概率论与数理统计

类目：公共基础类
书名：概率论与数理统计
主编：王颖 周海钰 刘明
出版社：湖南大学出版社
开本：大 16 开
书号：978-7-5667-4391-6
使用层次：通用
出版时间：2025 年 8 月
定价：46.80 元
印刷方式：双色
是否有资源：有

概率论与数理统计

责任编辑：金红艳
封面设计：旗语书装

ISBN 978-7-5667-4391-6
9 787566 743916 >
定价：46.80元

公共课基础类创新融合精品教材
“互联网+”教育改革新理念教材

概率论与数理统计

主编◎王 颖 周海钰 刘 明

湖南大学出版社

公共课基础类创新融合精品教材
“互联网+”教育改革新理念教材

概率论与数理统计

主编 ◎ 王 颖 周海钰 刘 明

湖南大学出版社

公共课基础类创新融合精品教材
“互联网 +”教育改革新理念教材

概率论与数理统计

主　编 ◎ 王　颖　周海钰　刘　明
副主编 ◎ 于雪梅　田　恬

湖南大学出版社
·长 沙·

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/王颖,周海钰,刘明主编. 长沙 :湖南大学出版社, 2025. 8. --ISBN 978-7-5667-4391-6

Ⅰ. O21

中国国家版本馆 CIP 数据核字第 2025GN8794 号

概率论与数理统计

GAILÜLUN YU SHULI TONGJI

主　　编: 王　颖　周海钰　刘　明
责任编辑: 金红艳
印　　装: 唐山唐文印刷有限公司
开　　本: 889 mm×1 194 mm　1/16　**印　　张:** 12　**字　　数:** 302 千字
版　　次: 2025 年 8 月第 1 版　**印　　次:** 2025 年 8 月第 1 次印刷
书　　号: ISBN 978-7-5667-4391-6
定　　价: 46.80 元

出 版 人: 李文邦
出版发行: 湖南大学出版社
社　　址: 湖南·长沙·岳麓山　**邮　　编:** 410082
电　　话: 0731-88822559(营销部)　88821174(编辑部)　88821006(出版部)
传　　真: 0731-88822264(总编室)
网　　址: http://press.hnu.edu.cn
电子邮箱: xiaoshulianwenhua@163.com

前　言

概率论与数理统计是全国高等院校工科、理科及经济类等各专业必修的一门重要的基础课程.它在培养符合现代社会发展的高素质应用型人才方面起着非常重要的作用. 为适应社会发展的需求与教学改革对专业及课程调整的新形势，我们参照理工类和经济类高等院校概率论与数理统计课程的教学基本要求，编写了本书.

本书主要有以下特点：

(1) 在教材体系和章节的安排上，严格遵循循序渐进、深入浅出的教学规律；基础面相对拓宽，做到深浅适中、难易适度.

(2) 考虑到有些专业课程具有较强的社会实践性，在教材的编写上也力争做到理论联系实际，注重案例的引入. 通过案例教学，对课程重点和难点进行深化分析和训练，加强学生对知识点的理解和记忆，强化学生分析问题、解决问题的能力.

(3) 内容组织符合学生认知特点，重视对数学概念的分析；加强对知识发生过程的探索；对得到的重要结论，阐明它们在实际中直接和间接的作用.

本书共八章，主要内容包括：概率论的基本概念、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、样本及抽样分布、参数估计、参数假设检验及线性回归分析等。

在本书的编写过程中，我们参阅了大量有关概率论与数理统计方面的书籍，并引用了其中的一些资料，在此向作者深表感谢.

由于水平有限，编写时间仓促，书中难免存在不妥之处，敬请各位专家及广大读者提出宝贵意见，以便修订时改进.

编　者

2025 年 6 月

目　录

第一章
概率论的基本概念

概率论与数理统计是从数量化的角度来研究现实世界中某类不确定现象(随机现象)规律性的一门应用数学学科. 20 世纪以来，其被广泛应用于工业、国防、国民经济及工程技术等各个领域．本章将主要介绍随机事件及其概率，它是概率论中最基本、最重要的概念.

第一节 随机事件

一、随机现象

自然界与人类社会存在和发生的各种现象，大致可归结为两类：一类称为确定性现象，即条件完全决定结果的现象，也称为必然现象．如在标准大气压下，水被加热到 100℃时一定沸腾．另一类称为随机现象，即条件不能完全决定结果的现象．如掷一枚均匀硬币，可能出现正面，也可能不出现正面；从一批产品中任取一件产品，可能是次品，也可能不是次品.

对于随机现象，在少数几次试验或观察中其结果无规律性，但通过长期观察或大量的重复试验可以看出，试验的结果呈现出一种规律性，这种规律性称为**统计规律性**，它是随机现象自身所具有的特征．概率论是研究随机现象及其统计规律性的一门数学学科，它被广泛应用于自然科学、社会科学等许多领域.

二、随机试验

为了深入研究随机现象，就必须在一定的条件下对它进行多次观察．若把一次观察视为一次试验，则观测到的结果就是试验结果．概率论中把满足下述条件的试验称为**随机试验**．

(1)可以在相同的条件下重复进行；

(2)有多种可能结果，且试验前不能预言会出现哪种结果；

(3)试验开始前，预先知道试验可能出现的全部结果.

若无特别声明，本书所指的试验，均指随机试验．例如：

试验 E_1：在一定的条件下进行射击练习，考虑中靶的环数.

试验 E_2：掷一枚硬币，观察所出现的面.

试验 E_3：记录某汽车站某时段内候车的人数.

试验 E_4：测试某种灯泡的寿命.

试验 E_5：记录电话交换台在单位时间内收到的呼叫次数.

试验 E_6：抛掷一颗均匀的骰子，观察骰子出现的点数.

不难看出，这 6 个例子都满足随机试验的上述 3 个特征，它们均为随机试验.

三、随机事件

在随机试验中，人们通常不仅关心某个样本点的出现，更关心满足某些条件的样本点的出现，即关心试验时可能出现的某种结果．例如，在掷骰子的试验 E_6 中，我们可能关心是否出现点数 1，抑或可能关注是否出现奇数点(即点数 1，3，5)等结果．它们皆为样本空间的子集(随机试验可能出现的结果)，我们称为**随机事件**，简称为**事件**．随机事件通常用大写英文字母 A，B，C，或其带下标的形式 A_1，B_2，C_k($k=1$，2，…)等表示．事件 A 在一次试验中发生，当且仅当本次试验结果 $\omega\in A$. 此外，我们称仅含一个样本点的随机事件(不能再分解的最简单的随机试验结果)为**基本事件**；由多个样本点构成的集合称

为**复合事件**．样本空间 Ω 包含所有样本点，样本点是 Ω 自身的一个子集．显然在每次试验后必有 Ω 中的一个样本点出现，我们将其称为**必然事件**，仍记为 Ω. 因空集 $\varnothing$ 总是样本空间 Ω 的一个子集，空集不包含任何样本点，显然在每次试验中都不会发生，我们将其称为**不可能事件**．很明显，必然事件与不可能事件并不具有随机性，但是为了讨论问题方便，也把它们看作特殊的随机事件.

四、样本空间

我们把随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为随机试验 E 的**样本空间**，用 Ω 来表示．Ω 中的元素，即 E 的每一个可能结果，称为**样本点**，一般用 ω 表示.

例如 E_2 和 E_6 的样本空间分别为 $\Omega_2=\{$正面，反面$\}$和 $\Omega_6=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

样本空间的引入使得我们能用集合这一数学工具来研究随机事件．这样一来，试验 E 的任一事件都是其样本空间的一个子集合．特别地，E 的必然事件就是其样本空间 Ω 自身，E 的不可能事件记为 $\varnothing$，它对应着空集.

第二节　随机事件间的关系及运算

在概率论中，人们往往不仅要研究随机试验的一个事件，还要研究多个事件，而这些事件之间又有一定的联系．为了表述事件间的联系，本节主要介绍定义事件间的关系和运算.

一、包含关系

若事件 B 发生必然导致事件 A 发生，则称事件 A 包含事件 B，记作：$B\subset A$，也称为事件 B 包含于事件 A，如图 1-1 所示.

显然，对任何事件 A，$A\subset\Omega$. 为方便起见，规定对任何事件 A，$\varnothing\subset A$. 不难验证，若 $B\subset A$，$A\subset\Omega$，则 $B\subset\Omega$. 这一性质称为包含关系的传递性.

若事件 A 所包含的基本事件与事件 B 所包含的基本事件完全相同，则称事件 A 与事件 B 相等，记作：$A=B$，如图 1-2 所示.

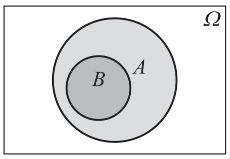

图 1-1

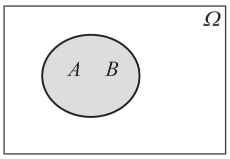

图 1-2

二、和(并)事件

事件 A 与事件 B 中至少有一个发生，即事件 A 发生或事件 B 发生，这个事件称为事件 A 与事件 B 的和(并)事件，记作 $A+B$(或 $A\cup B$)，如图 1-3 所示.

$A+B$ 是由所有属于事件 A 或事件 B 的基本事件组成的．$A+B$ 发生当且仅当 A，B 至少有一个发生.

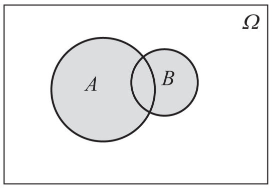

图 1-3

三、积(交)事件

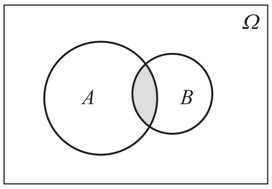

图 1-4

事件 A 与事件 B 同时发生，即事件 A 发生且事件 B 发生，这个事件称为事件 A 与事件 B 的积(交)事件，记作：AB(或 $A\cap B$)，如图 1-4 所示.

$A\cap B$ 是由所有既属于事件 A 又属于事件 B 的基本事件组成的. $A\cap B$ 发生当且仅当 A 与 B 同时发生.

四、差事件

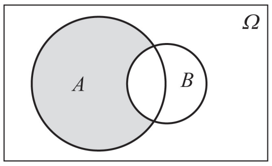

图 1-5

事件 A 发生且事件 B 不发生，称为事件 A 与事件 B 的差事件，记作：$A-B$，如图 1-5 所示.

$A-B$ 是由所有属于事件 A 但不属于事件 B 的基本事件组成的 . $A-B$ 发生当且仅当 A 发生而且 B 不发生.

五、互斥关系(互不相容)

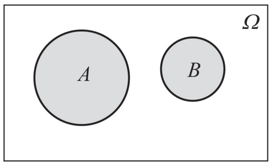

图 1-6

若事件 A 与事件 B 不可能同时发生，则称事件 A 与事件 B 互斥，或称事件 A 与事件 B 互不相容，如图 1-6 所示.

互斥的两个事件不含有共同的基本事件，基本事件间是互斥的，不可能事件与任何事件都是互斥的.

六、对立(逆)事件

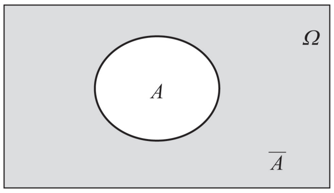

图 1-7

对于事件 A，若事件 $\overline{A}$ 满足 $A\cup\overline{A}=\Omega$，$A\cap\overline{A}=\varnothing$，则把事件 $\overline{A}$ 称为事件 A 的对立事件，如图 1-7 所示.

$\overline{A}$ 是由 Ω 中所有不属于 A 的基本事件组成，若 A 发生，则 $\overline{A}$ 必不发生；反之亦然 . 事件 A，$\overline{A}$ 对立，意味着在任何一次试验中，A，$\overline{A}$ 不可能同时发生且它们中恰好有一个发生.

显然，对立事件一定是互斥的，但互斥的事件却不一定是对立的.

当将事件看作集合时，上述六种关系和运算与集合中对应的关系和运算完全一致(见表 1-1). 例如，积事件 $A\cap B$ 是由那些既属于 A 又属于 B 的样本点构成的集合 . A 与 B 互不相容则意味着构成 A 的样本点的集合与构成 B 的样本点的集合没有公共元素.

表 1-1

记 号	概 率 论	集 合 论
Ω	样本空间，必然事件	全集
$\varnothing$	不可能事件	空集
ω	样本点	元素
A	事件	集合
$\overline{A}$	逆事件	A 的余集
$A\subset B$	事件 A 发生导致事件 B 发生	A 是 B 的子集
$A=B$	事件 A 与 B 相等	A 与 B 相等
$A\cup B$	事件 A 与 B 至少一个发生(和事件)	A 与 B 的和(并)集
$A\cap B$	事件 A 与 B 同时发生(积事件)	A 与 B 的交集
$A-B$	事件 A 发生而事件 B 不发生	A 与 B 的差集
$A\cap B=\varnothing$	事件 A 与 B 互不相容	A 与 B 无公共元素

事件的和、积运算及互不相容关系可以推广到有限个事件及可列无穷个事件的情形：

(1) $\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\{n$ 个事件 A_1，A_2，…，A_n 至少一个发生$\}$；

$\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k\cup\cdots=\{$可列$\infty$个事件 A_1，A_2，…，A_k，…至少一个发生$\}$.

(2) $\bigcap\limits_{k=1}^{n}A_k=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n=\{n$ 个事件 A_1，A_2，…，A_n 同时发生$\}$；

$\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}A_k=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_k\cap\cdots=\{$可列个事件 A_1，A_2，…，A_k，…同时发生$\}$.

(3) n 个事件 A_1，A_2，…，A_n 互不相容$\Leftrightarrow$事件 A_1，…，A_n 两两互不相容；

可列个事件 A_1，A_2，…，A_k，…互不相容$\Leftrightarrow$事件 A_1，A_2，…，A_k，…两两互不相容.

例如，在 E_5 中，设 $A_k=\{$恰好接到 k 次呼叫$\}(k=0，1，\cdots)$，$B_k=\{$接到的呼叫次数不多于 k 次$\}$，则 $\bigcup\limits_{k=6}^{\infty}A_k=\{$至少有 6 次呼唤$\}$，$\bigcap\limits_{k=3}^{\infty}B_k=\{$接到的呼叫不多于 3 次$\}$. 事件 A_0，A_1，…，A_k，…是互不相容的.

事实上，任何试验的基本事件都是互不相容的．对互不相容的事件求和时，常将“$\cup$”号换成“$+$”号．例如，在 E_5 中：

$$\bigcup_{k=0}^{10}A_k=A_1+A_2+\cdots+A_{10}=\sum_{k=1}^{10}A_k.$$

如同集合运算规律一样，事件间的运算满足以下规律：

(1) 交换律：　$A\cup B=B\cup A$；$A\cap B=B\cap A$.

(2) 结合律：　$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$；

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$.

(3) 分配律：　$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$；

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

(4) 对偶律：　$\overline{\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k}=\bigcap\limits_{k=1}^{n}\overline{A_k}$，$\overline{\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k}=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\overline{A_k}$；

$\overline{\bigcap\limits_{k=1}^{n}A_k}=\bigcup\limits_{k=1}^{n}\overline{A_k}$，$\overline{\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}A_k}=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\overline{A_k}$.

例 1　将两颗均匀的骰子各掷一次，若以$(x，y)$表示其结果，其中 x 表示第一颗骰子出现的点数，y 表示第二颗骰子出现的点数，则样本空间为

$$\Omega=\{(x，y)：x，y=1，2，3，4，5，6\}$$

若以 A，B，C，D 分别表示事件“点数之和等于 2”“点数之和等于 5”“点数之和超过 9”“点数之和不小于 4 也不超过 6”．试写出事件 A，B，C，D 包含的结果．

【解】　$A=\{(1，1)\}$；$B=\{(1，4)，(2，3)，(3，2)，(4，1)\}$；$C=\{(4，6)，(5，5)，(6，4)，(5，6)，(6，5)，(6，6)\}$；$D=\{(1，3)，(2，3)，(3，1)，(1，4)，(2，2)，(3，2)，(4，1)，(1，5)，(2，4)，(3，3)，(4，2)，(5，1)\}$.

例 2　设 A，B，C 为 3 个随机事件，试表示以下事件：

(1) A，B，C 都发生；

(2) A，B 发生但 C 不发生；

(3) A，B，C 都不发生；

(4) A，B，C 中至少有一个发生．

【解】 (1) A，B，C 都发生可表示为 ABC；

(2) A，B 发生但 C 不发生可表示为 $AB\overline{C}=AB-C$；

(3) A，B，C 都不发生可表示为 $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$；

(4) A，B，C 中至少有一个发生可表示为 $A\cup B\cup C$.

第三节 随机事件的概率

对于随机试验，我们不仅关心它可能出现哪些结果(事件)，更重要的是要研究各种结果(事件)发生的可能性大小．在初、高中数学中我们已知道，对于随机事件 A，用数值 $P(A)$ 表示其发生的可能性大小，并称此数值 $P(A)$ 为随机事件 A 的概率．本节我们给出概率的古典定义和统计定义，并研究概率的性质.

一、概率的古典定义

古典概率模型简称**古典概型**，通常是指具有以下两个特征的随机试验模型.

(1) 随机试验只有有限个可能的结果，即有限个样本点(有限性).

(2) 每一个样本点发生的可能性相等(等可能性).

古典概型又称为**等可能性概型**．在概率论产生和发展的过程中，它是最早的研究对象，在实际应用中它也是最常用的一种概率模型.

对于古典概型，以 $\Omega=\{\omega_1, \cdots, \omega_n\}$ 表示样本空间，$\omega_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 表示样本点，对于任一随机事件 $A=\{\omega_{i1}, \cdots, \omega_{in}\}$，下面给出古典概型的定义.

定义 1.1 (概率的古典概型定义) 对于给定的古典概型，若样本空间中有 n 个样本点，事件 A 含有 m 个样本点，则事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{\text{事件 } A \text{ 所含样本点的个数}}{\text{样本空间 } \Omega \text{ 所含样本点的个数}}.$$

性质(古典概率的性质)

(1) 对于任意事件 A，$0\leqslant P(A)\leqslant 1$.

(2) $P(\Omega)=1$，$P(\varnothing)=0$.

(3) 若 A_1，A_2，$\cdots$，A_n 是两两互不相容的事件，则

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n).$$

例 1 某种产品共有 30 件，其中正品 23 件、次品 7 件，现从中任取 5 件．试求被取出的 5 件中恰好有 2 件是次品的概率．

【解】 设 $A=$ “被取出的 5 件中恰好有 2 件是次品”．由题设“从中任取 5 件”应理解为“一次取出 5 件”，故样本点总数 $n=C_{30}^5$．事件 A 包含的样本点数 $m=C_7^2C_{23}^3$，则所求概率为

$$P(A)=\frac{C_7^2C_{23}^3}{C_{30}^5}=0.261\ 0.$$

例 2 一批同类产品共 N 件，其中次品 M 件．现从中随机抽取 n 件(取后不放回)，试求这 n 件中恰有 $k(k\leqslant M)$ 件次品的概率.

【解】 设 $A=\{$恰取到 k 件次品$\}$，由于 A 并不涉及抽取产品的次序，故可将试验设想成从 N 件编号的产品中一次取出 n 件，每一种取法构成一个基本事件，总共有 C_N^n 种取法，A 发生意味着取到 k 件次品和 $n-k$ 件正品，k 件次品和 $n-k$ 件正品的取法分别为 C_M^k 及 C_{N-M}^{n-k} 种．由乘法原理，构成 A 的基本事件数为 $C_M^k\cdot C_{N-M}^{n-k}$，故

$$P(A)=\frac{C_M^k\cdot C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}.$$

例 3 某口袋中有 6 个球，其中 4 个白球、2 个红球，从袋中取球两次，每次随机地取一个．考虑两种取球方式．

① 第一次取一个球，观察其颜色后放回袋中，搅匀后再取一球，这种取球方式叫作有放回取球．

② 第一次取一个球不放回袋中，第二次从剩余的球中再取一个球，这种取球方式叫作无放回取球．

试分别就上面两种情况求：

(1) 取到的两个球都是白球的概率；

(2) 取到的两个球颜色相同的概率．

【解】 (1) 令 A_1 表示事件“取到的两个球都是白球”，则

有放回取球：$$P(A_1)=\frac{4}{6}\times\frac{4}{6}=\frac{4}{9};$$

无放回取球：$$P(A_1)=\frac{4}{6}\times\frac{3}{5}=\frac{2}{5}.$$

(2) 令 A_2 表示事件“取到的两只球颜色相同”，则

有放回取球：$$P(A_2)=\frac{4}{6}\times\frac{4}{6}+\frac{2}{6}\times\frac{2}{6}=\frac{5}{9};$$

无放回取球：$$P(A_2)=\frac{4}{6}\times\frac{3}{5}+\frac{2}{6}\times\frac{1}{5}=\frac{7}{15}.$$

例 4 袋中有 a 个白球、b 个红球，依次将球一个个取出，不放回．求第 k 次取到白球的概率 $(1\leqslant k\leqslant a+b)$．

【解】 设 $A=\{$第 k 次取到白球$\}$，由于并不关心第 k 次以后的取球结果，可设想将球编号，一个个取出直至取出第 k 个球为止．则基本事件总数是从 $a+b$ 个编号的球中取出 k 只球进行排列的种数，即 $n=A_{a+b}^k$，A 发生意味着第 k 次取到白球．此白球可能是 a 个白球中的任一个；而前 $k-1$ 次取的球则可能是除此白球之外的其余 $a+b-1$ 个中的任 $k-1$ 个，故由乘法原理有，$k_A=A_a^1\cdot A_{a+b-1}^{k-1}$．得

$$P(A)=\frac{k_A}{n}=\frac{A_a^1\cdot A_{a+b-1}^{k-1}}{A_{a+b}^k}=\frac{a\cdot(a+b-1)(a+b-2)\cdots(a+b-k+1)}{(a+b)(a+b-1)\cdots(a+b-k+1)}=\frac{a}{a+b}.$$

对本题也可给出另一种解法．设想将 $a+b$ 个球编号，每次试验将 $a+b$ 个球逐一取出并依次排列在 $a+b$ 个位置上，则基本事件总数为 $n=(a+b)!$，$k_A=A_a^1\cdot(a+b-1)!$，故有

$$P(A)=\frac{(a+b-1)!\ a}{(a+b)!}=\frac{a}{a+b}.$$

注意到 $P(A)$ 与 k 无关，即无论第几次摸球，摸到白球的概率都是 $\frac{a}{a+b}$．这一结果表明抽签、摸奖与先后次序无关，机会是均等的．

例 5 有 n 个人，每个人都以同样的概率 $\frac{1}{N}$ 被分配在 $N(n\leqslant N)$ 间房中的任一间中，试求以下各事件的概率：

(1) 某指定的 n 间房中各有一人；

(2) 恰有 n 间房，其中各有一人；

(3) 某指定的一间房中恰有 $m(m\leqslant n)$ 人．

【解】 先求样本空间中所含样本点的个数.

首先，把 n 个人分到 N 间房中去共有 N^n 种分法；其次，求每种情形下事件所含的样本点个数.

(1) 某指定的 n 间房中各有一人，所含样本点的个数，即可能的分法为 $n!$；

(2) 恰有 n 间房中各有一人，所有可能的分法为 $C_N^n\cdot n!$；

(3) 某指定的一间房中恰有 m 人，可能的分法为 $C_n^m(N-1)^{n-m}$.

于是可以得到 3 种情形下事件的概率，分别为

(1) $\dfrac{n!}{N^n}$；

(2) $\dfrac{C_N^n\cdot n!}{N^n}$；

(3) $\dfrac{C_n^m(N-1)^{n-m}}{N^n}$.

在上述分房问题中，若令 $N=365$，$n=30$，$m=2$，则可演化为生日问题.

全班有学生 30 人，求以下事件的概率：

(1) 某月指定为 30 天，每位学生生日各占一天；

(2) 全班学生生日各不相同；

(3) 全年某天，恰有两个学生同一天过生日.

利用上述结论可得到概率分别为

(1) $\dfrac{30!}{365^{30}}$；

(2) $\dfrac{C_{365}^{30}\cdot 30!}{365^{30}}$；

(3) $\dfrac{C_{30}^2(364)^{28}}{(365)^{30}}$.

二、概率的统计定义

为得到概率的统计定义，首先引入频率的概念．频率描述了事件发生的频繁程度.

定义 1.2(频率的定义) 若在同一条件组下将试验 E 重复 N 次，事件 A 发生了 m 次，则称比值 $\frac{m}{N}$ 为事件 A 在 N 次重复试验中发生的**频率**，记为 $f_N(A)$，有

$$f_N(A)=\frac{m}{N}.$$

人们在实践中发现，当重复试验次数 N 较大时，事件发生的频率往往可以大致反映事件发生的可能性大小．为了解决更一般场合(如等可能性不成立)下概率的定义与计算问题，历史上许多人做了大量的实验来研究频率(表 1-2 记录了历史上许多数学家进行抛掷硬币的部分实验结果)，发现频率具有稳定性：当 N 很大时，频率值 $f_N(A)$ 会在某个常值附近摆动，而随着试验次数 N 的增大，这种摆动幅度会越来越小．这个常值就是 A 发生的概率 $P(A)$.

表 1-2

人 名	抛掷次数(n)	出现正面次数	频率 $f_n(A)$
德摩根	2 048	1 061	0.518 1
蒲　丰	4 040	2 048	0.506 9
费　勒	10 000	4 979	0.497 9
皮尔逊	1 2000	6 019	0.501 6
皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5
维　尼	30 000	14 994	0.499 8

频率的稳定性为人们用当 N 很大时的频率值近似地作为概率值提供了依据，由此，也得到了历史上第一个概率的一般定义.

定义 1.3(概率的统计定义)　在观察某一随机事件 A 的随机试验中，随着试验次数 n 的增大，事件 A 发生的频率 $f_n(A)$会越来越稳定地在某一常数 p 附近摆动，这时就以常数 p 作为事件 A 的**概率**，并称其为统计概率，记作：$P(A)=p$.

由频率和概率的统计定义，可以得到统计概率的下述性质：

(1)　非负性：　$0\leqslant P(A)\leqslant 1$；

(2)　规范性：　$P(\Omega)=1$；

(3)　有限可加性：若事件 A_1，A_2，…，A_n 互不相容，则 $P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$.

例 6　某市卫生管理部门对该市 60 岁以上老人患高血压的情况进行调查，从 4 个区各分别调查了 80 人，90 人，100 人，100 人，其中患病人数分别为 23，27，33，30. 试估计该市 60 岁以上老人高血压的患病率 p.

【解】　以 4 组调查结果频率的平均值来估计 p，结果为

$$p=\frac{1}{4}\times\left(\frac{23}{80}+\frac{27}{90}+\frac{33}{100}+\frac{30}{100}\right)\approx 0.304\ 4.$$

三、概率的性质

根据随机事件概率的定义，可得到随机事件的概率具有以下性质：

性质 1　$P(\varnothing)=0$，即不可能事件的概率为零.

证明　因为 $\Omega=\Omega+\varnothing+\varnothing+\varnothing+\cdots$，

又 $P(\Omega)=P(\Omega)+P(\varnothing)+P(\varnothing)+\cdots$，

故 $$P(\varnothing)=0.$$

性质 2　若 A_1，A_2，…，A_n 是两两互不相容的事件，则

$$P(\sum_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$$

证明　因为 $A_1+A_2+\cdots+A_n=A_1+A_2+\cdots+A_n+\varnothing+\varnothing+\cdots$，所以

$$\begin{aligned}P(A_1+A_2+\cdots+A_n)&=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)+P(\varnothing)+\cdots\\&=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)\end{aligned}$$

性质 3　$P(\overline{A})=1-P(A)$.

证明　由于 $A+\overline{A}=\Omega$，$P(A)+P(\overline{A})=1$，故　$P(\overline{A})=1-P(A)$.

性质 4　若 $B\subset A$，则 $P(A-B)=P(A)-P(B)$，且 $P(B)\leqslant P(A)$.

证明　由于 $A=AB+(A-B)$，所以 $P(A)=P(AB)+P(A-B)$.

若 $B\subset A$，则 $AB=B$，故 $P(A-B)=P(A)-P(B)$.

此外，注意到 $P(A-B)\geqslant 0$，故在 $A\supset B$ 下，有 $P(A)\geqslant P(B)$.

性质 5 对于任意事件 A，B，$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

证明 因为 $A\cup B=A\cup(B-AB)$，且 $A(B-AB)=\varnothing$，则

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B-AB)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

例 7 设有 100 件产品，其中有 95 件合格品、5 件次品，现从中任取 5 件，试求其中至少有一件次品的概率.

【解法 1】 设 A_k 表示“5 件产品中有 k 件次品”，这里 $k=1,2,3,4,5$；A 表示“其中至少有一件次品”，则 $A=\sum\limits_{k=1}^{5}A_k$，且 A_1，A_2，…，A_5 互不相容，$P(A_k)=\dfrac{C_5^kC_{95}^{5-k}}{C_{100}^5}(1\leqslant k\leqslant 5)$. 于是由性质 2 可得

$$P(A)=\sum_{k=1}^{5}P(A_k)=\sum_{k=1}^{5}\frac{C_5^kC_{95}^{5-k}}{C_{100}^5}\approx 0.230\ 4.$$

【解法 2】 事件 A 较为复杂，而其对立事件 $\overline{A}=A_0$ 则比较简单，且 $P(A_0)=\dfrac{C_{95}^5}{C_{100}^5}\approx 0.769\ 6$. 于是由性质 3 可得

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-P(A_0)\approx 1-0.769\ 6=0.230\ 4.$$

第二种解法显示了对立事件概率的性质在计算事件概率时的作用. 一般地，当所要求概率的事件较复杂时，常常考虑先求出其对立事件的概率.

例 8 已知袋中有红、黄、白色球各一个，每次任取一个，有放回地取 3 次，求取到的 3 个球中没有红球或没有黄球”的概率.

【解】 设事件 $A=\{$没有红球$\}$，$B=\{$没有黄球$\}$，$C=\{$没有红球或没有黄球$\}$，则 $C=A\cup B$，故

$$P(C)=P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{2^3}{3^3}+\frac{2^3}{3^3}-\frac{1^3}{3^3}=\frac{8+8-1}{27}=\frac{15}{27}=\frac{5}{9}.$$

例 9 设事件 A，B 的概率分别为 $\dfrac{1}{3}$ 和 $\dfrac{1}{2}$，求以下条件下事件 $\overline{A}B$ 的概率.

(1) $A\subset B$； (2) $P(AB)=\dfrac{1}{4}$； (3) A，B 互斥.

【解】 (1)因为 $\overline{A}B=B-A$，且 $A\subset B$，故由概率的性质 4，有

$$P(\overline{A}B)=P(B-A)=P(B)-P(A)=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}.$$

(2) 因为 $\overline{A}B=B-A=B-AB$，故

$$P(\overline{A}B)=P(B-AB)=P(B)-P(AB)=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}.$$

(3) 因为 A，B 互斥，所以 $B\subset\overline{A}B=B$，故

$$P(\overline{A}B)=P(B)=\frac{1}{2}.$$

第四节　条件概率

一、条件概率

前文我们讨论了一个事件 A 的概率 $P(A)$的计算．但在实际生活中，我们常常需要求在事件 B 已发生的条件下事件 A 发生的概率，记为 $P(A|B)$. 一般来说，这两个概率是不同的．

例 1　考虑有两个孩子家庭(假定男、女出生率相同).

设 A={一男一女}={(男，女)，(女，男)}；B={至少有一女}={(女，女)，(男，女)，(女，男)}.

则 Ω={(男，男)，(男，女)，(女，女)，(女，男)}，有

$$P(A)=\frac{1}{2},\ P(B)=\frac{3}{4},\ P(AB)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

现在考虑：已知事件 B 发生的条件下，A 发生的概率，则

$$P(A|B)=\frac{2}{3}=\frac{\frac{2}{4}}{\frac{3}{4}}=\frac{P(AB)}{P(B)},\ \text{即}\ P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}.$$

定义 1.4　设 A，B 为试验 E 的两个事件，且 $P(B)>0$，则称

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}.$$

为在事件 B 发生的条件下事件 A 发生的概率，简称**条件概率**.

条件概率具有下述性质：

(1) 若 A，B 为随机事件，且 $P(B)>0$，则 $0\leqslant P(A|B)\leqslant 1$；

(2) 若 $P(B)>0$，则 $P(\Omega|B)=1$，$P(\varnothing|B)=0$；

(3) 若 A_1，A_2，…，A_n 是两两互不相容的事件，$P(B)>0$，则

$$P\left(\sum_{i=1}^{n}A_i \,\middle|\, B\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i|B);$$

(4) 若 $P(B)>0$，则 $P(\overline{A}|B)=1-P(A|B)$.

例 2　设某种动物由出生算起活 10 年以上的概率为 0.9，活 20 年以上的概率为 0.3. 现有一只 10 岁的这种动物，问它能活 20 岁以上的概率是多少？

【解】 设 A={能活 10 年以上}，B={能活 20 年以上}，依题意，$P(A)=0.9$，$P(B)=0.3$. 由于 $B\subset A$，所以 $AB=B$. 因此 $P(AB)=P(B)=0.3$. 于是

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{0.3}{0.9}\approx 0.333.$$

二、乘法公式

若已知 $P(B)$，$P(A|B)$，也可以求 $P(AB)$，这就是概率的乘法公式.

定理 1.1　设 $P(B)>0$，则有

$$P(AB)=P(B)\cdot P(A|B). \tag{1-1}$$

设 $P(A)>0$，则有

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B\mid A). \tag{1-2}$$

式(1-1)，式(1-2)称为概率的**乘法公式**.

概率的乘法公式可以推广到任意 n 个事件的情形：若事件 A_1，A_2，…，A_n 满足 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$，则

$$P(\bigcap_{i=1}^{n}A_i)=P(A_1)\cdot P(A_2\mid A_1)\cdot P(A_3\mid A_1A_2)\cdot\cdots\cdot P(A_n\mid A_1A_2\cdots A_{n-1}).$$

例 3 从含有 3 只次品的 10 只产品中无放回地取两次，每次任取一只．求：

(1)两次都取到正品的概率；

(2)第二次才取到正品的概率．

【解】 设 $A_i=\{$第 i 次取到正品$\}(i=1,2)$，$B=\{$两次都取到正品$\}$，$C=\{$第二次才取到正品$\}$.

(1) 显然有 $B=A_1A_2$，依题意有

$$P(A_1)=\frac{C_7^1}{C_{10}^1}=\frac{7}{10},\quad P(A_2\mid A_1)=\frac{C_6^1}{C_9^1}=\frac{2}{3},$$

故

$$P(B)=P(A_1A_2)=P(A_1)\cdot P(A_2\mid A_1)=\frac{7}{10}\cdot\frac{2}{3}=\frac{7}{15}.$$

(2)“第二次才取到正品”也即“第一次取到次品而第二次取到正品”，即 $C=\overline{A}_1A_2$.

故

$$P(C)=P(\overline{A}_1A_2)=P(\overline{A}_1)\cdot P(A_2\mid\overline{A}_1)=\frac{C_3^1}{C_{10}^1}\cdot\frac{C_7^1}{C_9^1}=\frac{7}{30}.$$

例 4 设有甲、乙、丙 3 个小朋友，甲得病的概率是 0.05，在甲得病的条件下乙得病的概率是 0.40，在甲、乙两个小朋友均得病的条件下丙得病的概率是 0.80，试求甲、乙、丙 3 人均得病的概率．

【解】 用 A 表示“甲得病”，B 表示“乙得病”，C 表示“丙得病”，则

$$P(A)=0.05,\ P(B\mid A)=0.4,\ P(C\mid AB)=0.8,$$

故所求概率为

$$P(ABC)=P(A)\cdot P(B\mid A)\cdot P(C\mid AB)=0.05\times0.4\times0.8=0.016.$$

三、全概率公式

定理 1.2(全概率公式) 若 A_1，A_2，…，A_n(n 有限或无限)是两两互不相容的事件，$P(A_i)>0$，$i=1,2,\cdots,n$，事件 $B\subset\bigcup_{i=1}^{n}A_i$，则对于事件 B，有

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)\cdot P(B\mid A_i). \tag{1-3}$$

式(1-3)称为**全概率公式**.

证明 因为 $B\subset\bigcup_{i=1}^{n}A_i$，$A_iA_j=\varnothing(i\neq j;\ i,j=1,2,\cdots,n)$，所以

$$B=B(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\bigcup_{i=1}^{n}BA_i,$$

且

$$BA_i\cap BA_j=\varnothing\quad(i\neq j;\ i,j=1,2,\cdots,n),$$

由 $P(A_i)>0$ 知 $P(B\mid A_i)$存在，故由概率的有限可加性及乘法公式，有

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(BA_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)\cdot P(B\mid A_i).$$

例 5 有一批产品，其中甲车间产品占 60%，乙车间占 40%，甲车间产品的合格率是 95%，乙车间产品的合格率是 90%，求从这批产品中随机抽取一件为合格产品的概率．

【解】 设 $A=$"抽取的一件是甲车间产品"，则 $\overline{A}=$"抽取的一件是乙车间产品". 又设 $B=$"抽取的一件是合格品"，依题意有

$$P(A)=60\%,\ P(\overline{A})=40\%,\ P(B\mid A)=95\%,\ P(B\mid\overline{A})=90\%,$$

由全概率公式得

$$P(B)=P(A)\cdot P(B\mid A)+P(\overline{A})\cdot P(B\mid\overline{A})=0.6\times0.95+0.4\times0.90=0.93.$$

四、贝叶斯公式

定理 1.3（贝叶斯公式） 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$（n 有限或无限）是两两互不相容的事件，$P(A_i)>0$，$i=1, 2, \cdots, n$，事件 $B\subset\bigcup_{i=1}^{n}A_i$，则有

$$P(A_i\mid B)=\frac{P(A_i)\cdot P(B\mid A_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(A_j)\cdot P(B\mid A_j)}. \tag{1-4}$$

式(1-4)称为**贝叶斯**(Bayes)**公式**(或逆概率公式、后验概率公式)，它是由英国科学家贝叶斯建立的.

$P(A_i\mid B)$是在试验得到结果"B 发生"后求得的关于 A_i 的概率，我们称 $P(A_i)$为**先验概率**，$P(A_i\mid B)$为**后验概率**.

贝叶斯公式具有非常广泛的应用.

例 6 在例 5 中，如果从这批产品中随机抽取一件发现是合格产品，求这件合格产品是甲车间生产的概率.

【解】 由题意得，要求的概率为 $P(A\mid B)$，由贝叶斯公式得

$$\begin{aligned}P(A\mid B)&=\frac{P(A)\cdot P(B\mid A)}{P(A)\cdot P(B\mid A)+P(\overline{A})\cdot P(B\mid\overline{A})}\\&=\frac{0.6\times0.95}{0.6\times0.95+0.4\times0.90}\approx0.613.\end{aligned}$$

例 7 有 4 位工人生产同一种零件，产量分别占总产量的 35%，30%，20%和 15%，且 4 个工人生产产品的不合格率分别为 2%，3%，4%和 5%. 今从这批产品中任取一件，求：

(1)它是不合格产品的概率；

(2)发现是不合格产品，它是由第一个人生产的概率.

【解】 设 $B=$"任取一件产品为不合格产品"，$A_i=$"任取一件产品是第 i 个人生产的产品"($i=1, 2, 3, 4$)，则

$$P(A_1)=0.35,\ P(A_2)=0.30,\ P(A_3)=0.20,\ P(A_4)=0.15,$$
$$P(B\mid A_1)=0.02,\ P(B\mid A_2)=0.03,\ P(B\mid A_3)=0.04,\ P(B\mid A_4)=0.05,$$

于是：

(1) 由全概率公式得

$$\begin{aligned}P(B)&=\sum_{i=1}^{4}P(A_i)\cdot P(B\mid A_i)\\&=0.35\times0.02+0.30\times0.03+0.20\times0.04+0.15\times0.05\\&=0.031\,5;\end{aligned}$$

（2）由贝叶斯公式得

$$P(A_1 \mid B)=\frac{P(A_1)\cdot P(B \mid A_1)}{\sum_{i=1}^{4} P(A_i)\cdot P(B \mid A_i)}=\frac{0.35\times 0.02}{0.031\ 5}\approx 0.222.$$

第五节 事件的独立性

一、相互独立事件

一般情况下，条件概率 $P(B \mid A)$与 $P(B)$是不同的，但在某些特殊情况下，条件概率 $P(B \mid A)$等于无条件概率 $P(B)$，这时事件 B 发生与否不影响事件 A 的概率．这表明事件 A 与事件 B 之间存在某种独立性．

定义 1.5 设 A 与 B 为两事件，若

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B)$$

成立，则称事件 A 与事件 B 相互独立．

由定义 1.5，可以推出下述定理和性质成立．

定理 1.4 设 A，B 为两事件，且 $P(A)>0$，则 A 与 B 相互独立的充分必要条件是 $P(B \mid A)=P(B)$．

证明 设 A，B 相互独立，即 $P(AB)=P(A)\cdot P(B)$，则

$$P(B \mid A)=P(AB)/P(A)=P(A)\cdot P(B)/P(A)=P(B).$$

反之，设 $P(B \mid A)=P(B)$，则

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B \mid A)=P(A)\cdot P(B).$$

显然，当 $P(B)>0$ 时，定理 1.4 中的充分必要条件可改为 $P(A \mid B)=P(A)$．而当 $P(A)$，$P(B)$至少有一个为零时，由 $AB\subset A$ 及 $AB\subset B$ 易知，此时仍有 $P(AB)=P(A)\cdot P(B)$成立．这表明，概率为零的事件与任一事件均相互独立．

性质 （1）不可能事件$\varnothing$与任何事件独立．

（2）若事件 A，B 相互独立，则 A 与 $\overline{B}$，$\overline{A}$ 与 B，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 分别相互独立．

证明 （1）是显然成立的．

（2）由于 $A=AB+A\overline{B}$，则

$$P(A)=P(AB)+P(A\overline{B}).$$

由 A 与 B 的独立性，知

$$P(A)=P(A)\cdot P(B)+P(A\overline{B}),$$

则
$$P(A\overline{B})=P(A)-P(A)\cdot P(B)=P(A)[1-P(B)]=P(A)\cdot P(\overline{B}),$$

从而 A 与 $\overline{B}$ 相互独立，类似地可证明其他结论．

现给出三个事件独立性的定义．

定义 1.6 对于随机事件 A_1，A_2，A_3，若下列四个等式成立，则称 A_1，A_2，A_3 是相互独立的，即

$$\begin{cases}P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2),\\ P(A_2A_3)=P(A_2)P(A_3),\\ P(A_1A_3)=P(A_1)P(A_3),\end{cases}\tag{1-5}$$

$$P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2)P(A_3).\tag{1-6}$$

若前三个等式成立，即式(1-5)成立，则称 A_1，A_2，A_3 是两两独立的.

上述 3 个事件相互独立的定义中要求四个等式同时成立，缺一不可，下例说明了这一点.

例 1　若有一个均匀正八面体，其 1，2，3，4 面被染成了红色，1，2，3，5 面被染成了白色，1，6，7，8 面被染成了黑色，用 A，B，C 分别表示投掷一次正八面体出现红、白、黑色的事件，则

$$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2},$$

$$P(ABC)=\frac{1}{8}=P(A)\cdot P(B)\cdot P(C),$$

而

$$P(AB)=\frac{3}{8}\neq\frac{1}{4}=P(A)\cdot P(B).$$

我们可以将相互独立概念推广到任意 n 个事件的情形.

定义 1.7　设有 n 个事件 A_1，A_2，…，A_n，如果对于任意正整数 $k(2\leqslant k\leqslant n)$以及 $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n$，有

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})\cdot P(A_{i_2})\cdot\cdots\cdot P(A_{i_k})$$

成立，则称事件 A_1，A_2，…，A_n 是相互独立的.

从定义 1.7 不难看出，n 个事件相互独立的条件十分苛刻，$C_n^2+C_n^3+\cdots+C_n^n=(1+1)^n-C_n^0-C_n^1=2^n-n-1$ 个等式必须同时成立．例如，当 $n=3$ 时应有 $2^3-3-1=4$ 个等式同时成立.

而 n 个事件中两两独立的条件是 C_n^2 个式子 $P(A_iA_j)=P(A_i)\cdot P(A_j)(i\neq j;\ i,\ j=1,\ \cdots,\ n)$成立.

可见由多个事件相互独立可以推出它们两两独立．反之，由多个事件两两独立不一定能推出它们相互独立.

例 2　有两门高射炮独立地射击一架敌机，设甲炮击中敌机的概率为 0.8，乙炮击中敌机的概率为 0.7. 试求敌机被击中的概率.

【解】　设 A 表示“甲炮击中敌机”，B 表示“乙炮击中敌机”，那么敌机被击中这一事件是 $A+B$. 由于 A，B 相互独立，故 $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A)+P(B)-P(A)\cdot P(B)=0.8+0.7-0.8\times0.7=0.94$.

例 3　加工某一零件共需经过三道工序，设第一、第二、第三道工序的次品率分别为 2%，3%，5%. 假定各道工序是互不影响的，问：加工出来的零件的次品率是多少?

【解】　设 $A=\{$加工出来的零件为次品$\}$，$A_i=\{$第 i 道工序出次品$\}(i=1,\ 2,\ 3)$，则有 $A=\bigcup\limits_{i=1}^{3}A_i$，且 A_1，A_2，A_3 相互独立，故有

$$\begin{aligned}P(A)&=P(A_1\cup A_2\cup A_3)=1-P(\overline{A}_1)\cdot P(\overline{A}_2)\cdot P(\overline{A}_3)\\&=1-(1-0.02)\times(1-0.03)\times(1-0.05)=0.09693.\end{aligned}$$

例 4　假设每个人血清中含有肝炎病毒的概率为 0.4%. 混合 100 个人的血清，试求该血清中含有肝炎病毒的概率.

【解】　设 A_k 表示“第 k 个人血清中含有肝炎病毒”$(k=1,\ 2,\ \cdots,\ 100)$，则可以认为诸 A_k 相互独立，且 $P(A_k)=0.004(k=1,\ 2,\ \cdots,\ 100)$. 于是所求概率为

$$P\left(\sum_{k=1}^{100} A_k\right)=1-\prod_{k=1}^{100} P(\overline{A}_k)=1-0.996^{100}\approx 0.3302.$$

二、独立试验序列概型

在概率论中，把在同样条件下重复进行试验的数学模型称为**独立试验序列概型**．进行 n 次试验，若任何一次试验中各结果发生的可能性都不受其他各次试验结果的影响，则称这 n 次试验是相互独立的．特别地，当每次试验只有两个可能结果时，称为 n **重伯努利试验**．例如，连续地 n 次射击、连续地抛掷 n 次硬币等都是 n 重伯努利试验概型．关于 n 重伯努利试验概型，有以下的定理.

定理 1.5 设在一次试验中事件 A 发生的概率为 $p(0<p<1)$，则在 n 重伯努利试验中 A 恰好发生 k 次的概率为

$$p_n(k)=\mathrm{C}_n^k p^k q^{n-k}(k=0,1,2,\cdots,n;q=1-p).$$

证明 设 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$表示“事件 A 在第 i 次试验中发生”，则 $P(A_i)=p$，$P(\overline{A}_i)=1-p=q$ $(i=1,2,\cdots,n)$．事件 A 在其中某 k 次，如第 i_1，i_2，$\cdots$，i_k 次发生；在其余 $n-k$ 次，如第 j_1，j_2，$\cdots$，j_{n-k} 次中不发生的概率为 $P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k}\overline{A}_{j_1}\overline{A}_{j_2}\cdots\overline{A}_{j_{n-k}})$.

由于诸结果相互独立，所以有

$$\begin{aligned}&P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k}\overline{A}_{j_1}\overline{A}_{j_2}\cdots\overline{A}_{j_{n-k}})\\&=P(A_{i_1})\cdot P(A_{i_2})\cdot\cdots\cdot P(A_{i_k})\cdot P(\overline{A}_{j_1})\cdot P(\overline{A}_{j_2})\cdot\cdots\cdot P(\overline{A}_{j_{n-k}})\\&=\underbrace{p\cdot p\cdot\cdots\cdot p}_{k\text{个}}\cdot\underbrace{q\cdot q\cdot\cdots\cdot q}_{n-k\text{个}}=p^k q^{n-k}.\end{aligned}$$

又由于事件 A 发生的 k 次试验在 n 次试验中的位置共有 C_n^k 种，每种位置对应的事件互不相容，且由前面的计算可知，概率均为 $p^k q^{n-k}$，因此事件 A 在 n 次试验中出现 k 次的概率为

$$P_n(k)=\mathrm{C}_n^k p^k q^{n-k}(k=0,1,2,\cdots,n).$$

例 5 电灯泡使用寿命在 1 000 h 以上的概率为 0.2，试求 3 个灯泡在使用 1 000 h 后，最多有 1 个损坏的概率．

【解】 设 A 表示“灯泡在使用 1 000 h 后未损坏”，则 $P(A)=0.2$，$P(\overline{A})=0.8$. 本例可以视为三重伯努利概型(观察一个灯泡可以视为一次试验，每次试验只有两个可能结果：A 表示“灯泡未损坏”与 $\overline{A}$ 表示“灯泡已损坏”，且各灯泡是否损坏互不影响，因而试验相互独立)．由定理 1.5 知，所求概率为

$$P_3(2)+P_3(3)=\mathrm{C}_3^2 0.2^2\times 0.8+\mathrm{C}_3^3 0.2^3\times 0.8^0=0.104.$$

例 6 一大批某型号的电子管，已知其一级品率为 0.3．现从中随机地抽查 20 只，问：其中有一级品的概率是多少？

【解】 由于这批电子管的总量很大，而抽取的只数(20 只)相对很小，故可将抽查 20 只电子管近似地看作有放回抽样．将“抽查一只”作为一次试验，则“抽查 20 只”为 20 重伯努利概型．设 $A=\{$其中有一级品$\}$，由伯努利公式并利用逆事件关系得

$$\begin{aligned}P(A)&=1-P(\overline{A})=1-P_{20}(0)=1-\mathrm{C}_{20}^0 0.3^0 0.7^{20}\\&=1-0.7^{20}=1-0.0007979\approx 0.9992.\end{aligned}$$

在本例中，所抽 20 只中不含一级品的概率 $P(\overline{A})=0.0007979$，不到万分之八．实践表明，这种“概率很小的事件在一次试验中几乎不可能发生”．这一事实称为小概率事件的实际不可能原理．它是数理统计中进行统计推断的主要依据．

例 7　一个人开门，他共有 n 把钥匙，其中仅有一把钥匙能打开这扇门，他随机地选取一把钥匙开门，即每次每把以 $\frac{1}{n}$ 的概率被选中，求该人在第 k 次打开门的概率．

【解】　令 B_k 表示"第 k 次打开门"的事件，则

$$P(B_k)=\left(1-\frac{1}{n}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{n}.$$

课后习题 1

1. 填空题.

(1)已知 A，B 两个事件满足条件 $P(AB)=P(\bar{A}\ \bar{B})$，且 $P(A)=p$，则 $P(B)=$________.

(2)设 A，B 是相互独立的随机事件，A，B 都不发生的概率为 $\frac{1}{16}$，A 发生而 B 不发生的概率等于 A 不发生而 B 发生的概率，则 $P(A)=$________.

(3)一个小组有 8 名学生，每个学生在一周 7 天的任何一天过生日是等可能的，则 8 个人的生日都不在周一的概率为________.

(4)设工厂甲和工厂乙的产品的次品率分别为 1%和 2%，现从甲和乙的产品分别占 60%和 40%的一批产品中随机抽取一件，发现是次品，该次品属于甲生产的概率是________.

(5)从 1，2，3，4 中任取一数，记为 X，再从 1，2，…，X 中任取一个数，记为 Y，则 Y 是 2 的概率为________.

2. 选择题.

(1)设随机事件 A，B 同时发生时，事件 C 一定发生，则(　　).

A. $P(C)=P(AB)$　　B. $P(C)=P(A\cup B)$

C. $P(C)\leqslant P(A)+P(B)-1$　　D. $P(C)\geqslant P(A)+P(B)-1$

(2)随机事件 A，B 满足 $P(A)=P(B)=\frac{1}{2}$，$P(A\cup B)=1$，则下列结论正确的是(　　).

A. $A\cup B=\Omega$　　B. $AB=\varnothing$

C. $P(A-B)=P(A)$　　D. $P(\bar{A}\cup\bar{B})=0$

(3)袋中有 5 个球，其中 3 个红球、2 个黑球，先后从袋中取 3 次球，每次任取 1 个不放回，则第二次取到红球的概率为(　　).

A. $\frac{1}{5}$　　B. $\frac{2}{5}$　　C. $\frac{3}{5}$　　D. $\frac{4}{5}$

(4)设随机事件 A，B 互不相容，且 $P(A)>0$，$P(B)>0$，则下列结论正确的是(　　).

A. $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 互不相容　　B. $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 不是互不相容的

C. $P(AB)=P(A)\cdot P(B)$　　D. $P(A-B)=P(A)$

(5)某人向同一目标独立重复射击，每次射击命中目标的概率为 $p(0<p<1)$，则此人第四次射击恰好第二次命中目标的概率为(　　).

A. $3p(1-p)^2$　　B. $6p(1-p)^2$

C. $3p^2(1-p)^2$　　D. $6p^2(1-p)^2$

3. 袋中有 10 个球，分别标有号码 1～10，从中任取一球，设 $A=\{$取到的球的号码是偶数$\}$，$B=\{$取到的球的号码是奇数$\}$，$C=\{$取到的球的号码小于 5$\}$，试问下列运算分别表示什么事件：

(1)$A\cup B$；(2)$\overline{B\cup C}$；(3)AB；(4)AC；(5)$\bar{A}\ \bar{C}$

4. 若要击落飞机必须同时击毁两个发动机或击毁驾驶舱，记 $A_1=\{$击毁第一个发动机$\}$，$A_2=\{$击毁第二个发动机$\}$，$B=\{$击毁驾驶舱$\}$，试用 A_1，A_2，B 表示事件“飞机被击落”的概率.

5. 若 $P(A)=0.5$，$P(B)=0.4$，$P(A-B)=0.3$，求 $P(A\cup B)$和 $P(\bar{A}\cup\bar{B})$.

6. 设 A，B，C 是三个事件，且 $P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{4}$，$P(AB)=P(BC)=0$，$P(AC)=\dfrac{1}{8}$，求 A，B，C 至少有一个发生的概率.

7. 将 3 个球随机放入 4 个杯子中，问：杯子中球的个数最多为 1，2，3 的概率各是多少？

8. 某个家庭有两个小孩，求至少有一个女孩的概率(设男、女出生率相同).

9. 一盒子中有 9 张卡片，分别编号为 1，2，…，9，采用取后放回的方式，连续取 3 张卡片，求前两次取到卡片的编号为偶数、最后取到卡片的编号为奇数的概率.

10. 掷两颗均匀的骰子，求出现点数之和为 8 的概率.

11. 一口袋中有 4 个白球、6 个红球，从中任取 2 个，求取到 1 个白球和 1 个红球的概率.

12. 一赌徒认为掷一颗骰子 4 次至少出现一次 6 点与掷两颗骰子 24 次至少出现一次双 6 点的机会是相等的，你认为如何？

13. 将 15 名学生(其中有 3 名优秀生)随机地分配到三个班级中，其中一班 4 名、二班 5 名、三班 6 名，求：

(1)每一个班级各分配到 1 名优秀生的概率；

(2)3 名优秀生被分配到一个班级的概率.

14. 一个袋子中装有 $a+b$ 个球，其中 a 个黑球、b 个白球，任意地每次从中取出一个球(不放回)，求下列各事件的概率：

(1)第 i 次取到的是黑球；

(2)第 i 次才取到黑球.

15. 有 n 个球，每个球都等可能地被放到 N 个不同盒子中的任一个，每个盒子所放球数不限，试求：

(1)指定的 $n(n\leqslant N)$个盒子中各有一球的概率 $P(A)$；

(2)恰好有 $n(n\leqslant N)$个盒子中各有一球的概率 $P(B)$.

16. 从 1，2，…，9 中任取 1 个数，取后放回，先后取出 5 个数，求下列事件的概率：

(1)“最后取出的数字是奇数”；

(2)“5 个数字全不同”；

(3)“1 恰好出现 2 次”；

(4)“1 至少出现 2 次”；

(5)“恰好出现不同的 2 对数字”；

(6)“总和为 10”.

17. 在一个有 n 个人参加的晚会上，每个人都带了一件礼物，且假定每个人带的礼物均不相同. 晚会期间各人从放在一起的 n 个礼物中随机地抽取一件，求至少有一个人抽到自己的礼物的概率.

18. 从 5 双不同的鞋子中任取 4 只，求这 4 只鞋子中至少有 2 只能配成 1 双的概率.

19. 在 500 km^2 的海域里有面积达 40 km^2 的大陆架藏着石油. 在此海域里任选一点钻探，求钻到石油的概率.

20. 一个家庭有两个小孩，问：该家庭在有一个女孩的条件下，另一个也是女孩的概率是多少？

21. 设某光学仪器厂制造的透镜，第一次落下时被打破的概率为$\frac{1}{2}$；若第一次落下未被打破，第二次落下时被打破的概率为$\frac{7}{10}$；若前两次落下都未被打破，第三次落下时被打破的概率为$\frac{9}{10}$. 试求透镜落下三次而未被打破的概率.
22. 播种用的一等小麦种子中混有5%的二等种子和10%的三等种子，这三个等级的种子长出的穗含有50颗以上麦粒的概率分别为0.90，0.80和0.65. 求这批种子任选一粒，长出的穗含有50颗以上麦粒的概率.
23. 甲袋中有6个红球和4个白球，乙袋中有12个红球和8个白球，现从两袋子中任选一个袋子，然后采用不放回的方式连续取2个球，求第一次取到白球的概率.
24. 某彩票每周开奖一次，每次提供十万分之一的中奖机会，且各周开奖是相互独立的. 某彩民每周买一次彩票，坚持十年(每年52周)，那么他从未中奖的可能性是多少?
25. A系与B系举行篮球、排球、足球比赛，篮球赛A胜B的概率为0.8，排球赛A胜B的概率为0.4，足球赛A胜B的概率为0.4，若在三项比赛中至少胜两项才算获胜，试计算哪个系获胜的概率较大.
26. 对以往数据分析结果表明，当机器调试良好时，产品的合格率为98%；而当机器发生某种故障时，其合格率为55%. 每天早上机器开动时，机器调试良好的概率为95%，试求已知某日早上第一件产品是合格时，机器调试良好的概率.
27. 有两箱零件，第一箱装50件，其中有10件一等品；第二箱装30件，其中有18件一等品，现从两箱中随意挑出一箱，然后从该箱中任取2个零件，试求：

    (1)第一次取出的零件是一等品的概率；

    (2)在第一次取出的是一等品的条件下，第二次取出的仍是一等品的概率.
28. 假设每个人的血清中含有肝炎病毒的概率为0.4%，将100人的血清混合在一起，求此血清中含有肝炎病毒的概率.
29. 一猎人用猎枪射击一只兔子，第一枪距离兔子200 m远；如果未击中，他追到离兔子150 m远处进行第二次射击；如果仍未击中，他追到离兔子100 m远处再进行第三次射击，此时击中的概率为$\frac{1}{2}$. 假设这个猎人射击的命中率与他离兔子的距离的平方成反比，求猎人击中兔子的概率.
30. 根据临床记录，某种诊断癌症的试验有如下的效果：若记$A=\{$试验反应为阳性$\}$，$C=\{$被诊断者患有癌症$\}$，则有$P(A\mid C)=0.95$，$P(\bar{A}\mid\bar{C})=0.95$. 现在对自然人群进行普查，设被试验的人患有癌症的概率为0.005，即$P(C)=0.005$，试求$P(C\mid A)$.
31. 一个人的血型为A，B，AB，O型的概率分别为0.37，0.21，0.08，0.34. 现任意挑选四个人，试求：

    (1)此四人的血型全不相同的概率；

    (2)此四人的血型全部相同的概率.
32. 甲、乙两选手进行乒乓球单打比赛，已知在每局中甲胜的概率为0.6，乙胜的概率为0.4，比赛可采用三局二胜制或五局三胜制，试问：哪一种比赛制度对甲更有利?

第二章
随机变量及其分布

在随机试验中，人们除对某些特定事件发生的概率感兴趣外，往往还关心某个与随机试验的结果相联系的变量．由于这一变量的取值依赖于随机试验结果，因而被称为随机变量．与普通的变量不同，对于随机变量，人们无法事先预知其确切取值，但可以研究其取值的统计规律性．本章将介绍两类随机变量及描述随机变量统计规律性的分布．

第一节　随机变量

我们发现在讨论随机事件及其概率时，随机试验的结果与数值有密切的关联：试验的结果可以用某些实数值加以刻画．许多随机试验的结果本身就是一个数值；虽然有些随机试验的结果不直接表现为数值，但可以将其数量化．

例 1　掷一质地均匀的骰子，向上一面的点数用 X 表示，则 X 的所有可能取值为 1，2，…，6，即

$$X=\begin{cases}1, & \text{出现 1 点},\\ 2, & \text{出现 2 点},\\ 3, & \text{出现 3 点},\\ 4, & \text{出现 4 点},\\ 5, & \text{出现 5 点},\\ 6, & \text{出现 6 点}.\end{cases}$$

显然，X 是一个变量，它取不同的数值表示试验的不同结果．例如 $\{X=2\}$ 就表示事件“出现 2 点”，这里 X 取 1，2，…，6 的概率相等，均为 $\frac{1}{6}$.

例 2　设袋中有 10 个同样大小的球，其中 3 个黑球、7 个白球．现从中任意摸出 2 个球，如果用 X 表示摸到黑球的数量，则 X 的可能取值为 0，1，2，即

$$X=\begin{cases}0, & \text{没有摸到黑球},\\ 1, & \text{摸到 1 个黑球},\\ 2, & \text{摸到 2 个黑球}.\end{cases}$$

显然 X 也是一个变量，它取不同的数值表示摸取的不同结果，且 X 是以一定概率取值的．例如 $\{X=2\}$ 就表示事件“摸到 2 个黑球”，且

$$P\{X=2\}=\frac{C_3^2}{C_{10}^2}=\frac{1}{15}.$$

例 3　抛一枚 1 角硬币，结果有两种：国徽向上或国徽向下．此结果不是直接由数量表示的，但如果我们令 $\{X=1\}$ 表示事件“国徽向上”，$\{X=0\}$ 表示事件“国徽向下”，即

$$X=\begin{cases}0, & \text{国徽向下},\\ 1, & \text{国徽向上},\end{cases}$$

则试验结果就与数值 0，1 相对应．

例 4 测试某批灯泡的寿命(单位：h)．若用 X 表示其寿命，则可为区间$[0, +\infty)$上的任意一个实数．显然 X 是一个变量，它取不同的数值表示测得寿命的不同结果．例如$\{50\leqslant X\leqslant 100\}$表示事件“被测试的灯泡寿命在 50 h 到 100 h 之间”．

从以上的例子可以看出，变量 X 的取值总是与随机试验的结果相对应，即 X 的取值随试验结果的不同而不同．由于试验的各种结果具有随机性，因此 X 的取值也具有一定的随机性.

定义 2.1 设随机试验 E，它的样本空间 $\Omega=\{\omega\}$. 若对任一 $\omega\in\Omega$，都有实数 $X(\omega)$与之对应，则称 $X(\omega)$为**随机变量**，简记为 X.

引进随机变量后，随机事件就可以表示为随机变量在某一范围内的取值，例如，在掷骰子实验中{恰出现 5 点}表示为$\{X=5\}$，{出现的点数不少于 3}表示为$\{X\geqslant 3\}$.

随机变量分为离散型和非离散型两大类．离散型随机变量是指其所有可能取值为有限个或可列无穷多个随机变量．非离散型随机变量是对除离散型随机变量以外的所有随机变量的总称，范围很广，而其中最重要且应用最广泛的是连续型随机变量.

第二节 离散型随机变量

一、离散型随机变量的概率分布

定义 2.2 如果随机变量 X 只能取有限个或可列无穷多个数值，则称 X 为**离散型随机变量**.

要掌握一个随机变量的统计规律，不但要知道它都可能会取什么值，更重要的是知道它取每一个值的概率是多少.

定义 2.3 设 $x_k(k=1, 2, \cdots)$为离散型随机变量 X 所有可能取值，$p_k(k=1, 2, \cdots)$是 X 取值 x_k 时相应的概率，即

$$P\{X=x_k\}=p_k \quad (k=1, 2, \cdots). \tag{2-1}$$

式(2-1) 叫作**离散型随机变量 X 的概率分布**，其中 $p_k\geqslant 0$ 且 $\sum p_k=1$.

离散型随机变量 X 的概率分布也可以用表 2-1 的形式来表示，称其为**离散型随机变量 X 的分布律**．

表 2-1

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_k	$\cdots$
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_k	$\cdots$

例 1 某男生投篮的命中率为 0.8，现在他不停地投篮，直到投中为止，求投篮次数 X 的概率分布．

【解】 显然当 $X=1$ 时，$p_1=0.8$.

当 $X=2$ 时，意味着第一次投篮未中，而第二次命中．由于两次投篮是相互独立的，故

$$p_2=0.2\times 0.8=0.16;$$

当 $X=k$ 时，则前 $k-1$ 次均未投中，故

$$p_k=0.2^{k-1}\times 0.8;$$

于是 X 的概率分布为

$$P\{X=k\}=p_k=0.2^{k-1}\times 0.8 \quad (k=1,2,\cdots).$$

二、几种常见的离散型随机变量的概率分布

1. 两点分布(0-1 分布)

如果随机变量 X 只取 0，1 两个值，即

$$X=\begin{cases}0, & \text{事件 } A \text{ 不发生},\\ 1, & \text{事件 } A \text{ 发生}.\end{cases}$$

其分布律如表 2-2 所示．

表 2-2

X	0	1
P	q	p

其中 $0<p<1$，$q=1-p$，则称 X 服从参数为 p 的两点分布或 0-1 分布，记为 $X\sim B(1,p)$.

例 2　一批产品共 100 件，其中有 3 件次品．现从这批产品中任取一件，以 X 表示“取到的次品数”，即

$$X=\begin{cases}0, & \text{取到正品},\\ 1, & \text{取到次品}.\end{cases}$$

求 X 的分布律．

【解】　因为

$$P\{X=0\}=\frac{C_{97}^1}{C_{100}^1}=\frac{97}{100},$$

$$P\{X=1\}=\frac{C_3^1}{C_{100}^1}=\frac{3}{100}.$$

所以 X 的分布律如表 2-3 所示．

表 2-3

X	0	1
P	97/100	3/100

两点分布是简单且又经常遇到的一种分布，一次试验只可能出现两种结果时，便确定一个服从两点分布的随机变量．如检验产品是否合格、电路是通路还是断路、新生儿的性别、系统运行是否正常等，相应的结果均服从两点分布.

2. 二项分布

如果随机变量 X 为 n 重伯努利试验中事件 A 发生的次数，则 X 的可能取值为 0，1，…，n，在 n 次试验中 A 发生 k 次的概率为

$$p_k=P\{X=k\}=C_n^k p^k q^{n-k}.$$

显然 $p_k\geqslant 0$，且 $\sum\limits_{k=0}^{n}p_k=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k p^k q^{n-k}=(p+q)^n=1.$

如果随机变量 X 的概率分布为

$$P\{X=k\}=C_n^k p^k q^{n-k} \quad (k=0, 1, 2, \cdots, n), \tag{2-2}$$

其中 $0<p<1$，$q=1-p$，则称 X 服从参数为 n，p 的二项分布，记作 $X\sim B(n, p)$.

特别地，当 $n=1$ 时的二项分布就是两点分布．

例 3　某大楼有两部电梯，每部电梯因故障不能使用的概率均为 0.02. 设某时不能使用的电梯数为 X，求 X 的分布律．

【解】　因为 $X\sim B(2, 0.02)$，所以

$$P\{X=k\}=C_2^k\cdot 0.02^k\cdot(1-0.02)^{2-k} \quad (k=0, 1, 2).$$

于是 X 的分布律如表 2-4 所示.

表 2-4

X	0	1	2
P	0.960 4	0.039 2	0.000 4

例 4　某人独立射击 10 次，每次命中率为 0.8，求命中次数 X 的分布律．

【解】　X 的可能取值为 0，1，2，…，10，$P\{X=k\}=C_{10}^k 0.8^k 0.2^{10-k}$，$k=0, 1, 2, \cdots, 10$.
由结果可看出，随机变量 $X\sim B(10, 0.8)$.

3. 泊松(Poisson)分布

如果随机变量 X 的概率分布为

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \quad (k=0, 1, 2, \cdots), \tag{2-3}$$

其中 $\lambda>0$，则称 X 服从参数为 λ 的泊松分布，记为 $X\sim P(\lambda)$.

泊松分布常见于“稠密性”问题，在实际生活中已发现许多取值为非负整数的随机变量都服从泊松分布．例如，在一定时间内，在某随机服务设施得到服务的服务对象的数目[如电话交换台收到的呼叫次数、网站收到的点击数、柜台前到达的顾客人数、车站候车的旅客人数、机场降落(起飞)的飞机数、交叉路口通过的车辆数等]；在一定时间或其他某量度范围内，发生错误、故障、事故等的次数(如单位面积布面上的疵点数、零件铸造表面上一定大小的面积内砂眼的个数、某段时间内某工厂发生的事故数、某段时间内打字员打错的字数、书中每页上的印刷错误等)；放射性物质在一定时间内放射的粒子数等．

例 5　某城市每天发生火灾的次数 X 服从参数为 $\lambda=0.8$ 的泊松分布，求该城市一天内发生火灾的次数大于等于 3 的概率．

【解】　由概率的性质知

$$\begin{aligned}P\{X\geqslant 3\}&=1-P\{X<3\}=1-P\{X=0\}-P\{X=1\}-P\{X=2\}\\&=1-e^{-0.8}\left(1+\frac{0.8^1}{1!}+\frac{0.8^2}{2!}\right)\approx 0.0474.\end{aligned}$$

例 6　设随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布，且已知 $P\{X=1\}=P\{X=2\}$，试求：

(1) 参数 λ；

(2) $P\{X=3\}$.

【解】 (1) 因为 $X\sim P(\lambda)$，由 $P\{X=1\}=P\{X=2\}$，知有$\frac{\lambda e^{-\lambda}}{1!}=\frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!}$，所以得 $\lambda=2$.

(2) $P\{X=3\}=\frac{2^3 e^{-2}}{3!}=\frac{4e^{-2}}{3}\approx 0.1804$.

定理 2.1(泊松定理) 设随机变量 $X_n(n=1,2,\cdots)$服从参数为 n，p_n 的二项分布，即有

$$P\{X_n=k\}=C_n^k p_n^k(1-p_n)^{n-k},\ k=0,1,2,\cdots,n,$$

若$\lim\limits_{n\to\infty} np_n=\lambda>0$，则有

$$\lim_{n\to\infty}P\{X_n=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}.$$

证明 记 $\lambda_n=np_n$，则

$$\begin{aligned}P\{X_n=k\}&=C_n^k p_n^k(1-p_n)^{n-k}\\&=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\left(\frac{\lambda_n}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k},\\&=\frac{\lambda_n^k}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k}\end{aligned}$$

对固定的 k 有

$$\lim_{n\to\infty}\lambda_n^k=\lambda^k,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{-\frac{n}{\lambda_n}}\right]^{(-\lambda_n)\cdot\frac{n-k}{n}}=e^{-\lambda},$$

及

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)=1,$$

故有

$$\lim_{n\to\infty}P\{X_n=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}.$$

显然，定理的条件$\lim\limits_{n\to\infty}np_n=\lambda$(常数)意味着当 n 很大时，p_n 必定很小．因此，泊松定理表明当 n 很大、p 很小时有以下近似式

$$C_n^k p^k(1-p)^{n-k}\approx\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},\tag{2-4}$$

其中 $\lambda=np$.

实际计算时，若 $X\sim B(n,p)$，当 $n\geqslant 10$，$p\leqslant 0.1$ 时，均可以用泊松分布近似计算其概率；当 $n\geqslant 100$ 且 $np\leqslant 10$ 时效果更佳．

例 7 在参加人寿保险的某一年龄组中，每人每年死亡的概率为 0.005. 现有属于这一年龄组的 2 000 人参加了人寿保险．试求在未来一年里，投保者中：

(1)恰有 15 人死亡的概率；

(2)死亡人数不低于 1 人的概率．

【解】 设 X 表示未来一年里，2 000 名投保者中死亡的人数，则 $X\sim B(2\,000,0.005)$.

(1) 恰有 15 人死亡的概率为

$$P\{X=15\}=b(15;2\,000,0.005).$$

因为 $n=2\,000$，$p=0.005$，所以根据泊松定理，X 近似服从参数为$\lambda=np=10$ 的泊松分布．从而

$$P\{X=15\}\approx\sum_{k=0}^{15}\frac{10^k e^{-10}}{k!}-\sum_{k=0}^{14}\frac{10^k e^{-10}}{k!}=0.951\ 3-0.916\ 5=0.034\ 8.$$

(2) 同理可得，死亡人数不低于 1 人的概率为

$$P\{X\geqslant 1\}=1-P\{X=0\}=1-C_{2\ 000}^{0}\cdot 0.005)^0\cdot 0.995^{2\ 000}\approx 1-e^{-10}\approx 1.$$

二项分布的泊松近似常常应用于稀有事件的概率计算，所谓稀有事件即小概率事件．小概率事件在一次试验中发生的概率 p 很小，但当独立重复试验的次数 n 很大时，小概率事件的发生几乎是可以肯定的．如例 7，虽然投保者中每个人死亡率很小，但如果参加投保的人数相当多，那么这一年中有人死亡(即死亡人数不少于 1 人)是可以肯定的．因此在实际工作中决不能轻视小概率事件.

4. 几何分布

定义 2.4 如果随机变量 X 的概率分布为

$$P\{X=k\}=p(1-p)^{k-1}\quad (k=1,2,\cdots), \tag{2-5}$$

则称 X 服从参数为 p 的**几何分布**，记为 $X\sim G(p)$.

几何分布描述如下概型：在事件 A 发生的概率为 p 的多重伯努利试验中，若以 X 表示 A 首次发生时的试验次数，则 X 服从参数为 p 的几何分布．例如，接连对同一目标进行射击，首次命中目标所需射击的次数；自动生产线上首次出现不合格品时已生产产品的件数；一次一次地进行随机抽样，首次抽到具有某种特征的元素所需抽样的次数等，都服从几何分布．

例 8 某射手向某目标射击，命中率为 0.8. 现连续射击直到击中为止，求射击次数 X 的分布.

【解】 X 的可能取值为 1，2，3，…，用 A_k 表示"该射手第 k 次命中"这一事件，$k=1,2,\cdots$，则

$$P\{X=k\}=P(\overline{A_1}\ \overline{A_2}\cdots\overline{A}_{k-1}A_k)=0.2^{k-1}0.8,\ k=1,2,\cdots.$$

5. 超几何分布

定义 2.5 如果随机变量 X 的分布概率为

$$P\{X=k\}=\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}\quad (k=0,1,\cdots,l), \tag{2-6}$$

式中 n，M，N 皆为正整数，且 $M<N$，$n\leqslant N$，$l=\min(M,n)$，则称 X 为服从参数为 n，M，N 的**超几何分布**，记为 $X\sim H(n,M,N)$.

比较等式 $(1+x)^M(1+x)^{N-M}=(1+x)^N$ 两端 x^n 的系数，可得等式 $\sum_{k=0}^{n}C_M^kC_{N-M}^{n-k}=C_N^n$，从而得知 $\sum_{k=0}^{n}P\{X=k\}=1$.

超几何分布在产品质量的检验和控制等问题中大有用处．在产品抽样检验中，二项分布是用来描述有放回的抽样，而超几何分布是用来描述无放回的抽样．虽然两者抽样方式不同，但可以证明：当产品总数 N 很大，抽检的产品数 n 又不太大时，超几何分布可以用二项分布近似代替，即有 $\frac{C_M^kC_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}\approx C_n^kp^k(1-p)^{n-k}$ $(k=0,1,\cdots,n)$，其中 $p=\frac{M}{N}$. 因此，在实际工作中产品抽样检验多采用无放回抽样．

例 9 已知一批产品共 200 件，其中有 4 件次品．现抽取 5 件进行检查，试求其中次品不多于 1 件的概率．

【解】 设 X 表示抽出的 5 件产品中的次品数，则 $X\sim H(5,4,200)$，于是所求概率为

$$P\{X\leqslant 1\}=P\{X=0\}+P\{X=1\}=\frac{C_4^0C_{196}^5+C_4^1C_{196}^4}{C_{200}^5}\approx 0.9970.$$

例 9 中是从 200 件产品(很多)中抽取 5 件(相对很少)，因此也可以考虑利用二项分布进行近似计算．这时，自然应取次品率 $p=\frac{4}{200}=0.02$，近似视 $X\sim B(5, 0.02)$．这样，所求概率就是 $P\{X\leqslant 1\}=C_5^0 0.02\times 0.98^5+C_5^1 0.02\times 0.98^4\approx 0.9962$．这与按超几何分布计算的结果相差无几，而计算则简便许多．一般认为当 $\frac{n}{N}\leqslant 0.1$ 时，就可以用二项分布近似代替超几何分布．

第三节　随机变量的分布函数

前文用分布律描述了离散型随机变量的概率分布．为了描述一般随机变量(离散型和非离散型)的概率分布，我们引入分布函数的概念．分布函数是随机变量最重要的概率特征，分布函数可以完整地描述随机变量的统计规律，并且决定随机变量的一切其他概率特征．

一、分布函数的定义

定义 2.6　设 X 是一个随机变量，对任何实数 x，令

$$F(x)=P\{X\leqslant x\}\quad(-\infty<x<\infty),$$

称 $F(x)$ 是随机变量 X 的**分布函数**，也称为**累积分布函数**．

分布函数以全体实数为定义域，以事件 $\{X\leqslant x\}$ 的概率为函数值，从而得出分布函数是一个普通的函数．

由概率的性质及分布函数的定义易知，对任意实数 $x_1<x_2$，有

$$P\{x_1<X\leqslant x_2\}=P\{X\leqslant x_2\}-P\{X\leqslant x_1\}=F(x_2)-F(x_1),$$

因此，若已知分布函数，我们就可以知道 X 落在任一区间 $(x_1, x_2]$ 内的概率，从这个意义上说，分布函数完整地描述了随机变量的统计规律性．如果将 X 看作数轴上随机点的坐标，那么分布函数 $F(x)$ 在点 x 处的值就表示 X 落在区间 $(-\infty, x]$ 上的概率．

分布函数 $F(x)$ 具有下述性质．

(1)(单调不减性)　若 $x_1<x_2$，则

$$F(x_1)\leqslant F(x_2).$$

事实上，$F(x_2)-F(x_1)=P\{x_1<X\leqslant x_2\}\geqslant 0$，$x_1<x_2$．

(2)(有界性)　$0\leqslant F(x)\leqslant 1$，且

$$F(-\infty)=\lim_{x\to-\infty}F(x)=0,$$

$$F(+\infty)=\lim_{x\to+\infty}F(x)=1.$$

据分布函数的定义即知 $0\leqslant F(x)\leqslant 1$；对后两式只给出直观解释，由于 $F(-\infty)$ 相当于事件 $P\{X<-\infty\}$ 的概率，而 $\{X<-\infty\}$ 是不可能事件，故有 $F(-\infty)=0$．类似地，$P\{X<+\infty\}$ 是必然事件，故有 $F(+\infty)=1$．

(3)(右连续性)　$F(x+0)=F(x)$．(证明略)

二、离散型随机变量的分布函数

设离散型随机变量 X 的分布律为

$$P\{X=x_k\}=p_k,\ k=1,\ 2,\ \cdots,$$

则由概率的可列可加性得 X 的分布函数为

$$F(x)=P\{X\leqslant x\}=\sum_{x_k\leqslant x}P\{X=x_k\},$$

即

$$F(x)=\sum_{x_k\leqslant x}p_k.$$

其中和式是对满足 $x_k\leqslant x$ 的一切 k 求和．离散型随机变量的分布函数是分段函数，$F(x)$的间断点就是离散型随机变量 X 的各可能取值点，并且在其间断点处右连续．离散型随机变量 X 的分布函数 $F(x)$的图形是阶梯形曲线．$F(x)$在 X 的一切有(正)概率的点 x_k，皆有一个跳跃，其跃度正好为 X 取值 x_k 的概率 p_k，而在分布函数 $F(x)$的任何一个连续点 x 上，X 取值 x 的概率皆为零.

离散型随机变量的分布律和它的分布函数是相互唯一决定的．它们皆可以用来描述离散型随机变量的统计规律性，但分布律比分布函数更直观简明，处理更方便．因此，一般是用分布律(概率函数)而不是分布函数来描述离散型随机变量的．

例 1　设随机变量 X 的分布律如表 2-5 所示．

表 2-5

X	-2	0	3
p	0.2	0.3	0.5

试求：(1)X 的分布函数 $F(x)$，并作图；(2)$P\{X\leqslant-1.5\}$，$P\{0<X\leqslant2.5\}$，$P\{0\leqslant X\leqslant2.5\}$.

【解】　(1)因为随机变量 X 的 3 个取值点将 $F(x)$的定义域$(-\infty,\ \infty)$分成四个区间，所以必须逐段讨论．

当 $x<-2$ 时，由于 X 不在$(-\infty,\ x]$内取值，故 $F(x)=P\{X\leqslant x\}=0$；

当 $-2\leqslant x<0$ 时，由于 X 只有一个可能值 $x_1=-2$ 落在区间$(-\infty,\ x]$内，所以 $F(x)=P\{X\leqslant x\}=P\{X=-2\}=0.2$；

同理，当 $0\leqslant x<3$ 时，$F(x)=P\{X\leqslant x\}=P\{X=-2\}+P\{X=0\}=0.5$；

当 $x\geqslant3$ 时，$F(x)=P\{X\leqslant x\}=P\{X=-2\}+P\{X=0\}+P\{X=3\}=1.$

综上所述，X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-2,\\ 0.2, & -2\leqslant x<0,\\ 0.5, & 0\leqslant x<3,\\ 1, & x\geqslant3.\end{cases}$$

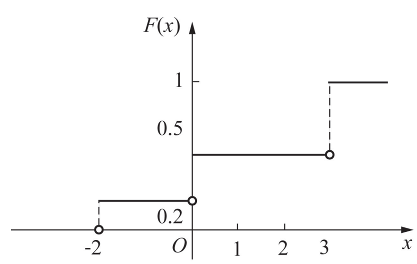

图 2-1

$F(x)$的图形如图 2-1 所示．

(2) 由分布函数的定义，可知

$$P\{X\leqslant-1.5\}=F(-1.5)=0.2,$$

$$P\{0<X\leqslant2.5\}=F(2.5)-F(0)=0.5-0.5=0,$$

$$P\{0\leqslant X\leqslant2.5\}=F(2.5)-F(0)+P\{X=0\}=0.5-0.5+0.3=0.3.$$

例 2　设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ 0.4, & -1\leqslant x<1,\\ 0.8, & 1\leqslant x<3,\\ 1, & x\geqslant 3,\end{cases}$$

试求随机变量 X 的分布律.

【解】 $F(x)$为一阶梯状函数，X 的可能取值点为 $F(x)$的跳跃点-1，1，3. 由此可得

$$P\{X=-1\}=F(-1)-F(-1-0)=0.4-0=0.4,$$
$$P\{X=1\}=F(1)-F(1-0)=0.8-0.4=0.4,$$
$$P\{X=3\}=F(3)-F(3-0)=1-0.8=0.2.$$

即随机变量 X 的分布律如表 2-6 所示.

表 2-6

X	-1	1	3
P	0.4	0.4	0.2

第四节　连续型随机变量

一、连续型随机变量及其密度函数

除了离散型随机变量外，人们比较关心的另一类随机变量是连续型随机变量，这种变量 X 可以取某个区间上的所有值．这时考察 X 取某个值的概率往往意义不大，人们往往考察 X 在此区间上的某一子区间取值的概率．例如打靶时，人们并不想知道某个射手击中靶上某一点的概率，而是希望知道他击中某一环的概率．若把弹着点和靶心的距离看成随机变量 X，则击中某一环即表示 X 在此环所对应的区间内取值，于是，人们所讨论的问题就变成了求概率 $P(a<X\leqslant b)$的问题.

定义 2.7　对于随机变量 X，如果存在非负可积函数 $f(x)(-\infty<x<+\infty)$，对于任意的实数 a，b $(a<b)$，有

$$P\{a<X\leqslant b\}=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x, \tag{2-7}$$

则称 X 为连续型随机变量，$f(x)$称为 X 的概率密度函数，简称概率密度或密度函数．有时也可用其他函数符号如 $p(x)$等表示.

如果 $f(x)$是随机变量 X 的密度函数，则必有以下性质：

(1) $f(x)\geqslant 0(-\infty<x<+\infty)$；

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=P\{-\infty<X<+\infty\}=1.$

如果给出了随机变量的概率密度，那么它在任何区间取值的概率就等于概率密度在这个区间上的定积分．在直角坐标系中画出的密度函数的图像，称为密度曲线．如图 2-2 所示，密度曲线位于 x 轴的上方，且密度曲线与 x 轴之间的面积恒为 1；X 落在任一区间$(a，b)$内取值的概率等于以该区间为底，以密度曲线为顶的曲边梯形的面积.

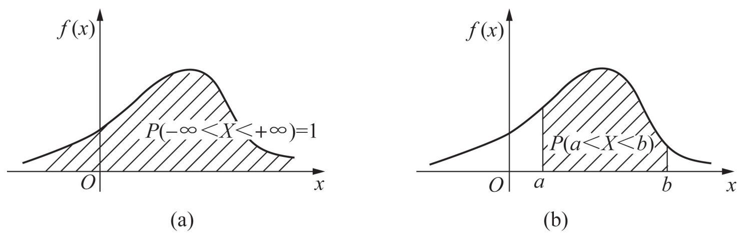

图 2-2

由式(2-7)及概率的性质可以推出 $P\{X=a\}=0$(a 为任一常数)，即连续型随机变量在某一点取值的概率为零，从而有

$$P\{a<X<b\}=P\{a<X\leqslant b\}=P\{a\leqslant X<b\}$$
$$=P\{a\leqslant X\leqslant b\}=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

即区间端点对求连续型随机变量的概率没有影响.

概率密度 $f(x)$不表示随机变量 X 取值为 x 的概率，而是表示随机变量 X 在点 x 附近取值的密集程度，就像线密度一样，某一点的线密度并不代表物质在这一点的质量.

例 1 设某连续型随机变量的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}k(4x-2x^2), & 0<x<2,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

求：(1)常数 k；(2) $P\{1<X<2\}$；(3)$P\{X>1\}$.

【解】 (1) 根据密度函数性质有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^2 k(4x-2x^2)\mathrm{d}x=k\left(2x^2-\frac{2}{3}x^3\right)\bigg|_0^2=\frac{8}{3}k=1,$$

解得

$$k=\frac{3}{8};$$

(2) $P\{1<X<2\}=\int_1^2\frac{3}{8}(4x-2x^2)\mathrm{d}x=\frac{3}{8}\left(2x^2-\frac{2}{3}x^3\right)\bigg|_1^2=\frac{1}{2}$;

(3) $P\{X>1\}=\int_1^{+\infty}\frac{3}{8}(4x-2x^2)\mathrm{d}x=\int_1^2\frac{3}{8}(4x-2x^2)\mathrm{d}x+\int_2^{+\infty}0\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$.

例 2 设连续型随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}A+B\mathrm{e}^{-3x}, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$

试求：(1) 系数 A，B；(2) $P\{-1\leqslant X\leqslant 2\}$；(3) X 的概率密度 $f(x)$.

【解】 (1) 由分布函数的性质，有 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(A+B\mathrm{e}^{-3x})=A=1$；又因为连续型随机变量的分布函数是连续函数，从而应有

$$\lim_{x\to 0^+}F(x)=\lim_{x\to 0^+}(A+B\mathrm{e}^{-3x})=A+B=F(0),\lim_{x\to 0^-}F(x)=0,$$

则 $A+B=0$，

得 $B=-A=-1$，于是 $F(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-3x}, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0;\end{cases}$

(2) $P\{-1\leqslant X\leqslant 2\}=F(2)-F(-1)=1-\mathrm{e}^{-3\times 2}-0=1-\mathrm{e}^{-6}$;

（3）根据 $P\{a<x\leqslant b\}=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，有 $f(x)=F'(x)=\begin{cases}3\mathrm{e}^{-3x}, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$

二、几种常用的连续型随机变量的分布

1. 均匀分布

如果连续型随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\leqslant x\leqslant b,\\ 0, & \text{其他},\end{cases} \tag{2-8}$$

式中，$a<b$ 为有限数，则称 X 在区间 $[a, b]$ 上服从**均匀分布**，记为 $X\sim U[a, b]$.

容易验证：$f(x)$ 满足概率密度的两条性质．由连续型随机变量的定义，可以求得 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<a,\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\leqslant x<b,\\ 1, & x\geqslant b.\end{cases}$$

$f(x)$ 与 $F(x)$ 的图形如图 2-3 所示.

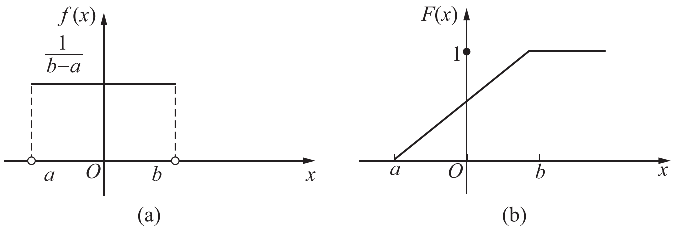

图 2-3

易见，对于在区间 $[a, b]$ 上均匀分布的随机变量，X 落在任一长度为 l 的子区间 (c, d) $(a\leqslant c<d\leqslant b)$ 上的概率为

$$\int_c^d f(x)\mathrm{d}x=\int_c^d \frac{1}{b-a}\mathrm{d}x=\frac{d-c}{b-a}=\frac{l}{b-a}.$$

该概率与子区间的长度成正比，而与子区间的起始点无关．

例 3　设某一时间段内的任意时刻，乘客到达公共汽车站是等可能的．若每隔 3 min 来一趟车，则乘客等车时间 X 服从均匀分布．试求 X 的概率密度及等车时间不超过 2 min 的概率．

【解】　因为 $X\sim U[0, 3]$，所以 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}, & 0\leqslant x\leqslant 3,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

等车时间不超过 2 min 的概率为

$$P\{0\leqslant X\leqslant 2\}=\int_0^2 \frac{1}{3}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}.$$

2. 指数分布

如果连续型随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0\end{cases}\quad(\lambda>0),$$

则称 X 服从参数为 λ 的**指数分布**，记作 $X\sim E(\lambda)$.

指数分布常常作为各种“寿命”分布的近似描述．例如，某些产品(如电子元件等)的使用寿命、人或动物的寿命，某生产系统接连两次故障之间的时间间隔等．一些随机服务系统中，“等待服务的时间”也常服从指数分布．例如，电话的通话时间，机场的一条跑道等待一次飞机起飞或降落的时间，某网站等待一次点击的时间，顾客在柜台前、银行窗口前等待服务的时间等．指数分布在可靠性理论和排队论等领域也有着广泛的应用．

例 4　已知某种机器无故障工作时间 X(单位：h)服从参数为 $\frac{1}{2\ 000}$ 的指数分布．

(1) 试求机器无故障工作时间在 1 000 h 以上的概率；

(2)如果某机器已经无故障工作了 500 h，试求该机器能继续无故障工作 1 000 h 的概率．

【解】　(1) 因 $X\sim E\left(\frac{1}{2\ 000}\right)$，则 X 的分布函数为 $F(x)=1-e^{-\frac{x}{2\ 000}}(x>0)$，从而

$$P\{X>1\ 000\}=1-P\{X\leqslant 1\ 000\}=1-(1-e^{-\frac{1\ 000}{2\ 000}})=e^{-\frac{1}{2}};$$

(2) $$P\{X>500+1\ 000\mid X>500\}=\frac{P\{X>1\ 500,\ X>500\}}{P\{X>500\}}=\frac{P\{X>1\ 500\}}{P\{X>500\}}$$

$$=\frac{1-P\{X\leqslant 1\ 500\}}{1-P\{X\leqslant 500\}}=\frac{e^{-\frac{3}{4}}}{e^{-\frac{1}{4}}}=e^{-\frac{1}{2}}.$$

3. 正态分布

如果连续型随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\quad(-\infty<x<+\infty,\ -\infty<\mu<+\infty),$$

其中 $\sigma>0$ 为常数，则称 X 服从以 μ，σ^2 为参数的正态分布，记作 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$.

特别地，当 $\mu=0$，$\sigma=1$ 时，称 X 服从**标准正态分布**，并分别以 $\varphi(x)$ 及 $\Phi(x)$ 记标准正态分布的密度函数和分布函数.

正态分布是概率论中最重要的一种分布，因为它是实际中最常见的一种分布．理论上已证明，如果某个数量指标的随机性是由很多相对独立的随机因素影响的结果，而每个随机因素的影响都不大，这时该数量指标就服从正态分布．例如测量误差，人的身高、体重，产品的质量指标(如尺寸、强度)，农作物的收获量等都服从或近似地服从正态分布.

正态密度函数 $f(x)$ 的图形(见图 2-4)具有下述特点：

(1) 以直线 $x=\mu$ 为对称轴，并在 $x=\mu$ 处有最大值 $f(\mu)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$；

(2) 在 $x=\mu\pm\sigma$ 处各有一个拐点；

(3) 当 $x\to\pm\infty$ 时，以 x 轴为渐近线；

(4) 当固定 σ 而变动 μ 时，图形形状不变地沿 x 轴平行移动(见图 2-5)．当固定 μ 而变动 σ 时，随着 σ 的变大，图形的高度下降，形状变得平坦；随着 σ 的变小，图形的高度上升，形状变得陡峭(见图 2-6).

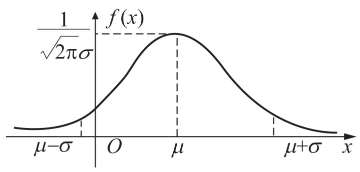

图 2-4

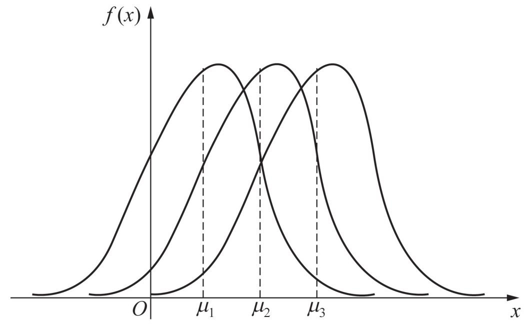

图 2-5

若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，则 X 的分布函数为

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt, \tag{2-9}$$

其图形如图 2-7 所示.

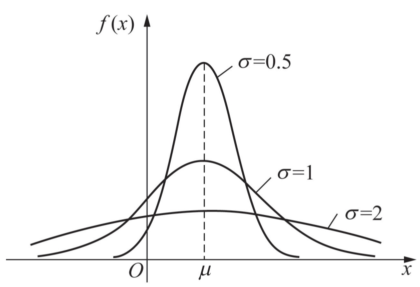

图 2-6

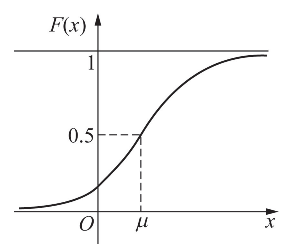

图 2-7

对于标准正态分布函数

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \tag{2-10}$$

的值，已编制成表可供查用(见附录 Ⅰ). 由于标准正态密度函数

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \tag{2-11}$$

的图形关于 y 轴对称，从而有

$$\begin{aligned}\Phi(-x)&=\int_{-\infty}^{-x}\varphi(t)dt=\int_{x}^{+\infty}\varphi(t)dt=\left(\int_{-\infty}^{x}+\int_{x}^{+\infty}-\int_{-\infty}^{x}\right)\varphi(t)dt\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)dt-\int_{-\infty}^{x}\varphi(t)dt=1-\Phi(x).\end{aligned} \tag{2-12}$$

一般正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 与标准正态分布 $N(0, 1)$ 有下述关系.

定理 2.2　设随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，分布函数设为 $F(x)$，则对每个 $x \in \mathbf{R}$，有

$$F(x)=\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right). \tag{2-13}$$

证明　由分布函数的定义可知，$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt$. 令 $\frac{t-\mu}{\sigma}=u$，得

$$F(x)=\int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}du=\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right).$$

由此可得以下推论：

推论 1 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，则

$$Y=\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0, 1). \tag{2-14}$$

推论 2 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，对每个 $a, b \in \mathbf{R}(a<b)$，有

$$P\{a<X \leqslant b\}=\Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right).$$

例 5 设 $X \sim N(0, 1)$，试求：(1) $P\{X \leqslant 1.96\}$；(2) $P\{|X| \leqslant 1.96\}$；(3) $P\{-1<X<2\}$.

【解】 由分布函数的定义知，$\Phi(x)=p\{X \leqslant x\}$的值是图 2-8(a)中所示阴影部分的面积．利用定积分与广义积分的几何意义以及 $\varphi(x)$的对称性来计算有关概率.

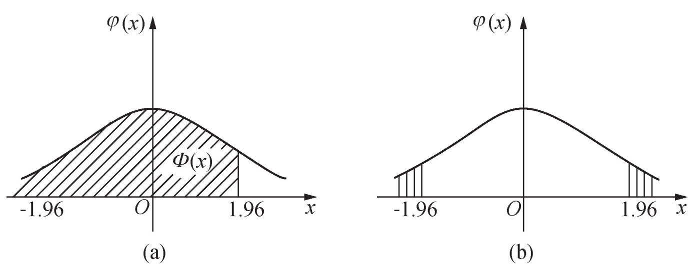

图 2-8

(1) $P\{X \leqslant 1.96\}=\Phi(1.96) \xlongequal{\text{查附表 I}} 0.975$；

(2) $P\{|X| \leqslant 1.96\}=2\Phi(1.96)-1=0.95$；

(3) $P\{-1<X<2\}=\Phi(2)-\Phi(-1)$

$$=\Phi(2)+\Phi(1)-1 \xlongequal{\text{查附表 I}} 0.977\ 25+0.841\ 3-1=0.818\ 55.$$

例 6 设 $X \sim N(1, 4)$，求 $P\{X \leqslant -3\}$，$P\{1<X<3\}$，$P\{|X|>1\}$.

【解】

$$P\{X \leqslant -3\}=\Phi\left(\frac{-3-1}{2}\right)=\Phi(-2)=1-\Phi(2)$$

$$\xlongequal{\text{查附录 I}} 1-0.977\ 2=0.022\ 8.$$

$$P\{1<X<3\}=\Phi\left(\frac{3-1}{2}\right)-\Phi\left(\frac{1-1}{2}\right)=\Phi(1)-\Phi(0)$$

$$=0.841\ 5-0.5=0.341\ 5.$$

$$P\{|X|>1\}=1-P\{|X| \leqslant 1\}=1-P\{-1 \leqslant X \leqslant 1\}$$

$$=1-\left[\Phi\left(\frac{1-1}{2}\right)-\Phi\left(\frac{-1-1}{2}\right)\right]$$

$$=1-\Phi(0)+\Phi(-1)=1-0.5+(1-0.841\ 5)=0.658\ 5.$$

例 7 设某地区成年男子的体重 X(单位：kg)服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$，已知 $P\{X \leqslant 65\}=\frac{1}{2}$，$P\{X<60\}=\frac{1}{4}$．试求：(1) μ，σ^2；(2) 从该地区任抽一名男子，其体重在 70～75 kg 的概率.

【解】 (1) 由 $P\{X \leqslant 65\}=\frac{1}{2}$，得 $\Phi\left(\frac{65-\mu}{\sigma}\right)=\frac{1}{2}$；从而，查附表 I 可得$\frac{65-\mu}{\sigma}=0$，即 $\mu=65$. 再由