离散数学

类目：数学类
书名：离散数学
主编：徐文华 徐畅凯
出版社：中国建设科技出版社
开本：大 16 开
书号：978-7-5160-4391-2
使用层次：通用
出版时间：2025 年 8 月
定价：48.00 元
印刷方式：双色
是否有资源：有

项目统筹：李亚博
责任编辑：汪永涛
封面设计：旗语书装

开门出书·创造价值
专·精·志·远
编辑部：010-63567684
事业发展中心：010-63567692
网上书店：www.jskjcbs.com

ISBN 978-7-5160-4391-2
定价：48.00元

数学类创新融合精品规划教材
“互联网+”教育改革新理念教材

离散数学

主编◎徐文华 徐畅凯

中国建设科技出版社有限责任公司
China Construction Science and Technology Press Co., Ltd.

数学类创新融合精品规划教材
"互联网+"教育改革新理念教材

离散数学

主　编 ◎ 徐文华　徐畅凯

中国建设科技出版社有限责任公司
China Construction Science and Technology Press Co., Ltd.
北　京

图书在版编目(CIP)数据

离散数学 / 徐文华，徐畅凯主编. -- 北京 ：中国建设科技出版社有限责任公司，2025. 8. --（数学类创新融合精品规划教材“互联网+”教育改革新理念教材）.
ISBN 978-7-5160-4391-2

Ⅰ. O158

中国国家版本馆 CIP 数据核字第 2025R6S259 号

离散数学
LISAN SHUXUE
徐文华　徐畅凯　主　编

出版发行：中国建设科技出版社有限责任公司
地　　址：北京市西城区白纸坊东街 2 号院 6 号楼
邮政编码：100054
经　　销：全国各地新华书店
印　　刷：唐山唐文印刷有限公司
开　　本：880mm×1230mm　1/16
印　　张：13. 5
字　　数：280 千字
版　　次：2025 年 8 月第 1 版
印　　次：2025 年 8 月第 1 次
定　　价：48. 00 元

本社网址：www. jskjcbs. com，微信公众号：zgjskjcbs
请选用正版图书，采购、销售盗版图书属违法行为

编　委　会

主　编　徐文华　徐畅凯

副主编　宋艳丽　刘　璐　张红梅　张博涵
　　　　　时洪宇　白忠玉　殷　羽

前言

PREFACE

在当今这个信息爆炸的时代，数学作为科学之母，其重要性不言而喻。它不仅是自然科学和工程技术的基础，也是社会科学、经济学、管理学等多个领域不可或缺的工具。然而，数学的深奥与抽象往往让初学者望而却步，如何使数学更加易于理解和应用，成为教育工作者和研究者们共同面临的课题。

本书内容

离散数学是计算机科学和数学领域的基础课程之一，关注离散的对象和结构，以及它们之间的关系和性质。本书共分为九章，内容涉及命题与命题公式、命题逻辑的推理理论、一阶逻辑、集合、关系和函数、代数系统基础、格与布尔代数、图、树及其应用。

本书特色

（1）综合性：本书涵盖多个重要的离散数学知识板块。从基础的命题与命题公式讲起，逐步深入各个领域的核心概念、定理和方法。

（2）理论与实践相结合：本书不仅介绍离散数学的核心理论、概念和定理，还将其与实际应用相结合。参考丰富的应用案例，读者能够将所学知识应用于计算机科学、数学和其他相关领域，以解决实际问题。

（3）清晰的讲解和逻辑结构：本书通过清晰的讲解和逻辑结构，帮助读者逐步理解和掌握离散数学的重要概念和方法。每章都以基本概念为起点，逐步引导读者深入学习，配有丰富的例题和练习，以加强读者对知识的理解和运用能力。

（4）强调问题解决能力培养：本书注重培养读者的问题解决能力和抽象推理能力。通过丰富的例题和练习，读者可以锻炼自己的分析和推理能力，学会运用离散数学的概念和方法解决实际问题。

本书的目标读者包括计算机科学和数学专业的学生，以及对离散数学感兴趣的自学者。无论是正在学习离散数学的新手，还是想深入了解离散数学的专业人士，都能从本书中获得全面而系统的知识。

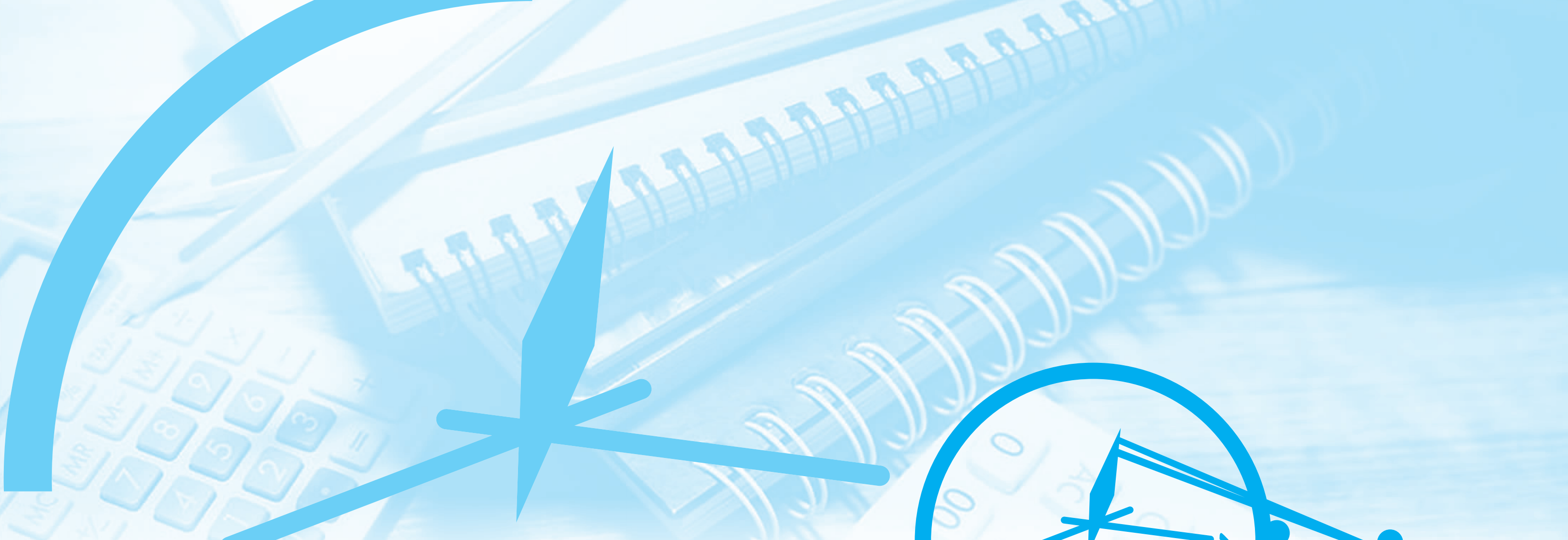
本书在编写过程中参考了国内外多种版本的离散数学教材和相关文献资料，从中汲取了许多好的思想，选取了不少有用的素材，在此一并向有关作者致谢。我们更期待着广大读者，特别是使用本书作为教材的老师和学生对本书的批评、指正、建议和评论。

编　者

2024 年 10 月

CONTENTS
目录

CONTENTS
目录



第一章　命题与命题公式

学习目标

知识目标

(1)理解命题的概念及其在数理逻辑中的作用.

(2)掌握命题的真值概念及其表示方法.

(3)了解简单命题(原子命题)与复合命题的区别.

(4)学习并理解基本的逻辑联结词(非、合取、析取、蕴含、等价)及其符号表示.

能力目标

(1)能够识别并区分陈述句中的命题和非命题.

(2)能够对给定的陈述句进行命题符号化.

(3)掌握如何使用逻辑联结词构建复合命题.

(4)能够分析并确定复合命题的真值.

素质目标

(1)培养严谨的逻辑思维能力和批判性思考的能力.

(2)提高分析问题和解决问题的能力.

(3)加强对逻辑推理重要性的认识,培养科学的思维方式.

(4)通过逻辑训练提高语言表达的精确性和条理性.

思政园地

在学习数理逻辑的过程中，学生不仅要掌握逻辑推理的基础知识，更重要的是，这些知识能够帮助学生培养严谨的思维习惯和正确的价值观念．逻辑思维不仅是科学研究的基础，还是日常生活决策的重要工具．通过学习逻辑推理，学生可以更好地辨别信息的真实性，从而做出合理的判断和选择，这对个人的成长和社会的发展都具有重要意义．

第一节　命题与命题联结词

推理是数理逻辑的主要研究内容，简单地说，推理是从前提出发，推出结论的逻辑思维过程．下面给出两个推理，从中寻找构成推理的最基本成分，即命题．

推理 1：若华盛顿是美国的首都，则多伦多是加拿大的首都．华盛顿是美国的首都，所以，多伦多是加拿大的首都．

推理 2：若今年是 2024 年，则明年是 2025 年．明年是 2025 年，所以今年是 2024 年．

现在先不讨论以上两个推理是否正确，主要讨论它们的组成成分．除了“若……则……”“所以”等联结词外，其余部分全是陈述语句，在这些陈述句中，“华盛顿是美国的首都”是真的，“多伦多是加拿大的首都”是假的．在今天（2024 年 1 月 31 日）说“今年是 2024 年”，“明年是 2025 年”，它们也都是真的．

从以上两个推理可以看出，构成推理的基本要素，除联结词外就是陈述句了．在数理逻辑中，称所表达的判断是真（正确）或假（错误）但不能可真可假的陈述句为命题，命题是推理的最基本的成分．在命题逻辑中，对命题的成分（如主语、谓语等）不再细分，也就是说命题是命题逻辑中最小的研究单位．

作为命题的陈述句所表达的判断结果称为命题的真值，真值只取两个值：真或假．真值为真的命题称为真命题，真值为假的命题称为假命题．任何命题的真值都是唯一的．

判断给定语句是否为命题，要分两步：首先判断它是否为陈述句，即先淘汰感叹句、祈使句、疑问句；其次判断它是否有唯一的真值，即不是可真可假的陈述句．概括起来可以这样说，陈述句是命题的必要条件，并不是充分条件．只有具有唯一真值的陈述句才是命题．

例 1.1　判断下列句子是否为命题．

（1）多伦多是加拿大的首都．

（2）$\sqrt{2}$ 是无理数．

（3）$x+2\geqslant 5$.

（4）火星上有生命．

（5）2050 年元旦北京是晴天．

（6）你会开车吗？

(7)请关上门!

(8)这个操场真大呀!

(9)我正在说谎话.

解　在上述9个句子中,首先找陈述句.(1)、(2)、(3)、(4)、(5)、(9)均为陈述句.在陈述句中再找具有唯一真值的陈述句,它们才是命题.

因为多伦多不是加拿大的首都,因而(1)为命题,并且是假命题.

因为$\sqrt{2}$确实是无理数,故(2)为真命题.

$x+2\geqslant 5$是陈述句,但它无确定的真值(当$x\geqslant 3$时,它为真;当$x\leqslant 2$时,它为假),故(3)不是命题.

(4)是命题.它有确定的真值,只是我们今天还不知道而已.

(5)也是命题,到2050年元旦它的真值就可确定了.

(9)虽然是陈述句,但它不是命题,原因是它既不能为真,也不能为假.若(9)的真值为真,即"我正在说谎话"是句真话,因而我正在说真话,这与"我正在说谎话"矛盾.反之,若(9)的真值为假,即"我正在说谎话"为假,也就是"我正在说谎话"是假的,因而我是在说真话.这也与"我正在说谎话"矛盾.这是一个悖论,凡是悖论都不是命题.

9个句子中,(6)、(7)、(8)不是陈述句.它们分别为疑问句、祈使句和感叹句,当然它们都不是命题.

在数理逻辑中,将命题和它的真值用抽象的符号表示,称为命题符号化.在本书中,用小写的英文字母p,q,r,…,p_i,,q_i,r_i,…表示命题,用数字1表示"真",数字0表示"假".经过这样规定,命题的真值只取两个值,即1或0.在例1.1中,用p、q、r、s分别表示(1)、(2)、(4)、(5)中的命题,称为对这些命题的符号化.其表示法为

p:多伦多是加拿大的首都.

q:$\sqrt{2}$是无理数.

r:火星上有生命.

s:2050年元旦北京是晴天.

其中,p的真值为0,q的真值为1,r与s的真值现在不知道.

在例1.1中,p,q,r,s所表示的命题都是简单的陈述句,在这些陈述句中均无联结词出现,称它们为简单命题或原子命题.但在各种推理中,所出现的命题多数是由简单命题通过联结词联结而成的陈述句,称这样的命题为复合命题.下面讨论联结词及复合命题的符号化形式.为此,先看例1.2.

例1.2　将下列各复合命题中的简单命题符号化,然后再写出各复合命题.

(1)多伦多不是加拿大的首都.

(2)华盛顿是美国的首都并且渥太华是加拿大的首都.

(3)华盛顿是美国的首都或多伦多是加拿大的首都.

(4)如果2是素数,则3也是素数.

(5)2是素数当且仅当3也是素数.

解　设p:多伦多是加拿大的首都.

q:华盛顿是美国的首都.

r：渥太华是加拿大的首都．

s：2 是素数．

t：3 是素数．

(1)不是 p.

(2)q 并且 r.

(3)q 或 p.

(4)如果 s，则 t.

(5)s 当且仅当 t.

数理逻辑的主要特征是用符号语言来代替自然语言．在例 1.2 中，还没有达到这一点．为此还应将“不是(非)”“并且”“或”“如果……则……”“当且仅当”等联结词也符号化．下面讨论这 5 种联结词的符号化，以及由它们联结的基本复合命题和复合命题．

定义 1.1：设 p 为命题，复合命题“非 p”(或“p 的否定”)称为 p 的否定式，记作 $\neg p$，符号 $\neg$ 称为否定联结词．并规定 $\neg p$ 为真当且仅当 p 为假．

由定义可知，$\neg p$ 的逻辑关系为 p 不成立，因而当 p 为真时，$\neg p$ 为假，反之当 p 为假时，$\neg p$ 为真．

若设 p：2 是合数，则 $\neg p$：2 不是合数．由于 p 为假命题，所以，$\neg p$ 为真命题．

定义 1.2：设 p，q 为两个命题，复合命题“p 并且 q”(或“p 与 q”)称为 p 与 q 的合取式，记作 $p \wedge q$，$\wedge$ 称作合取联结词．并规定 $p \wedge q$ 为真当且仅当 p 与 q 同时为真．

由定义可知，$p \wedge q$ 的逻辑关系为 p 与 q 同时成立，因而只有 p 与 q 同时为真，$p \wedge q$ 才为真，其他情况 $p \wedge q$ 均为假．

使用联结词 $\wedge$ 需要注意两点：其一是 $\wedge$ 的灵活性．自然语言中的“既……，又……”“不但……，而且……”“虽然……，但是……”“一面……，一面……”等联结词都可以符号化为 $\wedge$．其二，不要见到“与”或“和”就使用联结词 $\wedge$.

定义 1.3：设 p，q 为两个命题，复合命题为“p 或 q”称作 p 与 q 的析取式，记作 $p \vee q$，$\vee$ 称为析取联结词．并规定 $p \vee q$ 为假当且仅当 p 与 q 同时为假．

$p \vee q$ 的逻辑关系是 p 与 q 中至少一个成立，因而只有 p 与 q 同时为假时，$p \vee q$ 才为假，其他情况下，$p \vee q$ 均为真．

自然语言中的“或”具有二义性，用它联结的命题有时具有相容性，有时具有排斥性，对应的联结词分别称为相容或和排斥或．当联结的两个命题同时为真时，相容或为真，而排斥或为假．也就是说，只有当联结的两个命题一真一假时，排斥或才为真，上面定义的析取是相容或．

定义 1.4：设 p，q 为两命题，复合命题“如果 p，则 q”称作 p 与 q 的蕴涵式，记作 $p \to q$，并称 p 是蕴涵式的前件，q 为蕴涵式的后件，$\to$ 称作蕴涵联结词．并规定，$p \to q$ 为假当且仅当 p 为真 q 为假．

$p \to q$ 的逻辑关系为 q 是 p 的必要条件(p 是 q 的充分条件).

在使用联结词 $\to$ 时，要特别注意以下几点．

(1)在自然语言里，特别是在数学中，q 是 p 的必要条件(p 是 q 的充分条件)有许多不同的叙述方式，例如，“只要 p，就 q” “因为 p，所以 q” “p 仅当 q” “只有 q 才 p” “除非 q 才 p” “除非 q，否则非 p”等．以上各种叙述方式表面看来有所不同，但都表达的是 q 是 p 的必要条件，因而所用联结词

均应符号化为→，各种叙述方式都应符号化为 $p \rightarrow q$.

(2)在自然语言中，"如果 p，则 q"中的前件 p 与后件 q 往往具有某种内在联系，而在数理逻辑中，p 与 q 可以无任何内在联系.

(3)在数学或其他自然科学中，"如果 p，则 q"往往表达的是前件 p 为真，后件 q 也为真的推理关系.但在数理逻辑中，作为一种规定，当 p 为假时，无论 q 是真是假，$p \rightarrow q$ 均为真，也就是说，只有 p 为真 q 为假这一种情况，使得复合命题 $p \rightarrow q$ 为假.

例 1.3 将下列命题符号化，并指出各复合命题的真值.

(1)如果 3+3=6，则雪是白色的.

(2)如果 $3+3 \neq 6$，则雪是白色的.

(3)如果 3+3=6，则雪不是白色的.

(4)如果 $3+3 \neq 6$，则雪不是白色的.

以下命题中出现的 a 是给定的一个正整数.

(5)只要 a 能被 4 整除，则 a 一定能被 2 整除.

(6)a 能被 4 整除，仅当 a 能被 2 整除.

(7)除非 a 能被 2 整除，a 才能被 4 整除.

(8)除非 a 能被 2 整除，否则 a 不能被 4 整除.

(9)只有 a 能被 2 整除，a 才能被 4 整除.

(10)只有 a 能被 4 整除，a 才能被 2 整除.

解 令 p：3+3=6，p 的真值为 1.

q：雪是白色的，q 的真值也为 1.

(1)~(4)的符号化形式分别为 $p \rightarrow q$，$\neg p \rightarrow q$，$p \rightarrow \neg q$，$\neg p \rightarrow \neg q$. 这 4 个复合命题的真值分别为 1、1、0、1.

以上 4 个蕴涵式的前件 p 与后件 q 没有什么内在联系.

令 r：a 能被 4 整除.

s：a 能被 2 整除.

仔细分析可知，(5)~(9)这 5 个命题均叙述的是 a 能被 2 整除是 a 能被 4 整除的必要条件，只是在叙述上有所不同，因而都可以符号化为 $r \rightarrow s$. 由于 a 是给定的正整数，因而 r 与 s 的真值是客观存在的，只是我们尚不知道.可是 r 与 s 是有内在联系的，当 r 为真(a 能被 4 整除)时，s 必为真(a 能被 2 整除)，于是 $r \rightarrow s$ 不会出现前件真后件假的情况，因而 $r \rightarrow s$ 的真值为 1.

而在(10)中，将 a 能被 4 整除看成了 a 能被 2 整除的必要条件，因而应符号化为 $s \rightarrow r$. 由于 a 能被 2 整除不保证 a 一定能被 4 整除，所以当我们不知道给定的 a 为何值时，也不能知道 $s \rightarrow r$ 会不会出现前件真后件假的情况，因而也不知道 $s \rightarrow r$ 的真值.

定义 1.5：设 p，q 为两命题，复合命题"p 当且仅当 q"称为 p 与 q 的等价式，记作 $p \leftrightarrow q$，$\leftrightarrow$ 称为等价联结词，并规定 $p \leftrightarrow q$ 为真当且仅当 p 与 q 同时为真或同时为假.

$p \leftrightarrow q$ 的逻辑关系为 p 与 q 互为充分必要条件.

不难看出 $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ 与 $p \leftrightarrow q$ 的逻辑关系完全一致，即都表示 p 与 q 互为充分必要

条件.

例 1.4　将下列命题符号化,并讨论它们的真值.

(1)雪是白色的当且仅当法国的首都是里昂.

(2)n 是奇数的必要且充分条件是 n^2 是奇数.

(3)若两圆 O_1, O_2 的面积相等,则它们的半径相等. 反之,若 O_1, O_2 的半径相等,则它们的面积也相等.

(4)设∠1 与∠2 是对顶角,则∠1 等于∠2. 反之,若∠1 等于∠2,则它们是对顶角.

解　(1)令 p:雪是白色的.

q:法国的首都是里昂.

(1)中命题符号化为 $p\leftrightarrow q$. 由于 p 为真,q 为假,所以 $p\leftrightarrow q$ 为假. 这里,p 与 q 无内在联系.

(2)令 p:n 是奇数.

q:n^2 是奇数.

(2)符号化为 $(p\rightarrow q)\land(q\rightarrow p)$ 或 $p\leftrightarrow q$,不难证明 p 与 q 同为真或同为假,因而 $p\leftrightarrow q$ 为真. 这里,p 与 q 有内在联系.

(3)令 p:O_1 与 O_2 的面积相等.

q:O_1 与 O_2 的半径相等.

(3)中命题符号化为 $p\leftrightarrow q$. 真值为 1(p 与 q 的真值总相同. p 与 q 有内在联系).

(4)令 p:∠1 与∠2 是对顶角.

q:角 1 等于角 2.

(4)符号化为 $(p\rightarrow q)\land(q\rightarrow p)$ 或 $p\leftrightarrow q$. 由于 $p\rightarrow q$ 为真,而 $q\rightarrow p$ 不一定为真(两相等的角不一定是对顶角),所以 $p\leftrightarrow q$ 为假. p 与 q 有内在联系.

以上定义了 5 种最基本、最常用、最重要的联结词 $\neg$, $\land$, $\lor$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$,将它们组成一个集合 $\{\neg,\land,\lor,\rightarrow,\leftrightarrow\}$,称为一个联结词集. 其中 $\neg$ 为一元联结词,其余的都是二元联结词. 对这个联结词集说明如下.

(1)由联结词集 $\{\neg,\land,\lor,\rightarrow,\leftrightarrow\}$ 中的一个联结词联结一个或两个原子命题组成的复合命题是最简单的复合命题,可以称它们为基本的复合命题. 为帮助读者记忆,将基本复合命题的取值情况见表 1.1.

表 1.1　基本复合命题的取值情况

p	q	$\neg p$	$p\land q$	$p\lor q$	$p\rightarrow q$	$p\leftrightarrow q$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

(2)多次使用联结词集中的联结词,可以组成更为复杂的复合命题. 求复杂复合命题的真值时,除依据表 1.1 外,还要规定联结词的优先顺序. 将括号也算在内,本书规定的联结词优先顺序为:( ),$\neg$,$\land$,$\lor$,$\rightarrow$,$\leftrightarrow$,对于同一优先级的联结词,从左到右顺序执行.

第二节　命题公式的等值演算

设公式 A, B 共同含有 n 个命题变项，可能对 A 或 B 有哑元，若 A 与 B 有相同的真值表，则说明在 2^n 种赋值的每个赋值下，A 与 B 的真值都相同．于是等价式 $A \leftrightarrow B$ 应为重言式．

定义 1.6：设 A, B 是两个命题公式，若 A, B 构成的等价式 $A \leftrightarrow B$ 为重言式，则称 A 与 B 是等值的，记作 $A \Leftrightarrow B$．

定义中给出的符号 $\Leftrightarrow$ 不是联结词，它是用来说明 A 与 B 等值（$A \leftrightarrow B$ 是重言式）的一种记法，因而 $\Leftrightarrow$ 是元语言符号．此记号在下文中频繁出现，千万不要将它与 $\leftrightarrow$ 混为一谈，同时也要注意它与一般等号（=）的区别．

下面讨论判断两个公式 A 与 B 是否等值的方法，其中最直接的方法是用真值表法判断 $A \leftrightarrow B$ 是否为重言式．

例 1.5　判断两个公式是否等值：$\neg(p \vee q)$ 与 $\neg p \wedge \neg q$．

解　用真值表法判断 $\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$ 是否为重言式．此等价式的真值见表 1.2，由表可知它是重言式，因而 $\neg(p \vee q)$ 与 $\neg p \wedge \neg q$ 等值，即 $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$．

表 1.2　等价式的真值表

$p\ \ q$	$\neg p$	$\neg q$	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p \wedge \neg q$	$\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$
0　0	1	1	0	1	1	1
0　1	1	0	1	0	0	1
1　0	0	1	1	0	0	1
1　1	0	0	1	0	0	1

其实，在用真值表法判断 $A \leftrightarrow B$ 是否为重言式时，真值表的最后一列（即 $A \leftrightarrow B$ 的真值表的最后结果）可以省略．若 A 与 B 的真值表相同，则 $A \Leftrightarrow B$；否则，$A \not\Leftrightarrow B$（用来表示 A 与 B 不等值，也是常用的元语言符号）．

例 1.6　判断下列各组公式是否等值．

(1) $p \to (q \to r)$ 与 $(p \wedge q) \to r$．

(2) $(p \to q) \to r$ 与 $(p \wedge q) \to r$．

解　表 1.3 列出了 $p \to (q \to r)$，$(p \wedge q) \to r$，$(p \to q) \to r$ 的真值表，不难看出 $p \to (q \to r)$ 与 $(p \wedge q) \to r$ 等值，即 $p \to (q \to r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \to r$．

而 $(p \to q) \to r$ 与 $(p \wedge q) \to r$ 的真值表不同，因而它们不等值，即 $(p \to q) \to r \not\Leftrightarrow (p \wedge q) \to r$．

表 1.3　真值表

p	q	r	$p \to (q \to r)$	$(p \wedge q) \to r$	$(p \to q) \to r$
0	0	0	1	1	0
0	0	1	1	1	1

续表

p	q	r	$p\rightarrow(q\rightarrow r)$	$(p\wedge q)\rightarrow r$	$(p\rightarrow q)\rightarrow r$
0	1	0	1	1	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1

证明两个命题公式等值的另一种方法是等值演算，根据已知的等值式推演出与原命题公式等值的新的命题公式的过程称作等值演算．下面给出 24 个重要的等值式，希望读者牢牢记住它们．在下面公式中出现的 A，B，C 仍然是元语言符号，它们代表任意的命题公式．

(1) $\neg\neg A\Leftrightarrow A$. 双重否定律

(2) $A\Leftrightarrow A\vee A$

(3) $A\Leftrightarrow A\wedge A$ 幂等律

(4) $A\vee B\Leftrightarrow B\vee A$.

(5) $A\wedge B\Leftrightarrow B\wedge A$. 交换律

(6) $(A\vee B)\vee C\Leftrightarrow A\vee(B\vee C)$.

(7) $(A\wedge B)\wedge C\Leftrightarrow A\wedge(B\wedge C)$. 结合律

(8) $A\vee(B\wedge C)\Leftrightarrow(A\vee B)\wedge(A\vee C)$.

(9) $A\wedge(B\vee C)\Leftrightarrow(A\wedge B)\vee(A\wedge C)$. 分配律

(10) $\neg(A\vee B)\Leftrightarrow\neg A\wedge\neg B$.

(11) $\neg(A\wedge B)\Leftrightarrow\neg A\vee\neg B$. 德摩根律

(12) $A\vee(A\wedge B)\Leftrightarrow A$.

(13) $A\wedge(A\vee B)\Leftrightarrow A$. 吸收律

(14) $A\vee 1\Leftrightarrow 1$.

(15) $A\wedge 0\Leftrightarrow 0$. 零律

(16) $A\vee 0\Leftrightarrow A$.

(17) $A\wedge 1\Leftrightarrow A$. 同一律

(18) $A\vee\neg A\Leftrightarrow 1$. 排中律

(19) $A\wedge\neg A\Leftrightarrow 0$. 矛盾律

(20) $A\rightarrow B\Leftrightarrow\neg A\vee B$. 蕴涵等值式

(21) $A\leftrightarrow B\Leftrightarrow(A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow A)$. 等价等值式

(22) $A\rightarrow B\Leftrightarrow\neg B\rightarrow\neg A$. 假言易位

(23) $A\leftrightarrow B\Leftrightarrow\neg A\leftrightarrow\neg B$. 等价否定等值式

(24) $(A \to B) \wedge (A \to \neg B) \Leftrightarrow \neg A$.　　　　归谬论

上述 24 个等值式都可用真值表验证，这里不再赘述，请读者自己验证．在以上给出的 24 个重要等值式中，由于 A，B，C 可以代表任意的公式，因而以上各等值式都是用元语言符号书写的，这样的等值式称为等值式模式，每个等值式模式都给出了无穷多个同类型的具体的等值式．例如，在蕴涵等值式中，取 $A=p$，$B=q$ 时，得等值式

$$p \to q \Leftrightarrow \neg p \vee q$$

当取 $A=p\vee q\vee r$，$B=p\wedge q$ 时，得等值式

$$(p \vee q \vee r) \to (p \wedge q) \Leftrightarrow \neg (p \vee q \vee r) \vee (p \wedge q)$$

还可以构造蕴涵等值式的其他具体的等值式．这些具体的等值式被称为原来的等值式模式的代入实例．

在等值演算过程中，要不断地使用一条重要的规则，其内容如下．

置换规则　设 $\Phi(A)$ 是含公式 A 的命题公式，$\Phi(B)$ 是用公式 B 置换了 $\Phi(A)$ 中所有的 A 后得到的命题公式，若 $B\Leftrightarrow A$，则 $\Phi(B) \Leftrightarrow \Phi(A)$．

例如，在公式 $(p\to q)\to r$ 中，可用 $\neg p \vee q$ 置换其中的 $p\to q$，由蕴涵等值式可知，$p\to q\Leftrightarrow \neg p \vee q$，所以

$$(p \to q) \to r \Leftrightarrow (\neg p \vee q) \to r$$

在这里，使用了置换规则．如果再一次地用蕴涵等值式及置换规则，又会得到

$$(\neg p \vee q) \to r \Leftrightarrow \neg (\neg p \vee q) \vee r$$

如果再用德摩根律及置换规则，又会得到

$$\neg (\neg p \vee q) \vee r \Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee r$$

再用分配律及置换规则，又会得到

$$(p \wedge \neg q) \vee r \Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)$$

将以上过程连在一起，得到

$(p \to q) \to r$

$\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \to r$　（蕴涵等值式、置换规则）

$\Leftrightarrow \neg (\neg p \vee q) \vee r$　（蕴涵等值式、置换规则）

$\Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee r$　（德摩根律、置换规则）

$\Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)$　（分配律、置换规则）

公式之间的等值关系具有自反性、对称性和传递性，所以上述演算中得到的 5 个公式都是等值的．在演算的每一步都用到了置换规则，因而在以下演算中，置换规则均不标出．

下面用实例说明等值演算的用途．

例 1.7　用等值演算法验证等值式：

$$(p \vee q) \to r \Leftrightarrow (p \to r) \wedge (q \to r)$$

证明　可以从左边开始演算，也可以从右边开始演算．现在从右边开始演算

$(p \to r) \wedge (q \to r)$

$\Leftrightarrow (\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)$　（蕴涵等值式）

$\Leftrightarrow(\neg p \wedge \neg q) \vee r$ （分配律）

$\Leftrightarrow\neg (p \vee q) \vee r$ （德摩根律）

$\Leftrightarrow(p \vee q) \to r$ （蕴涵等值式）

所以，原等值式成立．读者也可从左边开始演算验证．

例 1.7 说明，用等值演算法可以验证两个公式等值．但一般情况下，不能用等值演算法直接验证两个公式不等值．

第三节　联结词完备集

一、真值函数

定义 1.7：称 $F:\{0,1\}^n \to \{0,1\}$ 为 n 元真值函数．

在这个定义中，F 的自变量为 n 个命题变项，定义域为 $\{0,1\}^n=\{00\cdots0,00\cdots1,\cdots,11\cdots1\}$，即所有由 0，1 组成的长为 n 的符号串，值域为 $\{0,1\}$．n 个命题变项共可构成 2^{2^n} 个不同的真值函数．一元真值函数共有 4 个，见表 1.4．二元真值函数共有 16 个，见表 1.5．三元真值函数共有 $2^{2^3}=256$ 个．

表 1.4　一元真值函数

p	$F_0^{(1)}$	$F_1^{(1)}$	$F_2^{(1)}$	$F_3^{(1)}$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

表 1.5　二元真值函数

p	q	$F_0^{(2)}$	$F_1^{(2)}$	$F_2^{(2)}$	$F_3^{(2)}$	$F_4^{(2)}$	$F_5^{(2)}$	$F_6^{(2)}$	$F_7^{(2)}$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1
p	q	$F_8^{(2)}$	$F_9^{(2)}$	$F_{10}^{(2)}$	$F_{11}^{(2)}$	$F_{12}^{(2)}$	$F_{13}^{(2)}$	$F_{14}^{(2)}$	$F_{15}^{(2)}$
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	0	1
1	1	0	1	0	1	0	1	1	1

对于每个真值函数，都可找到许多与之等值的命题公式．以 2 元真值函数为例，所有矛盾式都与 $F_0^{(2)}$ 等值，所有重言式都与 $F_{15}^{(2)}$ 等值，又如 $F_{13}^{(2)}\Leftrightarrow p\to q\Leftrightarrow(\neg p \vee q)\Leftrightarrow\neg (p \wedge \neg q)\Leftrightarrow(\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (p \wedge q)\Leftrightarrow\cdots$．

二、联结词完备集

定义 1.8： 设 S 是一个联结词集合，如果任何 $n(n\geqslant1)$ 元真值函数都可以由仅含 S 中的联结词构成的公式表示，则称 S 是联结词完备集 .

定理 1.1： $S=\{\neg,\wedge,\vee\}$ 是联结词完备集 .

证明　用数学归纳法证明：任意的 n 元真值函数都可以用仅含 $\{\neg,\wedge,\vee\}$ 中联结词的公式表示 .

归纳基础：当 $n=1$ 时，有 4 个 1 元真值函数：$F_0^{(1)}\Leftrightarrow\neg p\wedge p$，$F_1^{(1)}\Leftrightarrow p$，$F_2^{(1)}\Leftrightarrow\neg p$，$F_3^{(1)}\Leftrightarrow\neg p\vee p$，它们都可以用仅含 $\{\neg,\wedge,\vee\}$ 中联结词的公式表示 .

归纳步骤：假设任何 $n(n\geqslant1)$ 元真值函数都可以用仅含 $\{\neg,\wedge,\vee\}$ 中联结词的公式表示，设 G 是任意一个 $n+1$ 元真值函数 . 令 $G_0(p_1,p_2,\cdots,p_n)=G(p_1,p_2,\cdots,p_n,0)$，$G_1(p_1,p_2,\cdots,p_n)=G(p_1,p_2,\cdots,p_n,1)$. G_0 和 G_1 是两个 n 元真值函数，根据归纳假设，它们都可以用仅含 $\{\neg,\wedge,\vee\}$ 中联结词的公式表示，即存在仅含 $\{\neg,\wedge,\vee\}$ 中联结词的公式 α 和 β，使得 $G_0\Leftrightarrow\alpha$，$G_1\Leftrightarrow\beta$. 于是

$$G(p_1,p_2,\cdots,p_n,p_{n+1})\Leftrightarrow(\alpha\wedge\neg p_{n+1})\vee(\beta\wedge p_{n+1})$$

因此，任何 $n+1$ 元真值函数都可以用仅含 $\{\neg,\wedge,\vee\}$ 中联结词的公式表示 . 得证 $\{\neg,\wedge,\vee\}$ 是联结词完备集 .

推论　以下联结词集都是完备集 .

(1) $S_1=\{\neg,\wedge,\vee,\rightarrow\}$.

(2) $S_2=\{\neg,\wedge,\vee,\rightarrow,\leftrightarrow\}$.

(3) $S_3=\{\neg,\wedge\}$.

(4) $S_4=\{\neg,\vee\}$.

(5) $S_5=\{\neg,\rightarrow\}$.

证明　(1)和(2)的成立是显然的 .

(3)由于 $S=\{\neg,\wedge,\vee\}$ 是联结词完备集，因而任何真值函数都可以由仅含 S 中的联结词的公式表示 . 同时对于任意公式 A，B，$A\vee B\Leftrightarrow\neg\neg(A\vee B)\Leftrightarrow\neg(\neg A\wedge\neg B)$，因而任意真值函数都可以由仅含 $S_3=\{\neg,\wedge\}$ 中的联结词的公式表示，所以 S_3 是联结词完备集 .

类似地可以证明(4)与(5).

现在考虑联结词集 $\{\wedge,\vee\}$ 是不是完备的 . 对于 $\{\wedge,\vee\}$ 上的命题公式，若公式中含有常元 0 或 1，总可以用同一律和零律消去 0 和 1，最后得到的等值的公式只有 3 种可能：

(1)0；

(2)1；

(3)不含 0 和 1 的仅含联结词 $\wedge$ 和 $\vee$ 的公式 .

前两种显然不与 $F_2^{(1)}\Leftrightarrow\neg p$ 等值 . 对于(3)，给所有的变元赋值 0，公式的值为 0；给所有的变元赋值为 1，则公式的值为 1，因此它也不可能与 $F_2^{(1)}$ 等值 . 可见，$F_2^{(1)}$ 不能用仅含 $\{\wedge,\vee\}$ 中联结词的公式表示 . 所以，$\{\wedge,\vee\}$ 不是联结词完备集 . 显然 $\{\wedge\}$ 和 $\{\vee\}$ 也不是联结词完备集 .

在实际应用中，必须采用联结词完备集 . 可以根据不同的需要选择不同的联结词完备集，甚至

专门设计出所需要的联结词完备集. 例如, 在计算机硬件设计中用与非门或者用或非门设计逻辑线路, 它们对应两个新的联结词——与非联结词和或非联结词.

定义 1.9: 设 p, q 为两个命题, 复合命题"p 与 q 的否定式"("p 或 q 的否定式")称作 p, q 的与非式(或非式), 记作 $p\uparrow q$($p\downarrow q$). 符号 $\uparrow$($\downarrow$)称作与非联结词(或非联结词). $p\uparrow q$ 为真当且仅当 p 与 q 不同时为真($p\downarrow q$ 为真当且仅当 p 与 q 同时为假).

由定义不难看出,

$p\uparrow q\Leftrightarrow\neg(p\wedge q)$, $p\downarrow q\Leftrightarrow\neg(p\vee q)$.

定理 1.2: $\{\uparrow\}$, $\{\downarrow\}$都是联结词完备集.

证明 已知$\{\neg,\wedge\}$为联结词完备集, 因而只需证明 $\neg$ 和 $\wedge$ 都可以由 $\uparrow$ 表示即可. 而

$$\begin{aligned}
&\neg p\\
&\Leftrightarrow\neg(p\wedge p)\\
&\Leftrightarrow p\uparrow p \qquad (1.1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&p\wedge q\\
&\Leftrightarrow\neg\neg(p\wedge q)\\
&\Leftrightarrow\neg(p\uparrow q) && (\text{定义})\\
&\Leftrightarrow(p\uparrow q)\uparrow(p\uparrow q) && [\text{由式}(2.1)] \qquad (1.2)
\end{aligned}$$

得证$\{\uparrow\}$是联结词完备集. 此外

$$\begin{aligned}
&p\vee q\\
&\Leftrightarrow\neg\neg(p\vee q)\\
&\Leftrightarrow\neg(\neg p\wedge\neg q)\\
&\Leftrightarrow\neg p\uparrow\neg q && (\text{定义})\\
&\Leftrightarrow(p\uparrow p)\uparrow(q\uparrow q) && [\text{由式}(2.1)] \qquad (1.3)
\end{aligned}$$

类似可证$\{\downarrow\}$是联结词完备集.

课后练习

一、选择题

1. 下列哪个句子可以被视为命题? (　　)

A. 明天会下雨.　　　　B. 请把窗户关上.

C. 你会游泳吗?　　　　D. 这本书真有趣!

2. 下列哪个陈述句是命题? (　)

A. 请问几点了?　　　　B. 请不要说话.

C. 这个问题很难回答.　　　　D. 雪是黑色的.

3. "北京是中国的首都."这个命题的真值是什么? (　)

A. 0　　　B. 1　　　C. 不确定　　　D. 无法判断

二、思考题

1. 将下列命题符号化 .

(1)2 既是偶数又是素数 .

(2)6 不但能被 2 整除，而且能被 3 整除 .

(3)8 能被 2 整除，但不能被 6 整除 .

(4)5 是奇数，6 是偶数 .

(5)2 与 3 的最小公倍数是 6.

(6)王丽和王娟是亲姐妹 .

2. 证明：

$(p \to q) \to r \Leftrightarrow \backslash p \to (q \to r)$

第二章　命题逻辑的推理理论

学习目标

知识目标

(1)掌握命题逻辑的基本概念，包括命题、命题变项、命题常项、合式公式、原子命题公式等．

(2)理解命题公式的层次定义，能够识别不同层次的公式．

(3)熟悉命题公式的赋值与解释的概念，了解如何通过赋值判断公式的真假．

(4)掌握真值表的构造方法，能够为给定的命题公式构建真值表．

(5)理解命题公式的分类及定义，包括重言式、矛盾式和可满足式．

(6)了解命题公式的范式，包括析取范式和合取范式的基本概念．

(7)熟悉主析取范式和主合取范式的定义及其求法．

能力目标

(1)能够区分并正确使用命题变项和命题常项．

(2)能够正确构造命题公式的真值表，并从中识别出成真赋值和成假赋值．

(3)能够根据真值表判断命题公式的类型(重言式、矛盾式、可满足式)．

(4)能够将任意命题公式转换为其等值的析取范式和合取范式．

(5)能够识别命题公式的主析取范式和主合取范式．

(6)能够运用所学知识解决简单的逻辑问题．

素质目标

(1)培养严谨的逻辑思维习惯，提高分析问题的能力．

(2)锻炼细致观察和精确表达的能力．

(3)提升解决问题的系统性和条理性．

(4)培养独立思考和批判性思维的能力．

(5)加强对数学逻辑美的欣赏和理解．

(6)发展良好的学习习惯，包括自我检查和反思的能力．

思政园地

在学习命题逻辑的过程中，同学们要培养实事求是的态度，通过严谨的论证来探索真理，遇到难题时不要轻易放弃，而是要勇于探索，培养求真务实的精神．在进行逻辑推理时，大家应当遵循逻辑规则，不篡改数据，不编造结果，诚实面对自己的推理过程和结论，做到言必信，行必果．

第一节　命题逻辑基本概念

一、命题公式概述

上节中讨论的是简单命题(原子命题)和复合命题，以及它们的符号化形式．由于简单命题是命题逻辑中最基本的研究单位，所以也称简单命题为命题常项或命题常元．从本部分开始命题进一步抽象，首先称真值可以变化的陈述句为命题变项或命题变元．也用 p，q，r，……表示命题变项，当 p，q，r，……表示命题变项时，它们就成了取值 0 或 1 的变项，因而命题变项已不是命题．这样一来，p，q，r，……既可以表示命题常项，又可以表示命题变项，需要由上下文确定它们表示的是常项还是变项．

将命题变项用联结词和圆括号按一定的逻辑关系联结起来的符号串称为合式公式或命题公式．当使用联结词集 $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ 中的联结词时，合式公式递归定义如下．

定义 2.1：(1)单个命题变项和命题常项是合式公式，并称为原子命题公式．

(2)若 A 是合式公式，则 $(\neg A)$ 也是合式公式．

(3)若 A，B 是合式公式，则 $(A \wedge B)$，$(A \vee B)$，$(A \rightarrow B)$，$(A \leftrightarrow B)$ 也是合式公式．

(4)只有有限次地应用(1)～(3)形成的符号串才是合式公式．

合式公式也称为命题公式或命题形式，并简称为公式．

对于定义 2.1，应作以下说明．

(1)定义中引进了 A，B 等符号，用它们表示任意的合式公式，而不是某个具体的公式，这与 p，$p \wedge q$，$(p \wedge q) \rightarrow r$ 等具体的公式是有所不同的．前者 A，B 等符号被称作元语言符号，后者被称作对

象语言符号．在这里，所谓对象语言是指用来描述研究对象的语言，而元语言是指用来描述对象语言的语言，这两种语言是不同层次的语言．例如，中国人学习英语时，英语为对象语言，而用来学习英语的汉语自然就成了元语言了．在下文的讨论中还要不断地引进元语言符号，用来描述数理逻辑中的公式、论述或推理等．

(2)为方便起见，$(\neg A)$，$(A \wedge B)$等公式单独出现时，外层括号可以省去，写成$\neg A$，$A \wedge B$等．另外，公式中不影响运算次序的括号可以省去，如公式$(p \vee q) \vee (\neg r)$可以写成$p \vee q \vee \neg r$．

由定义可知，$(p \to q) \wedge (q \leftrightarrow r)$，$(p \wedge q) \wedge \neg r$，$p \wedge (q \wedge \neg r)$等都是合式公式，而$pq \to r$，$(\to (r \to q))$等不是合式公式．

为了讨论公式的真值变化情况，下面给出公式层次的定义．

定义 2.2：(1)若公式A是单个的命题变项或命题常项，则称A为0层公式．

(2)称A是$n+1(n \geqslant 0)$层公式是指下面情况之一．

①$A = \neg B$，B是n层公式．

②$A = B \wedge C$，其中B，C分别为i层和j层公式，且$n = \max(i,j)$．

③$A = B \vee C$，其中B，C的层次及n同②.

④$A = B \to C$，其中B，C的层次及n同②.

⑤$A = B \leftrightarrow C$，其中B，C的层次及n同②.

(3)若公式A的层次为k，则称A是k层公式．

上面定义中的 = 为普通意义的等号，在这里它是元语言符号．易知，$(\neg p \wedge q) \to r$，$(\neg (p \to \neg q)) \wedge (r \vee s) \leftrightarrow \neg p$分别为3层和4层公式．

在命题公式中，由于有命题变项的出现，因而真值是不确定的．当将公式中出现的全部命题变项都解释成具体的命题之后，公式就成了真值确定的命题．例如，在公式$(p \vee q) \to r$中，若将p解释成2是素数，q解释成3是偶数，r解释成$\sqrt{2}$是无理数，则p与r被解释成了真命题，q被解释成假命题了．此时公式$(p \vee q) \to r$被解释成若2是素数或3是偶数，则$\sqrt{2}$是无理数．这是一个真命题．若p，q的解释不变，r被解释为$\sqrt{2}$是有理数，则$(p \vee q) \to r$被解释成若2是素数或3是偶数，则$\sqrt{2}$是有理数．这是个假命题．还可以给出上述公式各种不同的解释，其结果不是得到真命题就是得到假命题．其实，将命题变项p解释成真命题，相当于指定p的真值为1，解释成假命题，相当于指定p的真值为0.

定义 2.3：设p_1，p_2，…，p_n是出现在公式A中的全部的命题变项，给p_1，p_2，…，p_n各指定一个真值，称为对A的一个赋值或解释．若指定的一组值使A的真值为1，则称这组值为A的成真赋值，若使A的真值为0，则称这组值为A的成假赋值．

在本书中，对含n个命题变项的公式A的赋值情况作如下规定．

(1)若A中出现的命题变项为p_1，p_2，…，p_n，给定A的赋值$\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$是指$p_1=\alpha_1$，$p_2=\alpha_2$，…，$p_n=\alpha_n$.

(2)若A中出现的命题变项为p，q，r，…，给定A的赋值$\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$是指$p=\alpha_1$，$q=\alpha_2$，…，最后字母赋值$\alpha_n$.

对上述α_i，取值为0或1，$i=1$，2，…，n.

例如，在公式 $(\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \neg p_3) \vee (p_1 \wedge p_2)$ 中，000($p_1=0$, $p_2=0$, $p_3=0$)，110($p_1=1$, $p_2=1$, $p_3=0$)都是成真赋值，而 001($p_1=0$, $p_2=0$, $p_3=1$)，011($p_1=0$, $p_2=1$, $p_3=1$)都是成假赋值．在 $(p \wedge \neg q) \to r$ 中，011($p=0$, $q=1$, $r=1$)为成真赋值，100($p=1$, $q=0$, $r=0$)为成假赋值．

不难看出，含 $n(n \geqslant 1)$ 个命题变项的公式共有 2^n 个不同的赋值．

定义 2.4： 将命题公式 A 在所有赋值下取值情况列成表，称作 A 的真值表．

构造真值表的具体步骤如下．

①找出公式中所含的全体命题变项 $p_1, p_2, \cdots, p_n$（若无下角标就按字典顺序排列），列出 2^n 个赋值．本书规定，赋值从 00…0 开始，然后按二进制加 1 依次写出各赋值，直到 11…1 为止．

②按从低到高的顺序写出公式的各个层次．

③对应各个赋值计算出各层次的真值，直到最后计算出公式的真值．

还必须指出，下文中所谈公式 A 与 B 具有相同的或不同的真值表，是指真值表的最后一列是否相同，而不考虑构造真值表的中间过程．

按照以上步骤，可以构造出任何含 $n(n \geqslant 1)$ 个命题变项的公式的真值表．

例 2.1　求下列公式的真值表，并求成真赋值和成假赋值．

(1) $(\neg p \wedge q) \to \neg r$.

(2) $(p \wedge \neg p) \leftrightarrow (q \wedge \neg q)$.

(3) $\neg (p \to q) \wedge q \wedge r$.

解　公式(1)是含 3 个命题变项的 3 层合式公式．它的真值见表 2.1.

表 2.1　公式(1)真值表

$p\ \ q\ \ r$	$\neg p$	$\neg r$	$\neg p \wedge q$	$(\neg p \wedge q) \to \neg r$
0　0　0	1	1	0	1
0　0　1	1	0	0	1
0　1　0	1	1	1	1
0　1　1	1	0	1	0
1　0　0	0	1	0	1
1　0　1	0	0	0	1
1　1　0	0	1	0	1
1　1　1	0	0	0	1

从表 2.1 可知，公式(1)的成假赋值为 011，其余 7 个赋值都是成真赋值．

公式(2)是含 2 个命题变项的 3 层合式公式，它的真值见表 2.2. 从表 2.2 可以看出，该公式的 4 个赋值全是成真赋值，即无成假赋值．

表 2.2　公式(2)真值表

$p\ \ q$	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge \neg p$	$q \wedge \neg q$	$(p \wedge \neg p) \leftrightarrow (q \wedge \neg q)$
0　0	1	1	0	0	1
0　1	1	0	0	0	1
1　0	0	1	0	0	1
1　1	0	0	0	0	1

公式(3)是含3个命题变项的4层合式公式．它的真值见表2.3. 不难看出，该公式的8个赋值全是成假赋值，无成真赋值．

表 2.3　公式(3)真值表

$p\ \ q\ \ r$	$p\to q$	$\neg(p\to q)$	$\neg(p\to q)\wedge q$	$\neg(p\to q)\wedge q\wedge r$
0　0　0	1	0	0	0
0　0　1	1	0	0	0
0　1　0	1	0	0	0
0　1　1	1	0	0	0
1　0　0	0	1	0	0
1　0　1	0	1	0	0
1　1　0	1	0	0	0
1　1　1	1	0	0	0

表2.1至表2.3都是按构造真值表的步骤一步一步地构造出来的，这样构造真值表不易出错．如果构造的思路比较清楚，有些层次可以省略．

在例2.1中，对于公式(1)，仅当将p解释成假命题，而将q，r都解释成真命题时，复合命题$(\neg p\wedge q)\to\neg r$才是假命题，其余情况下复合命题均为真命题．对于公式(2)，无论对p，q赋予怎样的解释，所得复合命题都是真命题．而对于公式(3)来说，恰恰相反，无论对p，q，r怎样解释，所得复合命题都是假命题．

二、命题公式的分类

根据公式在各种赋值下的取值情况，可按下述定义将命题公式进行分类．

定义2.5：设A为任一命题公式．

(1)若A在它的各种赋值下取值均为真，则称A是重言式或永真式．

(2)若A在它的各种赋值下取值均为假，则称A是矛盾式或永假式．

(3)若A不是矛盾式，则称A是可满足式．

从定义不难看出以下几点．

(1)A是可满足式的等价定义是：A至少存在一个成真赋值．

(2)重言式一定是可满足式，但反之不真．若公式A是可满足式，且它至少存在一个成假赋值，则称A为非重言式的可满足式．

(3)真值表可用来判断公式的类型．

①若真值表最后一列全为1，则公式为重言式．

②若真值表最后一列全为0，则公式为矛盾式．

③若真值表最后一列中至少有一个1，则公式为可满足式．

从表2.1至表2.3可知，例2.1中，公式(1)$(\neg p\wedge q)\to\neg r$为非重言式的可满足式，公式(2)$(p\wedge\neg p)\leftrightarrow(q\wedge\neg q)$为重言式，而公式(3)$\neg(p\to q)\wedge q\wedge r$为矛盾式．

从以上讨论可知，真值表不但能准确地给出公式的成真赋值和成假赋值，而且能判断公式的类型．

给定 n 个命题变项，按合式公式的形成规则，自然可以形成无穷多种形式各异的公式．现在的问题是：这些公式的真值表是否也有无穷多种不同的情况呢？答案是否定的．n 个命题变项共产生 2^n 个不同的赋值，而任何公式在每种赋值下只能取两个值：0 或 1，于是含 n 个命题变项的公式的真值表只有 2^{2^n} 种不同的情况，因此必有无穷多种公式具有相同的真值表．

例 2.2　下列公式中，哪些具有相同的真值表？

(1) $p \rightarrow q$.

(2) $\neg q \vee r$.

(3) $(\neg p \vee q) \wedge ((p \wedge r) \rightarrow p)$.

(4) $(q \rightarrow r) \wedge (p \rightarrow p)$.

解　本例中给出的 4 个公式，共同含有 3 个命题变项，r 是公式(1)中的哑元，p 是公式(2)中的哑元，讨论它们是否有相同的真值表时，均按 3 个命题变项写出它们的真值表．表 2.4 列出 4 个公式的真值表，中间过程被省略．从表中看出，(1)与(3)有相同的真值表，(2)与(4)有相同的真值表．

表 2.4　4 个公式的真值表

$p \quad q \quad r$	$p \rightarrow q$	$\neg q \vee r$	$(\neg p \vee q) \wedge ((p \wedge r) \rightarrow p)$	$(q \rightarrow r) \wedge (p \rightarrow p)$
0　0　0	1	1	1	1
0　0　1	1	1	1	1
0　1　0	1	0	1	0
0　1　1	1	1	1	1
1　0　0	0	1	0	1
1　0　1	0	1	0	1
1　1　0	1	0	1	0
1　1　1	1	1	1	1

第二节　范式

一、析取范式与合取范式

本节通过等值演算将命题公式等值地化成联结词集 $\{\neg, \wedge, \vee\}$ 中两种规范化的形式，即主析取范式与主合取范式．这种规范形式能给出公式的真值表所给出的一切信息．

定义 2.6：命题变项及其否定统称作文字．仅由有限个文字构成的析取式称作简单析取式．仅由有限个文字构成的合取式称作简单合取式．

p，$\neg q$ 等为 1 个文字构成的简单析取式，$p \vee \neg p$，$\neg p \vee q$ 等为 2 个文字构成的简单析取式，$\neg p \vee \neg q \vee r$，$p \vee \neg p \vee r$ 等为 3 个文字构成的简单析取式．

$\neg p$，q 等为 1 个文字构成的简单合取式，$\neg p \wedge p$，$p \wedge \neg q$ 等为 2 个文字构成的简单合取式，$p \wedge q \wedge \neg r$，$\neg p \wedge p \wedge q$ 等为 3 个文字构成的简单合取式．

注意，一个文字既是简单析取式，又是简单合取式．方便起见，有时用 A_1，A_2，…，A_s 表示 s 个简单析取式或 s 个简单合取式．

设 A_i 是含 n 个文字的简单析取式，若 A_i 中既含某个命题变项 p_j，又含它的否定式 $\neg p_j$，由交换律、排中律和零律可知，A_i 为重言式．反之，若 A_i 为重言式，则它必须同时含某个命题变项及它的否定式，否则，若将 A_i 中的不带否定号的命题变项都取 0 值，带否定号的命题变项都取 1 值，此赋值为 A_i 的成假赋值，这与条件矛盾．由类似的讨论可知，若 A_i 是含 n 个命题变项的简单合取式，且 A_i 为矛盾式，则 A_i 中必同时含某个命题变项及它的否定式，反之亦然．由以上讨论可得出下面定理．

定理 2.1：(1) 一个简单析取式是重言式当且仅当它同时含某个命题变项及它的否定式．

(2) 一个简单合取式是矛盾式当且仅当它同时含某个命题变项及它的否定式．

定义 2.7：(1) 由有限个简单合取式构成的析取式称为析取范式．

(2) 由有限个简单析取式构成的合取式称为合取范式．

(3) 析取范式与合取范式统称为范式．

设 $A_i(i=1,2,\cdots,s)$ 为简单合取式，则 $A=A_1\vee A_2\vee\cdots\vee A_s$ 为析取范式．例如，取 $A_1=p\wedge\neg q$，$A_2=\neg q\wedge\neg r$，$A_s=p$，则由 A_1，A_2，A_3 构成的析取范式为

$$A=A_1\vee A_2\vee A_3=(p\wedge\neg q)\vee(\neg q\wedge\neg r)\vee p$$

类似地，设 $A_i(i=1,2,\cdots,s)$ 为简单析取式，则 $A=A_1\wedge A_2\wedge\cdots\wedge A_s$ 为合取范式．例如，取 $A_1=p\vee q\vee r$，$A_2=\neg p\vee\neg q$，$A_3=r$，则由 A_1，A_2，A_3 构成的合取范式为

$$A=A_1\wedge A_2\wedge A_3=(p\vee q\vee r)\wedge(\neg p\vee\neg q)\wedge r$$

形如 $\neg p\wedge q\wedge r$ 的公式既是一个简单合取式构成的析取范式，又是由 3 个简单析取式构成的合取范式．类似地，形如 $p\vee\neg q\vee r$ 的公式既是含 3 个简单合取式的析取范式，又是含一个简单析取式的合取范式．

析取范式和合取范式有由下面定理给出的性质．

定理 2.2：(1) 一个析取范式是矛盾式当且仅当它的每个简单合取式都是矛盾式．

(2) 一个合取范式是重言式当且仅当它的每个简单析取式都是重言式．

任何公式都可以化成等值的析取范式和合取范式．首先，我们观察到在范式中不出现联结词→与↔．由蕴涵等值式与等价等值式可知

$$\left.\begin{array}{l}A\rightarrow B\Leftrightarrow\neg A\vee B\\ A\leftrightarrow B\Leftrightarrow(\neg A\vee B)\wedge(A\vee\neg B)\end{array}\right\}\tag{2.1}$$

因而在等值的条件下，可消去任何公式中的联结词→和↔．

其次，在范式中不出现如下形式的公式

$$\neg\neg A,\ \neg(A\wedge B),\ \neg(A\vee B)$$

对其利用双重否定律和德摩根律，可得

$$\left.\begin{array}{l}\neg\neg A\Leftrightarrow A\\ \neg(A\wedge B)\Leftrightarrow\neg A\vee\neg B\\ \neg(A\vee B)\Leftrightarrow\neg A\wedge\neg B\end{array}\right\}\tag{2.2}$$

再次，在析取范式中不出现如下形式的公式

$$A \wedge (B \vee C)$$

在合取范式中不出现如下形式的公式：

$$A \vee (B \wedge C)$$

利用分配律，可得

$$\left.\begin{aligned} A \wedge (B \vee C) &\Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \\ A \vee (B \wedge C) &\Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C) \end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

由式(2.1)至式(2.3)，可将任一公式化成与之等值的析取范式或合取范式．于是，下面定理是正确的．

定理 2.3(范式存在定理)：任一命题公式都存在与之等值的析取范式与合取范式．

求给定公式范式的步骤如下：

①消去联结词$\rightarrow$，$\leftrightarrow$．

②消去否定号(利用双重否定律)或内移(利用德摩根律)．

③利用分配律：利用$\wedge$对$\vee$的分配律求析取范式，利用$\vee$对$\wedge$的分配律求合取范式．

例 2.3　求下面公式的析取范式与合取范式：

$$\neg (p \rightarrow q) \vee \neg r$$

解　为了清晰和无误，演算中利用交换律，使得每个简单析取式或简单合取式中命题变项的出现都是按字典顺序，这对下文中求主范式更为重要．

①首先求析取范式．

$\neg (p \rightarrow q) \vee \neg r$

$\Leftrightarrow \neg (\neg p \vee q) \vee \neg r$　　(消去$\rightarrow$)

$\Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee \neg r$　　(否定号内移)

经过两步演算，就得到了含 2 个简单合取式的析取范式．

②求合取范式．

$\neg (p \rightarrow q) \vee \neg r$

$\Leftrightarrow \neg (\neg p \vee q) \vee \neg r$　　(消去$\rightarrow$)

$\Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee \neg r$　　(否定号内移)

$\Leftrightarrow (p \vee \neg r) \wedge (\neg q \vee \neg r)$　　($\vee$对$\wedge$分配律)

经过 3 步演算，得到了含 2 个简单析取式的合取范式．

在①与②的演算中，头两步是相同的．演算中都用到了蕴涵等值式和德摩根律．②中用到了分配律．

易知，$(p \wedge \neg q) \vee \neg r \vee (q \wedge \neg q)$，$(p \vee \neg r) \wedge (\neg q \vee \neg r) \wedge (r \vee \neg r)$ 等也分别是 $\neg (p \rightarrow q) \vee \neg r$ 的析取范式和合取范式，这说明公式的析取范式与合取范式是不唯一的．

下文简要介绍寻找公式的唯一的范式形式，即主析取范式与主合取范式．

二、主析取范式与主合取范式

(一) 概念

定义 2.8：在含有 n 个命题变项的简单合取式(简单析取式)中，若每个命题变项和其否定式不同时出现，而二者之一必出现且仅出现一次，且第 i 个命题变项或它的否定式出现在从左算起的第 i 位上(若命题变项无角标，就按字典顺序排列)，称这样的简单合取式(简单析取式)为极小项(极大项).

由于每个命题变项在极小项中以原形或否定式形式出现且仅出现一次，因而 n 个命题变项共可产生 2^n 个不同的极小项．其中每个极小项都有且仅有一个成真赋值．若成真赋值所对应的二进制数转化为十进制数为 i，就将所对应极小项记作 m_i. 类似地，n 个命题变项可产生共 2^n 个不同的极大项，每个极大项只有一个成假赋值，将其对应的十进制数 i 作为极大项的角标，记作 M_i.

为了便于记忆，将 p，q 与 p，q，r 形成的极小项与极大项分别列在表 2.5 和表 2.6 中．

表 2.5　p，q 与 p，q，r 形成的极小项与极大项

极小项			极大项		
公式	成真赋值	名称	公式	成假赋值	名称
$\neg p \wedge \neg q$	0　0	m_0	$p \vee q$	0　0	M_0
$\neg p \wedge q$	0　1	m_1	$p \vee \neg q$	0　1	M_1
$p \wedge \neg q$	1　0	m_2	$\neg p \vee q$	1　0	M_2
$p \wedge q$	1　1	m_3	$\neg p \vee \neg q$	1　1	M_3

表 2.6　p，q 与 p，q，r 形成的极小项与极大项

极小项			极大项		
公式	成真赋值	名称	公式	成假赋值	名称
$\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$	0　0　0	m_0	$p \vee q \vee r$	0　0　0	M_0
$\neg p \wedge \neg q \wedge r$	0　0　1	m_1	$p \vee q \vee \neg r$	0　0　1	M_1
$\neg p \wedge q \wedge \neg r$	0　1　0	m_2	$p \vee \neg q \vee r$	0　1　0	M_2
$\neg p \wedge q \wedge r$	0　1　1	m_3	$p \vee \neg q \vee \neg r$	0　1　1	M_3
$p \wedge \neg q \wedge \neg r$	1　0　0	m_4	$\neg p \vee q \vee r$	1　0　0	M_4
$p \wedge \neg q \wedge r$	1　0　1	m_5	$\neg p \vee q \vee \neg r$	1　0　1	M_5
$p \wedge q \wedge \neg r$	1　1　0	m_6	$\neg p \vee \neg q \vee r$	1　1　0	M_6
$p \wedge q \wedge r$	1　1　1	m_7	$\neg p \vee \neg q \vee \neg r$	1　1　1	M_7

容易验证极小项与极大项有下面定理中给出的关系．

定理 2.4：设 m_i 与 M_i 是命题变项 p_1，p_2，…，p_n 形成的极小项和极大项，则

$$\neg m_i \Leftrightarrow M_i \text{ ，} \neg M_i \Leftrightarrow m_i$$

定义 2.9：若由 n 个命题变项构成的析取范式(合取范式)中所有的简单合取式(简单析取式)都是极小项(极大项)，则称该析取范式(合取范式)为主析取范式(主合取范式).

下面介绍求与给定公式等值的主析取范式和主合取范式的方法．

设所给定公式为含 n 个命题变项的公式 A，求 A 的主析取范式，按下面步骤进行．

①求 A 的析取范式 $A' = B_1 \vee B_2 \vee \cdots \vee B_s$，其中 B_j 为简单合取式，$j=1, 2, \cdots, s$.

②若 A' 中的某简单合取式 B_j 中既不含命题变项 p_i，又不含 $\neg p_i$，则将 B_j 如下展开：

$$B_j \Leftrightarrow B_j \wedge 1 \Leftrightarrow B_j \wedge (p_i \vee \neg p_i)$$
$$\Leftrightarrow (B_j \wedge p_i) \vee (B_j \wedge \neg p_i)$$

继续这一过程，直到 $B_1, B_2, \cdots, B_s$ 都被展成长度为 n 的极小项的析取式为止．

③将重复出现的命题变项、矛盾式、重复出现的极小项都按幂等律、同一律等“消去”．即用 p 代替 $p \vee p$，0 代替 $p \wedge \neg p$，m_i 代替 $m_i \vee m_i$.

④将极小项按角标从小到大的顺序排列，并可以用 Σ 表示，如 $m_1 \vee m_3 \vee m_5$ 记为 $\Sigma(1,3,5)$，当然也可以不用 Σ 表示．

求 A 的主合取范式的步骤与求主析取范式的步骤类似，简单叙述如下．

①求 A 的合取范式 $A' = B_1 \wedge B_2 \wedge \cdots \wedge B_r$，其中 B_j 为简单析取式，$j=1, 2, \cdots, r$.

②利用

$$B_j = B_j \vee 0 \Leftrightarrow B_j \vee (p_i \wedge \neg p_i) \Leftrightarrow (B_r \vee p_i) \wedge (B_r \vee \neg p_i)$$

将 $B_1, B_2, \cdots, B_r$ 都转化成长度为 n 的极大项的合取式．

③将重复出现的命题变项、重言式、重复出现的极大项按幂等律、排中律等“消去”．

④将极大项按角标从小到大顺序排序，并可以用 Π 简单表示．例如，$M_0 \wedge M_3 \wedge M_7$ 可简记为 $\Pi(0,3,7)$．

定理 2.5：任何命题公式都存在与之等值的主析取范式和主合取范式，并且是唯一的．

证明　上面叙述的求主析取范式和求主合取范式的方法实际上已经证明了主析取范式和主合取范式的存在性．接下来证明主析取范式的唯一性．注意到公式 A 的主析取范式中的每一个极小项 m_i 的下标 i 的二进制表示是 A 的一个成真赋值．假设 A 有两个不同的主析取范式 D_1 和 D_2，不妨设 D_1 中包含极小项 m_i，而 D_2 中不包含极小项 m_i. 那么，i 的二进制表示是 D_1 的成真赋值和 D_2 的成假赋值．这与 D_1 和 D_2 都是 A 的主析取范式矛盾，所以公式 A 只可能有唯一的主析取范式．主合取范式的唯一性可以类似证明，只需把极小项换成极大项，并交换成真赋值与成假赋值．

例 2.4　求例 2.3 中公式 $\neg(p \to q) \vee \neg r$ 的主析取范式与主合取范式．

解　先求主析取范式．

由例 2.3 已求出该公式的析取范式为

$\neg(p \to q) \vee \neg r$

$\Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee \neg r$

其中简单合取式 $p \wedge \neg q$ 与 $\neg r$ 都不是极小项．按步骤②将它们都化成极小项的析取式：

$(p \wedge \neg q)$

$\Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \wedge 1$　　　　（同一律）

$\Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \wedge (\neg r \vee r)$　　　　（排中律）

$\Leftrightarrow (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r)$　　　　（分配律）

由此可知，$(p \wedge \neg q)$ 派生成两个长度为 3（A 中命题变项数）的极小项 m_4 与 m_5.

而

$\neg r$

$\Leftrightarrow 1 \wedge 1 \wedge \neg r$　　（同一律）

$\Leftrightarrow (p \vee \neg p) \wedge (q \vee \neg q) \wedge \neg r$　　（排中律）

$\Leftrightarrow (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$（分配律）

$\Leftrightarrow m_6 \vee m_4 \vee m_2 \vee m_0$

于是，按步骤③和④可得．

$\neg (p \to q) \vee \neg r$

$\Leftrightarrow m_4 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_4 \vee m_2 \vee m_0$

$\Leftrightarrow m_0 \vee m_2 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_6$

$\Leftrightarrow \sum(0,2,4,5,6)$

由例 2.3 中②可知，公式的合取范式已求出，即

$\neg (p \to q) \vee \neg r$

$\Leftrightarrow (p \vee \neg r) \wedge (\neg q \vee \neg r)$

其中的简单析取式都不是极大项，求主合取范式，应将它们派生成极大项．

$p \vee \neg r$

$\Leftrightarrow p \vee 0 \vee \neg r$　　（同一律）

$\Leftrightarrow p \vee (q \wedge \neg q) \vee \neg r$　　（矛盾律）

$\Leftrightarrow (p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r)$　　（分配律）

$\Leftrightarrow M_1 \wedge M_3$

$\neg q \vee \neg r$

$\Leftrightarrow 0 \vee \neg q \vee \neg r$　　（同一律）

$\Leftrightarrow (p \wedge \neg p) \vee \neg q \vee \neg r$　　（矛盾律）

$\Leftrightarrow (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$

$\Leftrightarrow M_3 \wedge M_7$

于是，主合取范式为

$\neg (p \to q) \vee \neg r$

$\Leftrightarrow M_1 \wedge M_3 \wedge M_7 \Leftrightarrow \Pi(1,3,7)$．

由上面的计算可以看出，长度为 k（含 k 个文字）的简单合取式派生出主析取范式中的 2^{n-k} 个极小项．例如，$n=3$ 时，由 q，$(p \wedge \neg r)$ 派生的极小项分别为

$q \Leftrightarrow (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r)$

$\Leftrightarrow m_2 \vee m_3 \vee m_6 \vee m_7$

$p \wedge \neg r \Leftrightarrow (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r)$

$\Leftrightarrow m_4 \vee m_6$.

在以上演算中省去了利用同一律、排中律等步骤，这样就能很快地求出主析取范式了．同样，也能很快地求出主合取范式．

(二)讨论

下面讨论主析取范式的用途(主合取范式可类似讨论). 公式的主析取范式像公式的真值表一样, 可以表达出公式以及公式之间关系的一切信息.

1. 求公式的成真与成假赋值

若公式 A 中含 n 个命题变项, A 的主析取范式含 $s(0\leqslant s\leqslant 2^n)$ 个极小项, 则 A 有 s 个成真赋值, 它们是所含极小项角标的二进制表示, 其余 2^n-s 个赋值都是成假赋值.

2. 判断公式的类型

设公式 A 中含 n 个命题变项, 容易看出:

(1) A 为重言式当且仅当 A 的主析取范式含全部 2^n 个极小项.

(2) A 为矛盾式当且仅当 A 的主析取范式不含任何极小项, 此时, 规定 A 的主析取范式为 0.

(3) A 为可满足式当且仅当 A 的主析取范式中至少含一个极小项.

例 2.5 用公式的主析取范式判断下面公式的类型.

(1) $\neg(p\rightarrow q)\wedge q$.

(2) $p\rightarrow(p\vee q)$.

(3) $(p\vee q)\rightarrow r$.

解 注意, (1)和(2)中公式含两个命题变项, 演算中极小项含两个文字, 而(3)中公式含 3 个命题变项, 因而极小项中应含 3 个文字.

(1) $\quad\neg(p\rightarrow q)\wedge q$

$\Leftrightarrow\neg(\neg p\vee q)\wedge q$

$\Leftrightarrow(p\wedge\neg q)\wedge q$

$\Leftrightarrow 0$.

这说明(1)中公式是矛盾式.

(2) $\quad p\rightarrow(p\vee q)$

$\Leftrightarrow\neg p\vee p\vee q$

$\Leftrightarrow(\neg p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q)\vee(p\wedge\neg q)\vee(p\wedge q)\vee(\neg p\wedge q)\vee(p\wedge q)$

$\Leftrightarrow(\neg p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q)\vee(p\wedge\neg q)\vee(p\wedge q)$

$\Leftrightarrow m_0\vee m_1\vee m_2\vee m_3$.

含两个命题变项的公式的主析取范式含全部(2^2 个)极小项, 这说明该公式为重言式.

其实, 以上演算到第一步, 就已知该公式等值于 1, 因而它为重言式, 然后根据公式中所含命题变项个数写出全部极小项即可. 即

$p\rightarrow(p\vee q)$

$\Leftrightarrow\neg p\vee p\vee q$

$\Leftrightarrow 1$

$\Leftrightarrow m_0\vee m_1\vee m_2\vee m_3$.

(3) $(p \vee q) \to r$

$\Leftrightarrow \neg (p \vee q) \vee r$

$\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee r$

$\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r)$

$\vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r)$

$\Leftrightarrow m_0 \vee m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_7$

易知，该公式是可满足的，但不是重言式，因为它的主析取范式没含全部(8个)极小项．

(4)判断两个命题公式是否等值

设公式 A，B 共含有 n 个命题变项，按 n 个命题变项求出 A 与 B 的主析取范式 A' 与 B'．若 $A' = B'$，则 $A \Leftrightarrow B$，否则 $A \Leftrightarrow B$．

例 2.6 判断下面两组公式是否等值．

(1) p 与 $(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$．

(2) $(p \to q) \to r$ 与 $(p \wedge q) \to r$．

解 (1)两公式共含两个命题变项，因而极小项含两个文字．

p

$\Leftrightarrow p \wedge (\neg q \vee q)$

$\Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q)$

$\Leftrightarrow m_2 \vee m_3$

另一公式

$(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$

$\Leftrightarrow m_2 \vee m_3$

所以

$p \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$．

(2)两公式都含命题变项 p，q，r，因而极小项含3个文字．经过演算可知

$(p \to q) \to r$

$\Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_7$

$(p \wedge q) \to r$

$\Leftrightarrow m_0 \vee m_1 \vee m_2 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_7$

所以

$(p \to q) \to r \Leftrightarrow (p \wedge q) \to r$

(5)应用主析取范式分析和解决实际问题

例 2.7 某科研所要从3名科研骨干A，B，C中挑选1~2名出国进修．由于工作需要，选派时要满足以下条件：

(1)若A去，则C同去．

(2)若B去，则C不能去．

(3)若C不去，则A或B可以去．

问所里应如何选派他们？

解　设 p：派 A 去

q：派 B 去

r：派 C 去

由已知条件可得公式

$(p \to r) \wedge (q \to \neg r) \wedge [\neg r \to (p \vee q)]$

经过演算可得

$(p \to r) \wedge (q \to \neg r) \wedge [\neg r \to (p \vee q)]$

$\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r)$.

这是主析取范式，根据它的成真赋值，选派方案有以下 3 种：

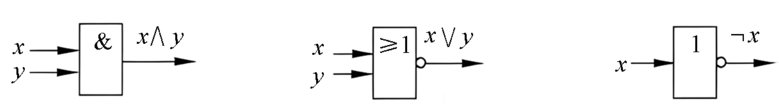
(1) $p=0$，$q=0$，$r=1$，即 C 去，而 A，B 都不去.

(2) $p=0$，$q=1$，$r=0$，即 B 去，而 A，C 都不去.

(3) $p=1$，$q=0$，$r=1$，即 A，C 都去，而 B 不去.

下面再举一个命题公式在设计控制电路中的应用. 可以用电子元件物理实现逻辑运算，用这些元件组合成的电路物理实现命题公式，这样的电路称作组合电路. 实现 $\wedge$，$\vee$，$\neg$ 的元件分别称为与门、或门、非门. 它们的图形表示如图 2.1 所示. 设计组合电路，首先要根据需要写出输入输出的真值表，然后根据真值表写出逻辑表达式，再按照逻辑表达式画出组合电路. 为了使组合电路尽可能的简单，还需要对表达式进行化简.

例 2.8　楼梯有一盏灯，由上、下 2 个开关控制，要求按动任何一个开关都能打开或关闭灯. 试设计一个这样的线路.



(a) 与门　　(b) 或门　　(c) 非门

图 2.1　逻辑门

解　用 x，y 分别表示这 2 个开关的状态，开关的 2 个状态分别用 1 和 0 表示. 用 F 表示灯的状态，打开为 1，关闭为 0. 不妨设当 2 个开关都为 0 时灯是打开的. 根据题目的要求，开关的状态与灯的状态的关系见表 2.7，根据它可以写出 F 的主析取范式

$$F = m_0 \wedge m_3 = (\neg x \wedge \neg y) \vee (x \wedge y).$$

根据这个公式，控制楼梯电灯的组合电路如图 2.2 所示.

表 2.7　开关的状态与灯的状态的关系

x	y	$F(x, y)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

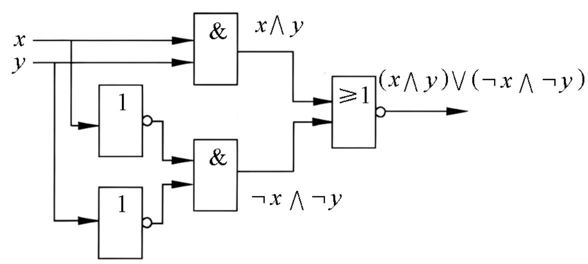


图 2.2　两个开关控制的灯具电路

以上主要讨论了主析取范式的求法与用途，主合取范式的用途和主析取范式的一样．不再赘述，但还要说明以下几点．

(1)由公式的主析取范式求主合取范式．

设公式 A 含 n 个命题变项．A 的主析取范式含 $s(0\leqslant s\leqslant 2^n)$ 个极小项，即

$A\Leftrightarrow m_{i_1}\vee m_{i_2}\vee\cdots\vee m_{i_s},\ 0\leqslant i_j\leqslant 2^n-1,\ j=1,2,\cdots,s$

没出现的极小项为 $m_{j_1},m_{j_2},\cdots,m_{j_{2^n-s}}$，它们的角标的二进制表示为 $\neg A$ 的成真赋值，因而 $\neg A$ 的主析取范式为

$\neg A=m_{j_1}\vee m_{j_2}\vee\cdots\vee m_{j_{2^n-s}}$.

由定理 2.4 可知

$A\Leftrightarrow\neg\neg A$

$\Leftrightarrow\neg(m_{j_1}\vee m_{j_2}\vee\cdots\vee m_{j_{2^n-s}})$

$\Leftrightarrow\neg m_{j_1}\wedge\neg m_{j_2}\wedge\cdots\wedge m_{j_{2^n-s}}$

$\Leftrightarrow M_{j_1}\wedge M_{j_2}\wedge\cdots\wedge M_{j_{2^n-s}}$.

即主析取范式中没有出现的极小项的下标恰好是主合取范式中极大项的下标．于是，由公式的主析取范式即可求出它的主合取范式．

例 2.9　由公式的主析取范式求主合取范式．

① $A\Leftrightarrow m_1\vee m_2$($A$ 中含两个命题变项 p,q).

② $B\Leftrightarrow m_1\vee m_2\vee m_3$($B$ 中含命题变项 p,q,r).

解　①由题可知，没出现在主析取范式中的极小项为 m_0 和 m_3，所以 A 的主合取范式中含两个极大项 M_0 与 M_3，故

$$A\Leftrightarrow M_0\wedge M_3$$

②B 的主析取范式中没出现的极小项为 m_0，m_4，m_5，m_6，m_7，因而

$$B\Leftrightarrow M_0\wedge M_4\wedge M_5\wedge M_6\wedge M_7$$

反之，由公式的主合取范式，也可以确定主析取范式．

(2)重言式与矛盾式的主合取范式．

矛盾式无成真赋值，因而矛盾式的主合取范式含 2^n(n 为公式中命题变项个数)个极大项．而重言式无成假赋值，因而主合取范式不含任何极大项．将重言式的主合取范式规定为 1，至于可满足式，它的主合取范式中极大项的个数一定小于 2^n.

(3) n 个命题变项共可产生 2^n 个极小项(极大项)，因而共可产生 2^{2^n} 个不同的主析取范式(主合取范式)．每一个主析取范式(主合取范式)对应无穷多个等值的命题公式．

(4)真值表和主析取范式(主合取范式)是描述命题公式的两种标准形式．公式 A 的主析取范式(主合取范式)中的极小项(极大项)的下标的二进制表示恰好是 A 的成真赋值(成假赋值)，因而 A 的主析取范式(主合取范式)恰好对应于 A 的真值表．由公式 A 的主析取范式(主合取范式)可以立刻写出 A 的真值表；反之，由 A 的真值表也可以立刻写出 A 的主析取范式(主合取范式)．

第三节　推理

推理是数理逻辑的重要内容，它是对数学证明以及在各种各样领域中的推理思维的高度抽象．

一、推理的形式结构

定义 2.10：设 $A_1, A_2, \cdots, A_k, B$ 都是命题公式，若对于 $A_1, A_2, \cdots, A_k, B$ 中出现的命题变项的任意一组赋值，或者 $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k$ 为假，或者当 $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k$ 为真时，B 也为真，则称由前提 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 推出 B 的推理是有效的或正确的，并称 B 是有效的结论．

由定义 2.10 容易证明下面定理．

定理 2.6：命题公式 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 推出 B 的推理正确当且仅当蕴涵式

$$(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k) \rightarrow B$$

为重言式．

由定理 2.6 给出下面定义．

定义 2.11：称

$$(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k) \rightarrow B \tag{2.4}$$

为由前提 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 推结论 B 的推理的形式结构．

当式(2.4)为重言式(即推理正确)时，记为

$$(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k) \Rightarrow B \tag{2.5}$$

其中 $\Rightarrow$ 同 $\Leftrightarrow$ 一样，是一种元语言符号，用来表示蕴涵式为重言式．

推理的形式结构还有另外的表达方式，比如将前提与结论分开写．

前提：$A_1, A_2, \cdots, A_k$.　　(2.6)

结论：B.

对于实际中给出的推理，应首先将推理中的简单命题符号化，然后写出前提和结论，使其成为式(2.6)的形式．通过判断推理的形式结构(2.4)是否为重言式，就可以确定推理是否有效．判断(2.4)是否为重言式的方法很多，例如：

(1)真值表法．

(2)等值演算法．

(3)主析取范式法．

(4)观察法，若能观察出式(2.4)的成假赋值，则断言推理一定不正确．

例 2.10 判断下面推理是否正确．

(1) 若 a 是偶数，则 a 能被 2 整除．a 是偶数．所以，a 能被 2 整除．

(2) 若 a 是偶数，则 a 能被 2 整除．a 能被 2 整除．所以，a 是偶数．

(3) 下午马芳或去看电影或去游泳．她没去看电影．所以，她去游泳了．

(4) 若下午气温超过 30℃，则王小燕必去游泳．若她去游泳，她就不去看电影了．所以，若王小燕没去看电影，下午气温必超过了 30℃．

解 先将简单命题符号化，然后写出前提、结论，即推理形式结构式(2.6)的形式，同时写出形式结构式(2.4)的形式，用式(2.4)的形式判断推理是否正确．

(1) 设

p：a 是偶数．

q：a 能被 2 整除．

前提：$p \to q$，p.

结论：q.

推理的形式结构：

$$(p \to q) \wedge p \to q \tag{2.7}$$

用真值表法判断此推理．由表 2.8 可知，式(2.7)是重言式，因而推理正确，式(2.7)可以写成 $(p \to q) \wedge p \Rightarrow q$．

表 2.8 真值表法推理

p	q	$p \to q$	$(p \to q) \wedge p$	$(p \to q) \wedge p \to q$
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

(2) 设 p，q 的含义同(1).

前提：$p \to q$，q.

结论：p.

推理的形式结构：

$$(p \to q) \wedge q \to p. \tag{2.8}$$

容易看出，01 是式(2.8)的成假赋值，所以(2)中推理不正确．

(3) 设

p：马芳下午去看电影．

q：马芳下午去游泳．

前提：$p \vee q$，$\neg p$．

结论：q.

推理的形式结构：

$$((p \vee q) \wedge \neg p) \to q. \tag{2.9}$$

用等值演算法来判断式(2.9)是否为重言式．演算过程如下：

$((p \vee q) \wedge \neg p) \to q$

$\Leftrightarrow \neg((p \vee q) \wedge \neg p) \vee q$

$\Leftrightarrow((\neg p \wedge \neg q) \vee p) \vee q$

$\Leftrightarrow((\neg p \vee p) \wedge(\neg q \vee p)) \vee q$

$\Leftrightarrow \neg q \vee p \vee q$

$\Leftrightarrow 1$

这说明式(2.9)为重言式，所以推理正确．因而可将式(2.9)记为

$$((p \vee q) \wedge \neg p) \Rightarrow q$$

(4)设

p：下午气温超过30℃.

q：王小燕去游泳．

r：王小燕去看电影．

前提：$p \rightarrow q, q \rightarrow \neg r$．

结论：$\neg r \rightarrow p$．

推理的形式结构：

$$((p \rightarrow q) \wedge(q \rightarrow \neg r)) \rightarrow(\neg r \rightarrow p). \tag{2.10}$$

用主析取范式法判断式(2.10)是否为重言式．

$((p \rightarrow q) \wedge(q \rightarrow \neg r)) \rightarrow(\neg r \rightarrow p)$

$\Leftrightarrow \neg((\neg p \vee q) \wedge(\neg q \vee \neg r)) \vee(r \vee p)$

$\Leftrightarrow((p \wedge \neg q) \vee(q \wedge r)) \vee r \vee p$

$\Leftrightarrow p \vee r$ （用两次吸收律）

$\Leftrightarrow(p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee(p \wedge \neg q \wedge r) \vee(p \wedge q \wedge \neg r) \vee(p \wedge q \wedge r) \vee(\neg p \wedge \neg q \wedge r)$

$\vee(\neg p \wedge q \wedge r) \vee(p \wedge \neg q \wedge r) \vee(p \wedge q \wedge r)$

$\Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7$ （重新排序）

可见式(2.10)不是重言式(主析取范式中少两个极小项 m_0，m_2)，所以推理不正确．

二、推理的证明

上述内容是从命题公式的真值和命题演算的角度讨论如何判断推理的正确性．在实际应用中，证明推理正确和进行有效推理的基本方法是构造推理的证明，即构造一个从前提到结论的公式序列，序列中的每一个公式都是前提的有效结论．本节介绍如何构造这样的序列．

若蕴涵式 $A \rightarrow B$ 是重言式，即 $A \Rightarrow B$，则以前件 A 为前提，后件 B 为结论的推理是正确的．例如，由 $p \Rightarrow p \vee q$，可知由前提 p 推出结论 $p \vee q$ 是正确的．因此，称永真的蕴涵式为推理定律．下面给出9条常用的推理定律，它们都不难验证．

(1) $A \Rightarrow(A \vee B)$．　附加律

(2) $(A \wedge B) \Rightarrow A$．　化简律

(3) $(A \rightarrow B) \wedge A \Rightarrow B$．　假言推理

(4) $(A \rightarrow B) \wedge \neg B \Rightarrow \neg A$．　拒取式

(5) $(A \vee B) \wedge \neg B \Rightarrow A$．　析取三段论

(6) $(A \to B) \wedge (B \to C) \Rightarrow (A \to C)$. 假言三段论

(7) $(A \to B) \wedge (C \to D) \wedge (A \vee C) \Rightarrow (B \vee D)$; 构造性二难

$(A \to B) \wedge (\neg A \to B) \wedge \Rightarrow B$. 构造性二难(特殊形式)

(8) $(A \to B) \wedge (C \to D) \wedge (\neg B \vee \neg D) \Rightarrow (\neg A \vee \neg C)$. 破坏性二难

此外，每一个等值式可以派生出两条推理定律：由 $A \Leftrightarrow B$ ，可以得到 $A \Rightarrow B$ 和 $B \Rightarrow A$. 也就是说，可以把一个公式换成任何与它等值的公式，称作等值置换，简称置换 . 特别地，可以利用上述内容中的 24 个等值式进行这种置换 .

定义 2. 12：设前提 A_1，A_2，…，A_k，结论 B，如果一个公式序列的最后是 B 并且序列中的每一个公式或者是某个 $A_i(1 \leqslant i \leqslant k)$，或者是前面公式的有效结论，则称这个序列是由前提 A_1，A_2，…，A_k 推出结论 B 的证明 .

显然，如果存在由前提 A_1，A_2，…，A_k 推出结论 B 的证明，则这个推理是有效的 . 实际上，证明的本身就是一个有效推理的过程 . 为了构造证明，引入下述推理规则 .

(1) 前提引入规则：在证明的每一步都可以引入前提 .

(2) 结论引入规则：在证明的每一步都可以引入由前面的公式得到的有效结论 .

由前面给出的 8 条推理定律和等值置换，应用结论引入规则可以导出以下各条推理规则 .

(3) 置换规则：在证明的每一步可以引入前面公式的等值置换 .

(4) 假言推理规则(或称分离规则)：若证明的公式序列中已出现过 $A \to B$ 和 A，则由假言推理定律 $((A \to B) \wedge A \Rightarrow B)$ 可知，B 是 $A \to B$ 和 A 的有效结论，由结论引入规则可知，可将 B 引入命题序列中 . 用图式表示为如下形式：

$$\begin{array}{l} A \to B \\ A \\ \hline B \end{array}$$

以下各条推理定律直接以图式给出，不再加以说明 .

(5) 附加规则：

$$\begin{array}{l} A \\ \hline A \vee B \end{array}$$

(6) 化简规则：

$$\begin{array}{l} A \wedge B \\ \hline A \end{array}$$

(7) 拒取式规则：

$$\begin{array}{l} A \to B \\ \neg B \\ \hline \neg A \end{array}$$

(8) 假言三段论规则：

$$\begin{array}{l} A \to B \\ B \to C \\ \hline A \to C \end{array}$$