将产生运动(或运动趋势)。此时,如果非自由体沿着某一方向的运动受到约束的限制,则该非自由体将给约束一定的作用力,同时约束也必将给非自由体一定的反作用力,这个反作用力称为约束反力。显然,主动力企图使物体运动,而约束反力则是限制物体(非自由体)的运动。在图 1-8 中,重力 G 是灯的主动力,而绳子给灯的力 T 则是灯的约束反力。

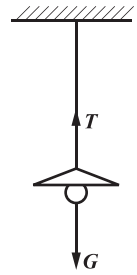


图 1-8 约束实例

因为约束反力是限制物体运动的力,所以它的作用点应在约束与被约束物体相互连接或接触之处,它的方向应与约束所能限制的运动方向相反。这是确定约束反力方向和作用点位置的基本依据。

在工程实际中,约束的形式很多,现将常见的几种约束类型分述如下。

1. 柔体约束

由绳索、链条或胶带等所形成的约束。它们都是非刚性体,只能受拉不能受压。它只能限制非自由体沿柔体约束的中心线离开约束的运动,而不能限制其他方向的运动。因此,柔体约束的约束反力方向是沿着约束的中心线而背离物体的,如图 1-9(a)、(c)所示。这种约束的约束反力常用 T 来表示。

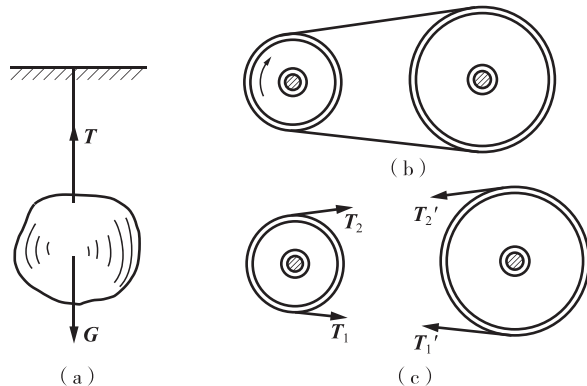


图 1-9 柔体约束

2. 光滑面约束

当约束和非自由体成点、线、面接触,接触处摩擦力很小可以略去不计时,称为光滑面约束。

图 1-10(a)为点接触(曲面和曲面), $n-n$ 为公切面,非自由圆球在主动力(图中未画出)作用下,约束只能限制它沿接触点公法线向约束体内运动,不能限制非自由体向其他任何方向运动,所以光滑面约束的约束反力是通过接触点沿着公法线(或垂直于公切面)且指向物体的。约束反力常用 N 来表示。

图 1-10(b)为线接触(柱面和平面),平面即为公切面。可将接触线段的重心 A 视为接触点。

图 1-10(c)为面接触(平面和平面),接触面即为公切面。可将接触面的重心 A 视为接触点。

在图 1-11 中,除了杆自重垂直向下外,无论有多少个主动力(方向任意),根据光滑面约束的性质, A 、 B 、 C 处的约束反力只能是图中的 N_A 、 N_B 和 N_C 。不可根据感性判断画出错误的方向。

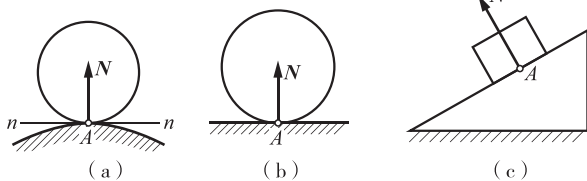


图 1-10 光滑面约束

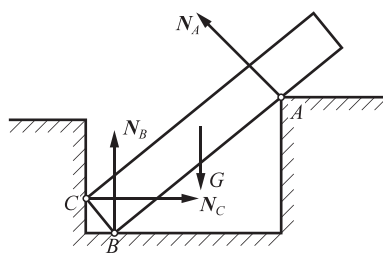


图 1-11 光滑面约束

3. 光滑铰链约束

光滑铰链是力学中一个抽象化的模型。凡是两个非自由体相互连接后,接触处的摩擦可忽略不计,只能限制两个非自由体的相对移动,而不能限制它们相对转动的约束,都可以称为光滑铰链约束。工程中常用的光滑铰链约束有以下三种形式。

(1) 圆柱形销钉连接(或称“中间铰链”)。用圆柱形销钉 C 将两个物体 A 、 B 连接在一起,即圆柱形销钉连接,如图 1-12(a)、(b)所示。由其结构可知,只要销钉和钉孔是光滑的,它就具有光滑铰链约束的性质。由于圆柱形销钉常常用作连接两个构件而处于结构物的内部,所以也把它称为“中间铰链”。这种约束常用如图 1-12(c)所示的简图来表示。

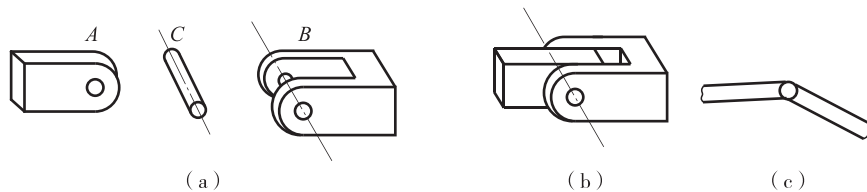


图 1-12 圆柱形销钉连接

在图 1-13 中,如果略去微小摩擦,销钉与物体(非自由体)实际上是由两个光滑圆柱面相接触的。当物体受主动力作用后,形成线接触,若把 K 视为接触点,按照光滑面约束反力的特点,可知销钉给非自由体的约束反力应沿接触点 K 处的公法线,则必通过销钉中心(铰链中心),但因主动力的方向不能预先确定,所以约束反力方向也不能预先确定。综上所述,可得如下结论:圆柱形销钉连接的约束反力必通过铰链中心,方向不定。常以两正交分力 N_x 和 N_y 来表示。

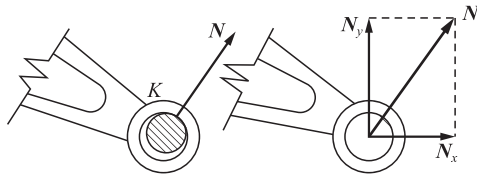


图 1-13 圆柱形销钉连接受力分析

(2) 固定铰链支座。用销钉将物体和固定机架或支承面等连接起来,称为固定铰链支座,如图 1-14(a)所示。起重臂与机架的连接,钢桥架同固定支承面的连接就应用了这种支座。由固定铰链支座的构造特点,不难看出其约束反力的表示方法和圆柱形销钉连接应该是相同的。通常用如图 1-14(b)、(c)所示的简图来表示固定铰链支座。

(3) 可动铰链支座(或称“辊轴支座”)。如果把固定铰链支座座体与支承面间加装滚轮,就是可动铰链支座,如图 1-15(a)所示。钢桥架或大型钢梁往往是一端用固定铰链支座而另一端用可动铰链支座。这样,当钢架因热胀冷缩而长度稍有变化时,可动铰链支座相应地沿支承面滑动,就可避免温差应力带来的问题。由其结构特点可以看出它相当于圆柱形销钉连接与光滑面约束的组合,所以可动铰链支座的约束反力必垂直于支承面且通过铰链中心,常用 N 来表示。如图 1-15(b)所示是可动铰链支座的简化图。

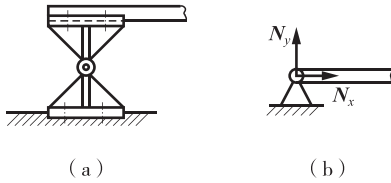


图 1-14 固定铰链支座

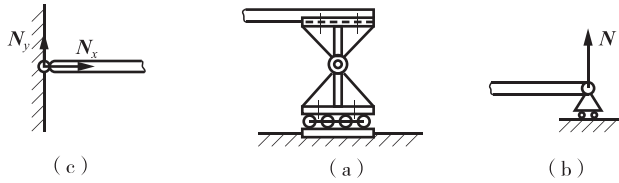


图 1-15 可动铰链支座

任务四

受 力 图

任务分析: 掌握受力图的画法。

任务描述: 要研究力系的简化和力系的平衡条件,就必须分析物体的受力情况。为此,我们把所研究的非自由体解除全部约束,将它所受的全部主动力和约束反力以力矢正确地表示在自由体上,这样所得到的图形,称为受力图。本任务主要介绍受力图的画法。

为了正确地画出受力图,应按下列步骤进行。

(1) 首先要明确研究对象。所谓研究对象就是所要研究的非自由体。要画哪个物体的受力是必须明确的,否则就失去了前提,我们就是要画研究对象的受力图。一般来说,在研究力系的平衡问题时,问题中的待求量(未知力)与哪个非自由体直接发生关系,我们就把这个非自由体确定为研究对象。

(2) 画出分离体。把所研究的非自由体(即研究对象)从约束中分离出来(即解除研究对象的全部约束)使之成为自由体。这个人为创造的(假想的)自由体被称为分离体。画分离体是为了画受力图。确定了研究对象,即可直接画出分离体,所以上述两步可合并为一步。

(3) 在分离体上画出全部主动力(重力以及其他已知力)。

(4) 在分离体上画全部约束反力,即把解除的约束,代之以相应的约束反力。

完成上面的步骤就完成了受力图。下面举例说明受力图的画法。

例 1.1 重量为 G 的球,用绳挂在光滑的竖直墙上,如图 1-16(a)所示。画出此球的受力图。

解 (1) 以球为研究对象并画出分离体,如图 1-16(b)所示。解除绳和墙的约束。

(2) 画出主动力 G 。

(3) 画出全部约束反力。绳的约束反力 T 和光滑面约束反力 N_A 。

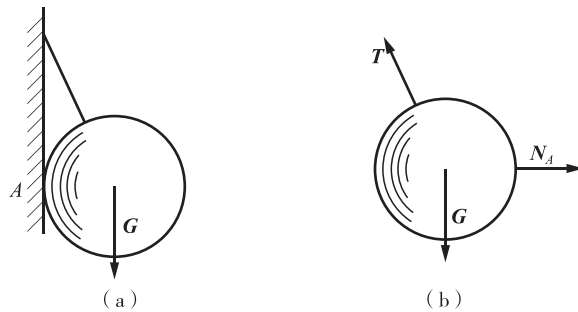


图 1-16 例 1.1 图

例 1.2 如图 1-17(a)所示的梁 AB , A 端为固定铰链支座, B 端为可动铰链支座,梁中点 C 受主动力 F 作用,梁重不计。试分析梁的受力情况。

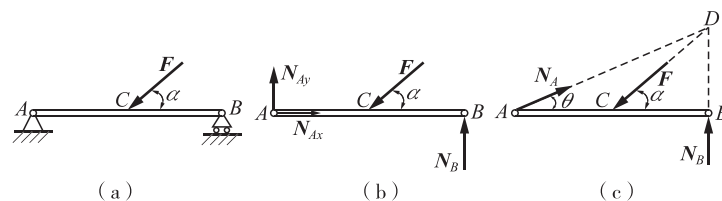


图 1-17 例 1.2 图

解 (1) 以梁 AB 为研究对象并画出分离体, 如图 1-17(b) 所示。

(2) 画出主动力 F 。

(3) 画约束反力。可动铰链支座约束反力 N_B , 垂直向上且通过铰链中心。固定铰链支座约束反力方向不定, 但可用大小未知的水平分力 N_{Ax} 和铅垂分力 N_{Ay} 来表示, 如图 1-17(b) 所示。

固定铰链支座的约束反力亦可用一个大小、方向均未知的力 N_A 表示, 因梁 AB 受平面内三力作用而平衡, 根据三力平衡汇交定理, N_A 方向即可确定。延长 N_B 和力 F 作用线交于 D 点, 梁平衡时, N_A 必在 AD 连线上, 如图 1-17(c) 所示。

例 1.3 两只油桶堆放在槽中, 如图 1-18(a) 所示, 桶重分别为 F_1 、 F_2 。试分析每个桶的受力情况。

解 先分析桶 I 的受力情况。取桶 I 为研究对象并画出分离体; 桶 I 的主动力只有自重 F_1 ; 桶 I 在 A 和 B 两处, 都受到光滑面约束, 其约束反力 N_A 、 N_B 都通过桶的中心。桶 I 的受力情况如图 1-18(b) 所示。

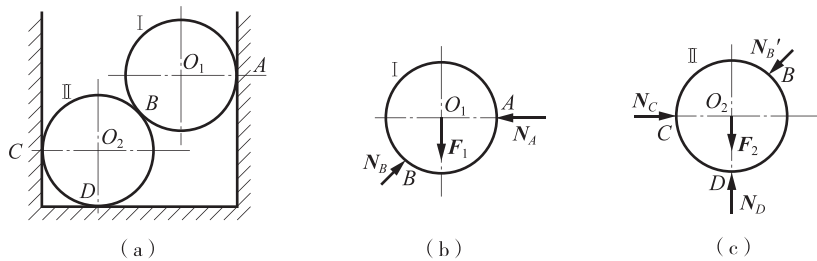


图 1-18 例 1.3 图

再分析桶 II 的受力情况。取桶 II 为研究对象画出分离体, 如图 1-18(c) 所示; 桶 II 的主动力除自重 F_2 外, 还有上面桶 I 传来的压力 N'_B , 注意到 N'_B 与 N_B 互为作用与反作用, N'_B 必过桶 II 中心, 且有 $N'_B = -N_B$; 桶 II 在 C 、 D 处受有光滑面约束, 其约束反力 N_C 、 N_D 都指向桶 II 且通过其中心。

例 1.4 如图 1-19(a) 所示, 梁 AD 的 A 端为固定铰链, D 端挂一重为 G 的重物 E 。中间由直杆 BC 支撑。若不计梁及直杆自重, 画出梁 AD 及直杆 BC 的受力图。

解 先画杆 BC 的受力图, 如图 1-19(b) 所示。以直杆 BC 为研究对象并画分离体; 直杆是二力杆件, 故 S_B 、 S_C 必沿 BC 杆中心线, 方向可以假设(拉或压)。显然, 本题中 BC 杆应受压。

再画梁 AD 受力图。以梁 AD 为研究对象并画出分离体, 如图 1-19(c) 所示; 画主动力 G ; 画出约束反力 $S'_C = -S_C$, S'_C 与 G 相交于 H , 由三力平衡汇交定理可确定铰链 A 的约束反力 N_A 必交于 H 点即 N_A 沿 AH 连线。铰链 A 的约束反力亦可画成两正交分力 N_{Ax} 、

N_{Ay} ，如图 1-19(d)所示。

有时，我们研究的问题是由几个物体组成的一个系统，则称其为物体系(物系)或物体系(物系)。下例说明物体系(物系)受力图的画法。

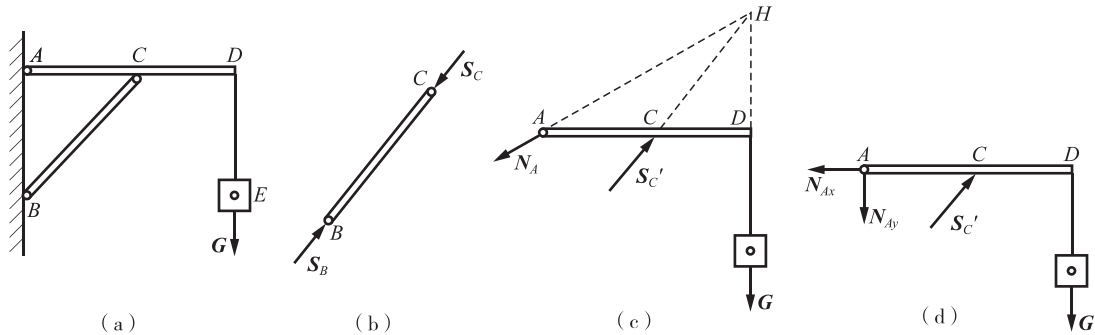


图 1-19 例 1.4 图

例 1.5 如图 1-20(a)所示为一物体系(物系)，自重未画出者均略去重量不计，接触处都是光滑的。试画出物体系(物系)及每个物体的受力图。

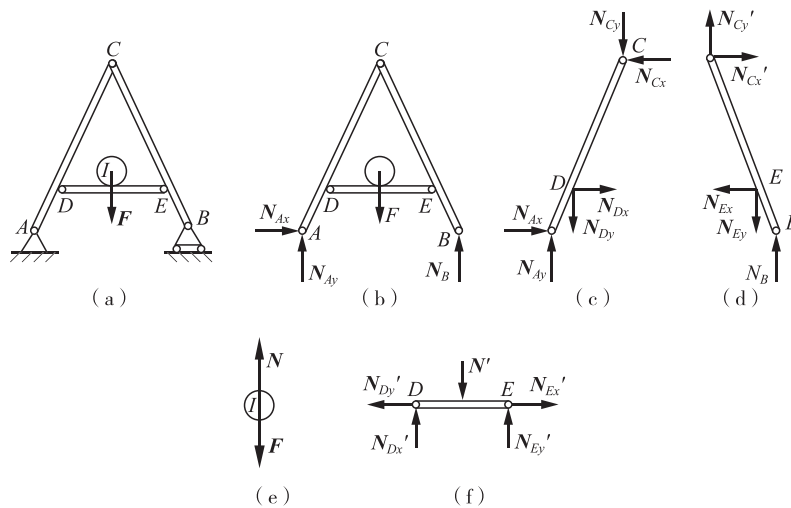


图 1-20 例 1.5 图

解 物体系(物系)中共有四个物体：杆 AC、BC、DE 和球 I。

画物体系(物系)受力图，如图 1-20(b)所示。以整个物体系(物系)为研究对象并画出分离体；画主动力 F ；画出 A、B 处约束反力 N_{Ax} 、 N_{Ay} 及 N_B 。因物体系(物系)内部物体之间的作用与反作用是互相抵消的[是物体系(物系)的内力]，所以 C、D、E 及球与杆 DE 的接触处不画约束反力。

画杆 AC 受力图，如图 1-20(c)所示。以杆 AC 为研究对象并画出分离体；主动力 F 不直接作用在杆 AC 上故不能画入；画出 A、C、D 处光滑铰链的约束反力 N_{Ax} 、 N_{Ay} 、 N_{Cx} 、 N_{Cy} 、 N_{Dx} 、 N_{Dy} 。

画杆 BC 受力图，如图 1-20(d)所示。以杆 BC 为研究对象并画出分离体；E 点画二正

交分力 N_{Ex} 和 N_{Ey} ，箭头方向可以假设，正交的方法亦可变更。 B 点约束反力仍为 N_B ， C 点约束反力必须根据 $N_{Cx} = -N_{C_x}$ 和 $N_{Cy} = -N_{C_y}$ 画出，不可任意假设方向和改变方位。

画球的受力图，如图 1-20(e)所示。画杆 DE 受力图，如图 1-20(f)所示。以杆 DE 为研究对象并画出分离体；由作用与反作用关系画出 N 、 N_{Dx} 、 N_{Dy} 、 N_{Ex} 、 N_{Ey} 。

综合以上例题可以看出，画受力图必须注意以下几点：

- (1) 必须首先确定研究对象并画出分离体，分离体的大小和方位都必须和原来物体保持一致；
- (2) 与研究对象不直接相关的主动力和约束反力都不能画出；
- (3) 画受力图时，要根据约束的类型，画出相应的约束反力；
- (4) 画物体系(物系)中单个物体的受力图时，必须注意作用和反作用的关系，物体系(物系)内力不能画出。



项目小结

本项目讨论了静力学的基本概念、静力学公理和受力分析的基本方法。

1. 基本概念

(1) 力是物体之间相互的机械作用；力不能脱离物体而存在；力总是成对出现的；力的效应有外效应和内效应，静力学中研究力的外效应；力对物体的外效应，取决于三要素：大小、方向和作用点(或作用线)。

(2) 刚体是理论力学中将实际物体进行抽象化的理想模型。静力学的研究对象是刚体。

2. 静力学公理

静力学公理及其推论反映了力的基本性质，是静力学的理论基础。

3. 物体的受力分析

各类约束反力的表示方法是画受力图的基础。

- (1) 柔体约束的约束反力：通过连接点和约束的中心线重合，背离物体。常以 T 表示。
- (2) 光滑面约束的约束反力：通过接触点，垂直于公切面，指向物体。常以 N 表示。
- (3) 圆柱形销钉连接和固定铰链支座的约束反力：常以通过铰链中心的两正交分力 N_x 、 N_y 来表示，方向可假设，方位可变更。
- (4) 可动铰链支座的约束反力：垂直于支承面通过铰链中心。常以 N 表示。

项目习题

在下列习题中，凡未标出自重的物体，自重不计。接触处都不考虑摩擦。

1-1 画出如图 1-21 所示圆球的受力图。

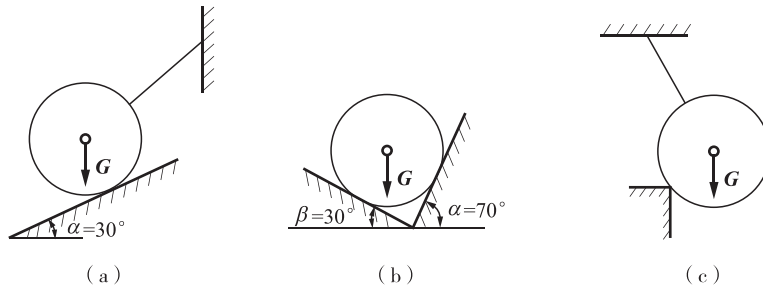


图 1-21 题 1-1 图

1-2 画出图 1-22 中 AB 杆的受力图。

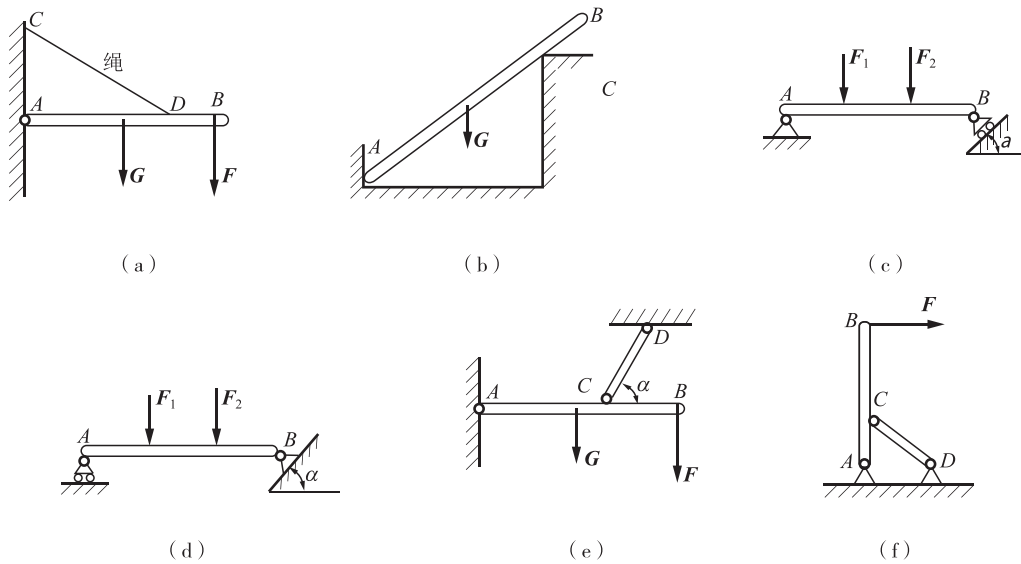


图 1-22 题 1-2 图

1-3 画出图 1-23 中 AB 杆的受力图。

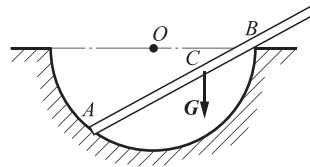


图 1-23 题 1-3 图

1-4 画出图 1-24 中杆 AD 、 BC 的受力图。

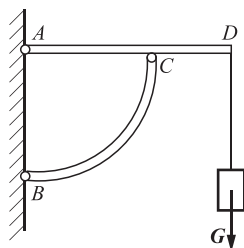


图 1-24 题 1-4 图

1-5 画出图 1-25 中杆 AB 和球 C 的受力图。

1-6 如图 1-26 所示, 力 F 作用在销钉上, 试画出杆 AB 、 BC 及销钉 B 的受力图。

1-7 画出图 1-27 中整个物体系(物系)和物体系(物系)中每个物体系(物系)的受力图。

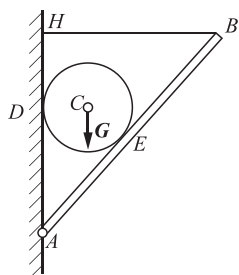


图 1-25 题 1-5 图

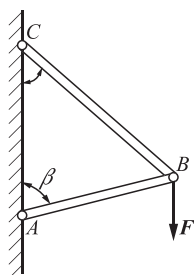


图 1-26 题 1-6 图

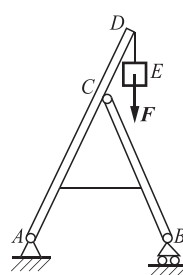


图 1-27 题 1-7 图

1-8 画出如图 1-28 所示物体系(物系)中每个物体的受力图。

1-9 画出如图 1-29 所示物体系(物系)中各物体的受力图。

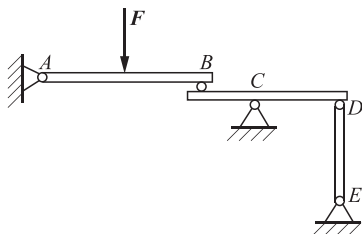


图 1-28 题 1-8 图

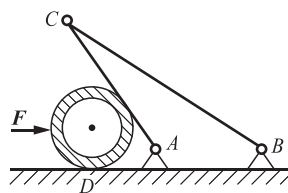


图 1-29 题 1-9 图

1-10 画出图 1-30 中杆 AC 、 BC 的受力图。

1-11 油压夹紧装置如图 1-31 所示, 试分别画出活塞 A 、滚子 B 和杠杆 DCE 的受力图。

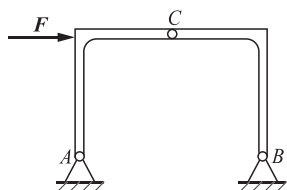


图 1-30 题 1-10 图

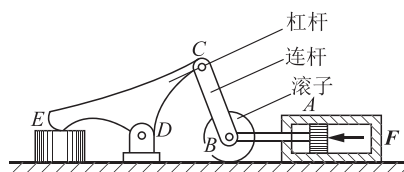


图 1-31 题 1-11 图

项目二 平面基本力系

从本项目开始,我们将研究力系的合成和平衡问题,力对点之矩的概念和计算以及平面力偶理论。为了研究方便,将力系按其作用线的分布情况进行分类。力系中各力的作用线都处在同一平面内者称为平面力系。力系中各力的作用线不处在同一平面内者称为空间力系。在这两类力系中,作用线交于一点的称为汇交力系,作用线相互平行的称为平行力系,作用线任意分布(既不完全交于一点又不完全平行)的称为任意力系。按照由简单到复杂,由特殊到一般的认识规律,首先研究平面汇交力系。

如图 2-1 所示为起重机起重钩的受力分析,如图 2-2 所示为砖墩上锅炉的受力分析。其都是平面汇交力系的实例。

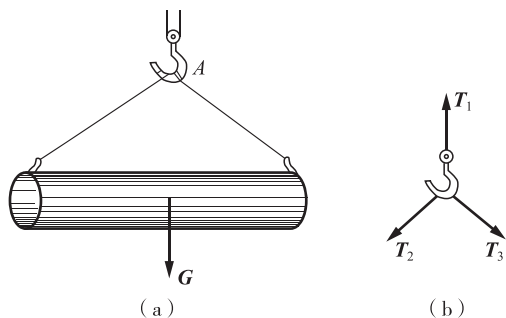


图 2-1 起重机受力分析

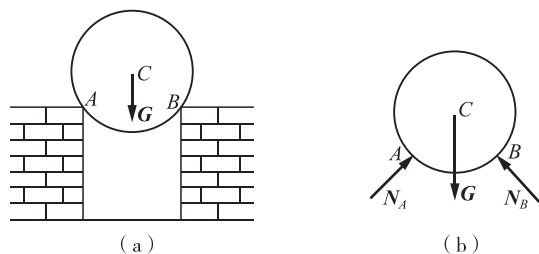


图 2-2 锅炉受力分析

任务一

平面汇交力系合成

任务描述: 了解力在坐标轴上的投影;

掌握合力投影定理;

掌握平面汇交力系的合成,并确定合力的大小和方向。

任务分析: 平面汇交力系合成与平衡计算的基础是力在坐标轴上的投影。因此,本任务首先介绍力在坐标轴上的投影;接着通过引入合力投影定理,介绍平面汇交力系的合成。

一、力在坐标轴上的投影

设力 \boldsymbol{F} 作用在物体上的 A 点, 如图 2-3(a) 所示。在力 \boldsymbol{F} 作用线所在平面内取直角坐标系 xOy 。

从力 \boldsymbol{F} 的两端 A 和 B 分别向 x 轴作垂线, 得垂足 a 、 b , 线段 ab 称为力 \boldsymbol{F} 在 x 轴上的投影, 用 F_x 表示。同样, 从 A 和 B 分别向 y 轴作垂线, 得垂足 a' 、 b' , 线段 $a'b'$ 称为力 \boldsymbol{F} 在 y 轴上的投影, 用 F_y 表示。

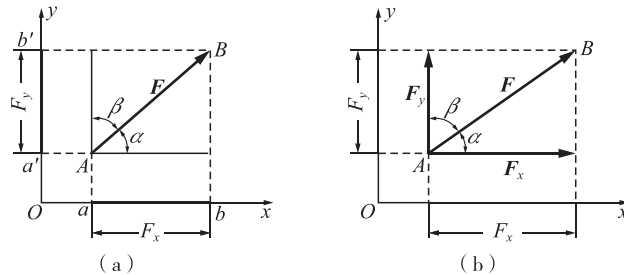


图 2-3 力在坐标轴上的投影和分解

力的投影是代数量, 它的正、负规定如下: 若由 a (a') 到 b (b') 的方向与 x (y) 轴的正向一致时, 则力 \boldsymbol{F} 的投影 F_x (F_y) 取正值; 反之, 取负值。

若已知力 \boldsymbol{F} 的大小为 F (恒为正值), 它和 x 轴的夹角为 α (取锐角), 则力在轴上的投影 F_x 、 F_y 可按下列式计算:

$$\begin{cases} F_x = \pm F \cos \alpha \\ F_y = \pm F \sin \alpha \end{cases} \quad (2-1)$$

当力在坐标轴上的投影 F_x 和 F_y 为已知时, 则力 \boldsymbol{F} 的大小 F 和它与 x 轴所夹的锐角 α 分别为

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \quad (2-2)$$

$$\alpha = \arctan |F_y / F_x| \quad (2-3)$$

如果把力 \boldsymbol{F} 沿 x 、 y 轴分解, 可得两正交分力 \boldsymbol{F}_x 、 \boldsymbol{F}_y [图 2-3(b)]。显而易见, 投影 F_x (F_y) 的绝对值等于分力 \boldsymbol{F}_x (\boldsymbol{F}_y) 的大小, 投影 F_x (F_y) 的正、负号指明了 \boldsymbol{F}_x (\boldsymbol{F}_y) 与 x (y) 轴同向或反向。可见, 力在轴上的投影可以同时表明力沿直角坐标轴分解时分力的大小和方向。

应当注意, 力在轴上的投影是代数量, 而分力是矢量, 切不可把它们混为一谈。

二、合力投影定理

设刚体受一平面汇交力系 \boldsymbol{F}_1 、 \boldsymbol{F}_2 、 \boldsymbol{F}_3 作用, 依次用力平行四边形定则求出其合力 \boldsymbol{R} ,

如图 2-4 所示。取坐标系 xOy ，将合力 R 及力系中各力 F_1 、 F_2 、 F_3 向 x 轴投影，得

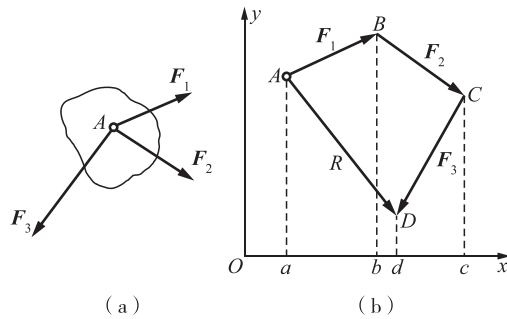


图 2-4 平面汇交力系的投影分析

$$R_x = ad$$

$$F_{1x} = ab$$

$$F_{2x} = bc$$

$$F_{3x} = -dc$$

由图 2-4(b)可知

$$ad = ab + bc + (-dc)$$

故

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x}$$

同理可得

$$R_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y}$$

显然，上述关系可以推广到由 n 个力 F_1, F_2, \dots, F_n 组成的平面汇交力系，从而得出：

$$\begin{cases} R_x = F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx} = \sum F_x \\ R_y = F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{ny} = \sum F_y \end{cases} \quad (2-4)$$

式(2-4)称为合力投影定理，即合力在任意轴上的投影，等于各分力在同一轴上投影的代数和。

三、平面汇交力系合成

假定物体上作用着平面汇交力系 F_1, F_2, \dots, F_n 。为求其合力，首先选定坐标系 xOy ，求出力系中各力在 x 、 y 轴上的投影 $F_{1x}, F_{1y}, F_{2x}, F_{2y}, \dots, F_{nx}, F_{ny}$ 。

由式(2-4)得

$$R_x = \sum F_x$$

$$R_y = \sum F_y$$

然后根据式(2-2)、式(2-3)即可求出合力的大小及方向(图 2-5)。

合力的大小为

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \quad (2-5)$$

合力的方向为

$$\theta = \arctan \left| \frac{R_y}{R_x} \right| \quad (2-6)$$

$$\theta = \arctan \left| \frac{\sum F_y}{\sum F_x} \right|$$

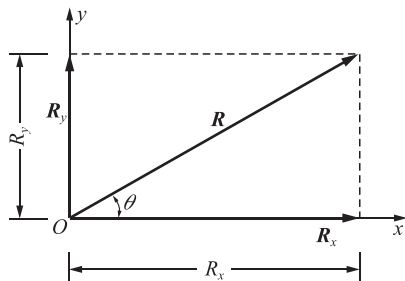


图 2-5 平面汇交力系合力分析

式中, θ 为合力 \mathbf{R} 与 x 轴所夹的锐角。合力所在象限可由 $\sum F_x$ 及 $\sum F_y$ 的正、负来确定。

任务二

平面汇交力系平衡方程及应用

任务描述: 掌握平面汇交力系平衡方程;

掌握使用平面汇交力系平衡方程求解未知力大小的方法。

任务分析: 对于平面内的汇交平衡力系, 可列出平面汇交力系平衡方程, 从而求解其中的未知力。本任务主要通过实例计算介绍平面汇交力系平衡方程的应用。

平面汇交力系可以合成一合力, 即平面汇交力系的作用效果可用其合力来代替。显然, 如果合力等于零, 则物体在平面汇交力系的作用下处于平衡。由此得出结论: 平面汇交力系平衡的必要与充分条件为: 该力系的合力等于零, 即

$$\mathbf{R} = 0$$

由式(2-5)则有

$$R = \sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2} = 0$$

所以

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{cases} \quad (2-7)$$

即平面汇交力系平衡的解析条件是: 力系中所有各力在任意互成垂直的两个坐标轴上投影的代数和分别等于零。式(2-7)又称为“平面汇交力系的平衡方程”。

例 2.1 重 $G=100\text{ N}$ 的球，放在与水平面成 30° 角的光滑斜面上，并用与斜面平行的绳 AB 系住，如图 2-6(a) 所示。试求 AB 绳受到的拉力及球对斜面的压力。

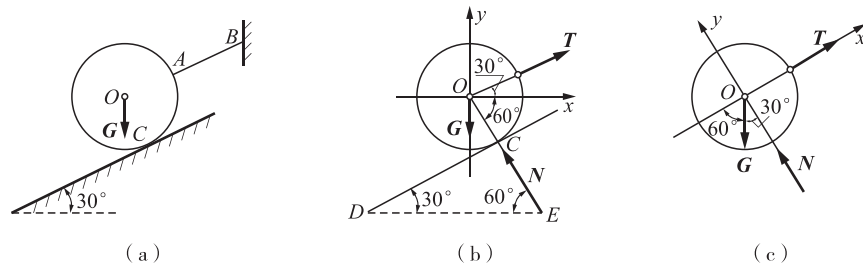


图 2-6 例 2.1 图

解 (1) 取球为研究对象。

(2) 画受力图，如图 2-6(b) 所示。球自重 G ，光滑面约束反力 N ，柔体约束反力 T 。

(3) 选坐标轴，如图 2-6(b) 所示。

(4) 列平衡方程。由式(2-7)得

$$\sum F_x = 0, \quad T \cos 30^\circ - N \cos 60^\circ = 0 \quad ①$$

$$\sum F_y = 0, \quad T \sin 30^\circ + N \sin 60^\circ - G = 0 \quad ②$$

(5) 解方程求出未知量。由式①得

$$T = N \frac{\cos 60^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{N}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} N \quad ③$$

代入式②得
$$\frac{\sqrt{3}}{3} N \sin 30^\circ + N \sin 60^\circ = G$$

即
$$\frac{4\sqrt{3}}{6} N = G$$

所以
$$N = \frac{6}{4\sqrt{3}} G = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 100 = 86.6(\text{N})$$

将 N 值代入式③得

$$T = \frac{\sqrt{3}}{3} N = \frac{\sqrt{3}}{3} \times 86.6 = 50(\text{N})$$

本题若在平行和垂直斜面的方向取 x 、 y 轴，如图 2-6(c) 所示，则解题比较简便。列平衡方程

$$\sum F_x = 0, \quad T - G \cos 60^\circ = 0$$

故
$$T = G \cos 60^\circ = 50(\text{N})$$

$$\sum F_y = 0, \quad N - G \sin 60^\circ = 0$$

故

$$N = \frac{\sqrt{3}}{2}G = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 100 = 86.6 \text{ (N)}$$

由此可知,若解题时将坐标轴选取在与未知力垂直(仅需一轴与一个未知力垂直即可)方向,则列出的平衡方程式较易求得解答。

例 2.2 重 $G = 20 \text{ kN}$ 的物体被绞车吊起,绞车的绳子绕过光滑的定滑轮 B ,如图 2-7(a)所示。若滑轮由不计重量的杆 AB 、 BC 支持, A 、 B 、 C 三点都是光滑铰链连接,滑轮 B 的大小可忽略不计,试求 AB 杆和 BC 杆所受的力。

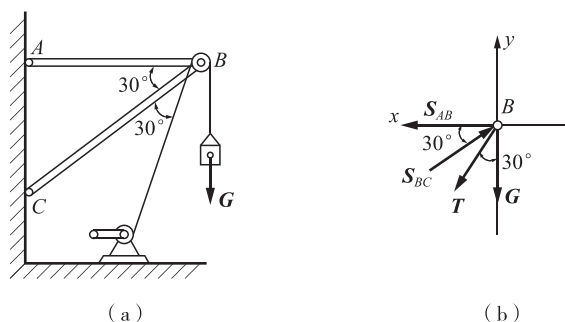


图 2-7 例 2.2 图

解 (1) 取滑轮 B 为研究对象。

(2) 画滑轮 B 的受力图,如图 2-7(b)所示。滑轮 B 受力有:主动力 G ;杆 AB 、 BC 的约束反力 S_{AB} 、 S_{BC} ,因二杆都是二力构件,故二反力作用线分别与 AB 、 BC 杆中心线重合,指向可任意假设为图 2-7(b)中方向;绳子的约束反力 T ,显然 $T = G$ 。

(3) 选坐标轴,如图 2-7(b)所示,列平衡方程

$$\sum F_x = 0, \quad S_{AB} - S_{BC} \cos 30^\circ + T \sin 30^\circ = 0 \quad ①$$

$$\sum F_y = 0, \quad S_{BC} \sin 30^\circ - T \cos 30^\circ - G = 0 \quad ②$$

(4) 解方程求出未知量。由式②得

$$\frac{1}{2}S_{BC} = 20 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 20$$

所以

$$S_{BC} = 74.6 \text{ kN}$$

代入式①得

$$S_{AB} - 74.6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 20 \times \frac{1}{2} = 0$$

所以

$$S_{AB} = 54.6 \text{ kN}$$

这里, S_{AB} 为正值说明它的实际指向与原假设的方向相同,即拉力。

例 2.3 直径相同、重量各为 G 的三个光滑圆柱体，其放置如图 2-8(a) 所示。试求杆 BC (不计自重) 所受的力和地面上所受的力。

解 这是一个物体系统(物系)的平衡问题。先以圆柱 A 为研究对象，如图 2-8(b) 所示。

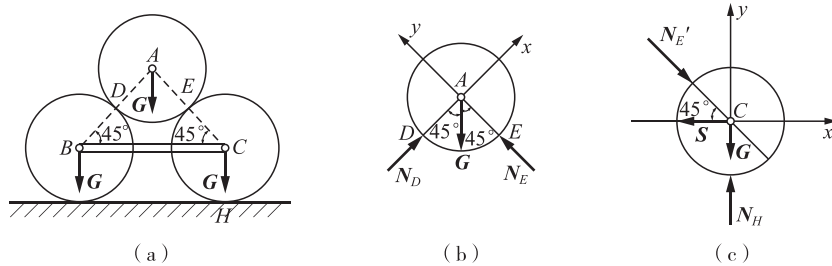


图 2-8 例 2.3 图

由式(2-7)可得

$$\sum F_x = 0, \quad N_D - G \cos 45^\circ = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0, \quad N_E - G \cos 45^\circ = 0 \quad (2)$$

所以

$$N_D = \frac{\sqrt{2}}{2}G, \quad N_E = \frac{\sqrt{2}}{2}G$$

再以圆柱 C 为研究对象，画受力图，如图 2-8(c) 所示，可列出平衡方程

$$\sum F_x = 0, \quad N'_E \cos 45^\circ - S = 0 \quad (3)$$

$$\sum F_y = 0, \quad -N'_E \sin 45^\circ - G + N_H = 0 \quad (4)$$

N_E 与 N'_E 互为作用与反作用，即 $N_E = N'_E$ 。将 $N_E = \frac{\sqrt{2}}{2}G$ 代入③、④，则得

$$S = \frac{G}{2}, \quad N_H = 1.5G$$

B 柱与 C 柱受力情况相同，故不必计算。 S 得正值说明所设方向与实际受力方向相同，所以杆 BC 受拉力。

通过以上例题，可以总结出求解平面汇交力系平衡问题的主要步骤及注意点如下所示。

(1) 选取研究对象画受力图。在一般情况下，把与待求量直接相关的物体作为研究对象。但在解物体系统(物系)的平衡问题时，往往要选两个甚至更多的研究对象，使问题逐步解决，而第一个研究对象应取有已知力作用且未知反力数目不超过两个的物体。

(2) 选取坐标轴。最好有一轴与一个未知力垂直。

(3) 列平衡方程。要注意各力投影的正、负号。

(4) 计算未知量。计算结果中出现负号时，说明所设方向与实际受力方向相反。

任务三

力对点之矩 合力矩定理

任务描述: 掌握力对点之矩的概念与计算方法;

掌握合力矩定理, 学会使用该定理简化力矩计算。

任务分析: 本任务通过拧紧螺母的实例引入力对点之矩的概念, 并讨论力对点之矩的计算方法。

一、力对点之矩

在生产实践中, 当拧紧螺母时(图 2-9), 其拧紧程度不仅与力 F 的大小有关, 而且与转动中心(O 点)到力的作用线的垂直距离 d 有关。当 F 力的大小一定时, d 越大, 力 F 使螺母拧得越紧, d 越小拧紧程度就差。因此, 在力学上以乘积 Fd 作为量度力 F 使物体绕 O 点转动效应的物理量, 称为力 F 对 O 点之矩, 简称“力矩”, 并用 $m_O(\mathbf{F})$ 表示, 即

$$m_O(\mathbf{F}) = \pm Fd \quad (2-8)$$

O 点称为力矩中心(简称“矩心”); O 点到力 F 作用线的垂直距离称为力臂。式(2-8)中的正、负号是用来说明力矩转向的。一般规定: 力使物体绕矩心作逆时针方向转动时, 力矩取正号; 反之, 取负号。

由上所述可以看出, 平面内的力对物体的转动效应完全取决于力矩的大小及旋转方向, 因此平面内的力对点之矩是一个代数量。

若选取适当的比例尺, 用长度 AB 代表力 F 的大小, 则

$$m_O(\mathbf{F}) = \pm 2S_{\triangle OAB} \quad (2-9)$$

力矩的单位为 $\text{N} \cdot \text{m}$ 或 $\text{kN} \cdot \text{m}$ 。

从式(2-8)可知:

- (1) 力沿作用线移动时, 不会改变力对某一矩心的力矩;
- (2) 当力的作用线通过矩心时, 力矩为零。

例 2.4 设电线杆上端两根钢丝绳的拉力为 $F_1 = 120 \text{ N}$ 、 $F_2 = 100 \text{ N}$, 如图 2-10 所示。试计算 F_1 与 F_2 对电线杆下端 O 点之矩。

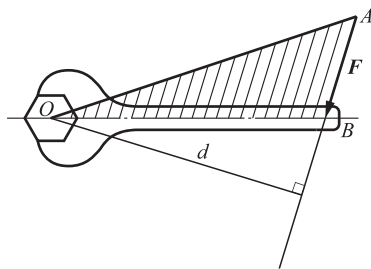


图 2-9 拧紧螺母的受力分析

解 从矩心 O 点向力 F_1 和 F_2 的作用线分别作垂线, 得 F_1 的力臂 Oa 和 F_2 的力臂 Ob 。由式(2-8) 得

$$\begin{aligned} m_O(\mathbf{F}_1) &= F_1 \times Oa \\ &= F_1 \times OA \sin 30^\circ \\ &= 120 \times 8 \times \frac{1}{2} = 480 (\text{N} \cdot \text{m}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_O(\mathbf{F}_2) &= -(F_2 \times Ob) = -(F_2 \times OA \sin \theta) \\ &= -\left(100 \times 8 \times \frac{3}{5}\right) = -480 (\text{N} \cdot \text{m}) \end{aligned}$$

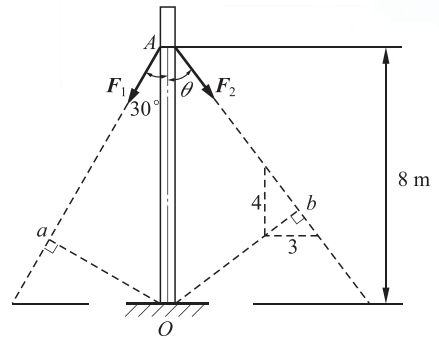


图 2-10 例 2.4 图

二、合力矩定理

在力矩的计算中, 有时力臂的计算较烦琐, 所以常利用分力对某点之矩和合力对该点之矩的关系来计算, 这就是下面将要讨论的合力矩定理。

定理 平面汇交力系的合力对平面内任一点之矩, 等于其所有分力对于同一点力矩的代数和。即

$$m_O(\mathbf{R}) = \sum m_O(\mathbf{F})$$

证明 设有平面汇交力系 F_1, F_2, \dots, F_n (图 2-11)。它们的合力 \mathbf{R} 由力的平行四边形定则合成得出。任选一点 O 作为矩心, 作 Ox 轴垂直于 O 点与力系汇交点 A 的连线 OA , 现考察 F_1 (它在 Ox 轴上的投影 $F_{1x} = Ob$) 对 O 点的矩

$$\begin{aligned} m_O(\mathbf{F}_1) &= 2S_{\triangle AOB} \\ &= Ob \times OA = F_{1x} \times OA \end{aligned}$$

同理可得

$$m_O(\mathbf{F}_2) = F_{2x} \times OA$$

$$m_O(\mathbf{F}_n) = F_{nx} \times OA$$

$$m_O(\mathbf{R}) = R_x \times OA$$

因

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx}$$

故

$$m_O(\mathbf{R}) = (F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx}) \times OA$$

$$= F_{1x} \times OA + F_{2x} \times OA + \dots + F_{nx} \times OA$$

即

$$m_O(\mathbf{R}) = m_O(\mathbf{F}_1) + m_O(\mathbf{F}_2) + \dots + m_O(\mathbf{F}_n)$$

或

$$m_O(\mathbf{R}) = \sum m_O(\mathbf{F}) \quad (2-10)$$

至此定理得到证明。

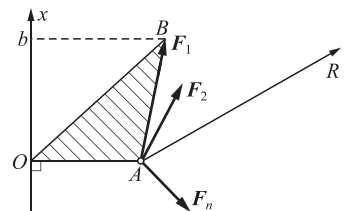


图 2-11 合力矩定理

例 2.5 为了竖起塔架，在 O 点处以固定铰链支座与塔架相连接，如图 2-12 所示。设在图示位置钢丝绳的拉力为 F ，图中 a 和 b 均为已知量。计算力 F 对 O 点之矩。

解 若用式(2-8)计算，必须求出力臂 OA ；若应用合力矩定理，则可根据已知条件直接进行计算。

先把力 F 分解为与塔架两边相平行的二分力 F_1 与 F_2 ，其大小分别为

$$F_1 = F \sin \alpha, \quad F_2 = F \cos \alpha$$

由合力矩定理得

$$m_O(\mathbf{F}) = m_O(\mathbf{F}_1) + m_O(\mathbf{F}_2) = Fb \sin \alpha + Fa \cos \alpha$$

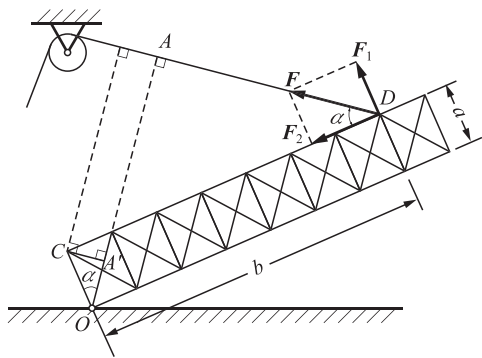


图 2-12 例 2.5 图

任务四

平面力偶系

任务描述：掌握力偶与力偶矩的概念；

熟悉力偶的等效条件。

任务分析：项目一中讨论了二力相等、方向相反，且共线时对物体的影响。本任务主要讨论二力相等、方向相反、不共线而平行时对物体的作用效果，由此引入力偶与力偶矩的概念。

一、力偶

物体受大小相等、方向相反的二共线力作用时，物体保持平衡状态。但是，当两个力大小相等、方向相反、不共线而平行时，物体能否保持平衡呢？实践告诉我们，物体受这样的两个力作用时将产生转动。例如，汽车司机用双手转动方向盘，工人师傅用双手去拧丝锥，人们用手指旋转钥匙或水龙头等，都是上述受力情况的实例。在力学上，把大小相等、方向相反而不共线的两个平行力称为力偶，并记作 (F, F') 。力偶中两个力所在的平面叫力偶作用面，两个力作用线间的垂直距离叫力偶臂，以 d 表示(图 2-13)。

因为力偶中的两个力大小相等、方向相反、作用线平行，所以这两个力在任何坐标轴上投影之和都等于零(图 2-14)。可见，力偶对物体不产生移动效应，即力偶无合力。这说明力

偶不能与一力等效，因而它成为静力学中又一个基本物理量。

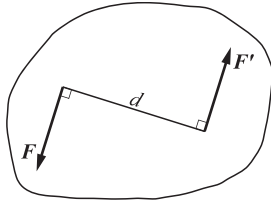


图 2-13 力偶

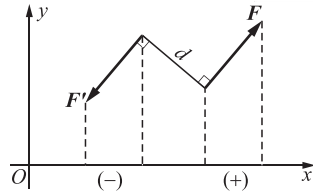


图 2-14 力偶在坐标轴上的投影

二、力偶矩

应用力矩的概念，可用力偶中两个力对某点力矩之和来度量力偶对物体的转动效应。如图 2-15 所示，在力偶平面内任取一点 O 为矩心，设 O 点与力 F 作用线的距离为 d ，则力偶的两个力对 O 点之矩的和为

$$\begin{aligned} m_o(\mathbf{F}) + m_o(\mathbf{F}') &= -Fx + F'(x+d) \\ &= -Fx + F'x + F'd \\ &= F'd = Fd \end{aligned}$$

由此可见，力偶对任意矩心 O 点之矩只与力 F 和力偶臂 d 的大小有关，而与矩心位置无关。即力偶对物体的转动效应只取决于力偶中力的大小和二力之间的垂直距离（即力偶臂）。因此，在力学上以乘积 Fd 为量度力偶对物体转动效应的物理量，称为力偶矩。以符号 $m(\mathbf{F}, \mathbf{F}')$ 或 m 表示，即

$$m(\mathbf{F}, \mathbf{F}') = \pm Fd$$

或

$$m = \pm Fd \quad (2-11)$$

式(2-11)中的正、负号表示力偶的转向，力偶逆时针旋转时，力偶矩为正；反之，为负。

力偶矩的单位和力矩一样，为 $\text{N} \cdot \text{m}$ 或 $\text{kN} \cdot \text{m}$ 。

由图 2-16 可以看出，力偶矩的大小也可用三角形的面积表示，即

$$m = \pm 2S_{\triangle CAB}$$

本节讨论的是平面力偶，故其转动效应只取决于力偶矩的大小和力偶的转动方向。对于空间力偶，则必须考虑其作用面的方位，所以力偶对物体的转动效应，取决于三个要素，即力偶矩的大小、力偶的转向和力偶作用面的方位。

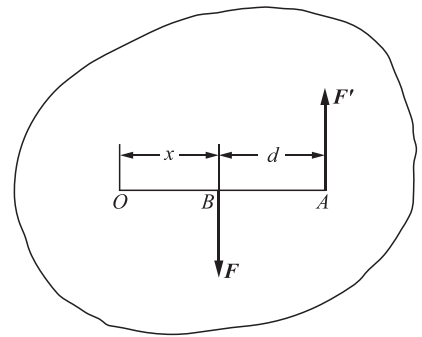


图 2-15 力偶矩

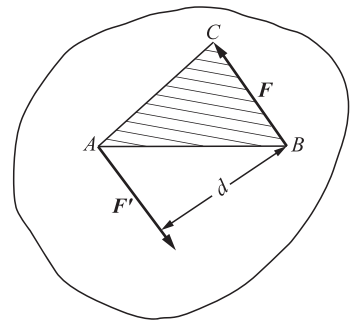


图 2-16 力偶矩的大小

三、力偶的等效条件

如果力偶对物体的作用，可以用另一个力偶来代替，则这两个力偶称为等效力偶。

定理 两个在同平面内的力偶，如果力偶矩相等，转向相同，则两力偶彼此等效。

证明 在刚体上作用有力偶 (F, F') ，现分别将此两力沿两作用点 A 、 B 的连线和另一任意的方向分解，可得 Q 、 T 、 Q' 和 T' 四个力(图 2-17)。由于这两个力的平行四边形相同，故 $Q=Q'$ ， $T=T'$ 。但因 $Q=-Q'$ ，互成平衡，于是剩下 T 和 T' 组成新的力偶。新力偶 (T, T') 与原来的力偶 (F, F') 等效。下面证明这两个等效力偶的力偶矩也是相等的。从图 2-17 中可知， $|m(F, F')| = 2S_{\triangle BAE}$ ， $|m(T, T')| = 2S_{\triangle BAD}$ ，因 $\triangle BAE$ 与 $\triangle BAD$ 为同底、等高之三角形，故其面积相等，因此可得

$$|m(F, F')| = |m(T, T')|$$

又知两等效力偶转向相同，故两等效力偶矩符号相同，即得

$$m(F, F') = m(T, T')$$

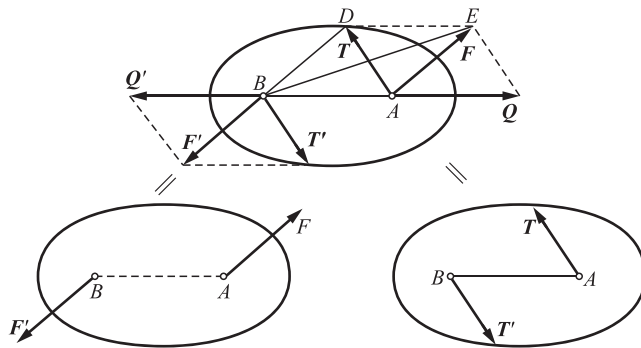


图 2-17 力偶的等效

由于力 F 的作用点 A 可沿其作用线任意移动，而且分解时的方向是任意的，故变换之后的力偶 (T, T') 的位置可以有无数个。

这样，我们就证明了同平面力偶的等效条件是：它们的力偶矩彼此相等。这个定理说明，一个力偶对物体的作用完全取决于其力偶矩，而与力偶在作用面内的位置，力和力偶臂等单独因素无关。据此，又可得出下面的推论。

(1) 力偶可在其作用面内任意移动和转动，而不会改变它对物体的作用(简称“力偶可移转”)。

(2) 在保持力偶矩大小和转向不变的条件下，可以同时改变力和力偶臂的大小，而不会改变力偶对物体的作用(简称“力偶可改装”)。

鉴于以上两点，力偶可以直接用力偶矩 m 来表示(图 2-18)。

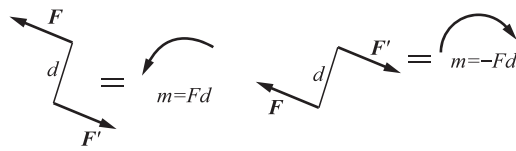


图 2-18 力偶的符号

任务五

平面力偶系的合成与平衡

任务描述: 了解平面力偶系的合成结果;

掌握平面力偶系平衡的必要充分条件。

任务分析: 作用在同一个物体上的 n 个力偶组成一个力偶系。作用在同一平面内的力偶组成的力偶系称为平面力偶系。本任务主要介绍平面力偶系的合成,并讨论平面力偶系平衡需满足的条件。

一、平面力偶系的合成

设 (F_1, F'_1) 和 (F_2, F'_2) 为作用在某物体同一平面内的两个力偶(图 2-19)。其力偶臂分别为 d_1, d_2 , 而力偶矩分别为 m_1, m_2 , 于是有

$$m_1 = F_1 d_1, \quad m_2 = F_2 d_2$$

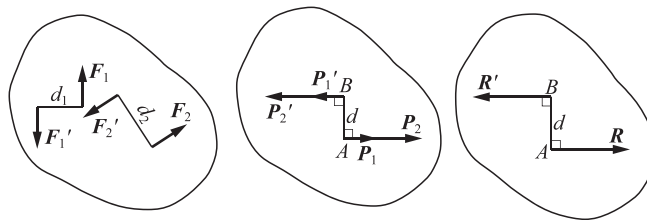


图 2-19 平面力偶系的合成

在力偶作用平面内任取线段 $AB = d$, 于是可将原力偶改装成为两个等效力偶 (P_1, P'_1) 和 (P_2, P'_2) 。显然, P_1 和 P_2 的大小分别

$$P_1 = \frac{m_1}{d}, \quad P_2 = \frac{m_2}{d}$$

将 P'_1, P'_2 和 P_1, P_2 分别合成, 则有

$$R = P_1 + P_2, \quad R' = P'_1 + P'_2$$

显然 R 与 R' 为等值、反向的平行力，组成一新力偶，此力偶即为原来两力偶的合力偶。其力偶矩为

$$M = Rd = (P_1 + P_2)d = \left(\frac{m_1}{d} + \frac{m_2}{d}\right)d = m_1 + m_2$$

若作用在同一平面内有 n 个力偶，则其合力偶矩应为

$$M = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$$

或

$$M = \sum m \quad (2-12)$$

即平面力偶系的合成结果为一合力偶，合力偶矩等于分力偶矩的代数和。

二、平面力偶系的平衡

既然平面力偶系合成的结果是一个合力偶，那么欲使力偶系平衡，就必须使合力偶矩等于零，即

$$\sum m = 0 \quad (2-13)$$

可见，平面力偶系平衡的必要充分条件是：力偶系中各力偶矩的代数和等于零。

例 2.6 在汽缸盖上要钻四个相同的孔(图 2-20)，现估计每个孔的切削力偶矩 $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m = -15 \text{ N} \cdot \text{m}$ 。当用多轴钻床同时钻这四个孔时，问工件受到的总切削力偶矩是多大？

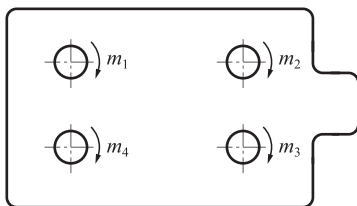


图 2-20 例 2.6 图

解 作用在汽缸盖上的力偶有四个，各力偶矩大小相等、转向相同又在同一平面内，因此其合力偶矩为

$$\begin{aligned} M &= \sum m = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 \\ &= 4 \times (-15) \\ &= -60(\text{N} \cdot \text{m}) \end{aligned}$$

负号表示合力偶矩为顺时针转向。

例 2.7 梁 AB 受 $|m| = 100 \text{ kN} \cdot \text{m}$ 的力偶作用，如图 2-21 所示，求支座 A 、 B 的反力。

解 (1) 取梁 AB 为研究对象并画其受力图。梁上有主动力偶的力偶矩 m ， A 、 B 处的约束反力为 N_A 及 N_B 。根据力偶必须由另一力偶来平衡，则 N_A 与 N_B 必组成一力偶。又因