高等数学基础（下册）

类目：公共基础课
书名：高等数学基础（下册）
主编：张 余 钱小慧　周学军
出版社：北京出版社
开本：正 16 开
书号：978-7-200-20075-1
使用层次：通用
出版时间：2026 年 1 月
定价：48.00 元
印刷方式：双色
是否有资源：有

责任编辑：周明霞
责任印制：王晓燕
封面设计：旗语书装

高等数学基础 · 下册

ISBN 978-7-200-20075-1
定价：48.00元

普通高等教育数学基础课“十五五”规划教材

高等数学基础 · 下册

主编 ◎ 张 余 钱小慧 周学军

北京出版集团
北京出版社

普通高等教育数学基础课“十五五”规划教材

高等数学基础 · 下册

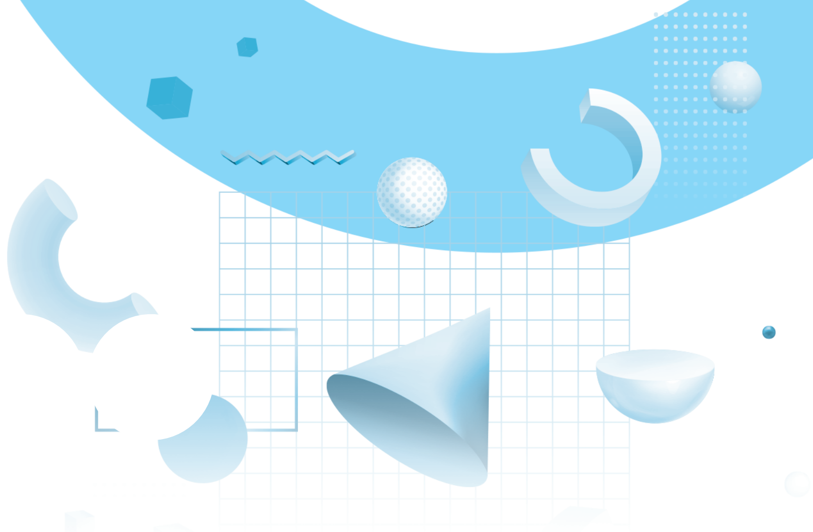
GAODENG SHUXUE JICHU

主编 ◎ 张 余 钱小慧 周学军

北京出版集团
北京出版社

普通高等教育数学基础课
『十五五』规划教材

高等数学基础·下册



主　编 ◎ 张　余　钱小慧　周学军

副主编 ◎ 刘相君　藏晓鑫　阳　衡

北京出版集团
北 京 出 版 社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学基础. 下册 / 张余，钱小慧，周学军主编.
北京 ：北京出版社，2026.1. --ISBN 978-7-200
-20075-1

Ⅰ. O13

中国国家版本馆 CIP 数据核字第 2025N76Q75 号

高等数学基础. 下册

GAODENG SHUXUE JICHU. XIACE

主编 ◎ 张　余　钱小慧　周学军

*

北京出版集团　出版
北京出版社

（北京北三环中路 6 号）

邮政编码：100120

网址：www.bph.com.cn

京版北教文化传媒股份有限公司总发行

全国各地书店经销

涿州汇美亿浓印刷有限公司

*

787 mm×1 092 mm　16 开本　14 印张　312 千字

2026 年 1 月第 1 版　2026 年 1 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-200-20075-1

定价：48.00 元

前　言

高等数学是普通高等院校一门重要的基础学科．作为一门科学，高等数学有其固有的特点，即高度的抽象性、严密的逻辑性和广泛的应用性．抽象性是数学最基本、最显著的特点，有了高度抽象和统一，我们才能深入地揭示其本质规律，才能使之得到更广泛的应用．严密的逻辑性是指在数学理论的归纳和整理中，无论是概念和表述，还是判断和推理，都要运用逻辑的规则，遵循思维的规律．所以说，数学也是一种思想方法，学习数学的过程就是思维训练的过程．人类社会的进步，与数学这门科学的广泛应用是分不开的．尤其是到了现代，电子计算机的出现和普及使得数学的应用领域不断拓宽，现代数学正成为科技发展的强大动力．

本书在编写的过程中做了以下方面的努力：

(1) 从普通高等教育的实际出发，结合数学教学改革的实际经验，按照“应用为目的，必需、够用为度”的原则，以“理解基本概念，掌握运算方法及应用”为依据，删去了不必要的逻辑推导，强化了基本概念的教学．

(2) 编写的内容力求简洁易懂，注意把握好理论推导的深度，注重基本运算能力、分析问题和解决问题能力的培养，贯彻理论联系实际和启发式教学原则，深入浅出，通俗易懂．

(3) 注意从实际问题中引出数学知识，再将数学知识应用到各种实际问题中，用大量的实例反映数学的应用，加深学生对数学知识的理解，从而使数学源于实际，又反作用于实际．例如，在定积分的应用部分，不仅讲述了定积分在几何、物理方面的应用，还拓展了其在经济领域的应用．

(4) 充分考虑普通高等学校学生的数学基础，较好地处理了初等数学与高等数学的过渡与衔接．适度淡化逻辑论证，充分利用几何说明，帮助学生理解有关概念和理论．

(5) 结合重点和难点，书中选择了数量适中、难度适当的例题，并突出数学思维方法．

(6) 为了方便教与学，每节配有习题，每章配有复习题，书后附有参考答案．

全书共分 5 章：第 7 章空间解析几何与向量代数；第 8 章多元函数微分学；第 9 章多元函数积分学；第 10 章曲线积分与曲面积分；第 11 章无穷级数．

由于编者水平有限，再加上编写时间仓促，书中难免存在不妥之处，敬请各位专家及广大读者提出宝贵意见，以便修订时改进．

编　者
2025 年 5 月

目 录

第 7 章

空间解析几何与向量代数

在平面解析几何中，通过建立平面直角坐标系把平面上的点与有序实数对建立了一一对应关系，从而将平面上的图形与代数方程联系起来，进而用代数的方法研究几何问题. 空间解析几何也是依照类似的方法建立起空间中的点与有序数组间的一一对应关系，从而将空间图形与代数方程联系起来，并用代数的方法研究空间几何问题.

7.1 空间直角坐标系

为了使空间中的点或图形能够与数或方程建立起对应关系，我们首先要给出空间直角坐标系的概念.

7.1.1 空间直角坐标系的概念

定义 7.1 在空间中任取一点 O，过点 O 作三条两两垂直的数轴，其中点 O 称为坐标原点. 三条数轴分别是 x 轴(横轴)、y 轴(纵轴)、z 轴(竖轴)，它们三者间的方向符合右手定则，即右手握住 z 轴，食指所指的方向为 x 轴正方向，并拢的三指由 x 轴的正方向自然弯曲指向 y 轴的正方向，这时大拇指所指的方向就是 z 轴的正方向，如图 7-1 所示，把这三条数轴统称为坐标轴. 我们把由坐标原点 O 及符合右手定则的这三条坐标轴称为一个空间直角坐标系，如图 7-2 所示.

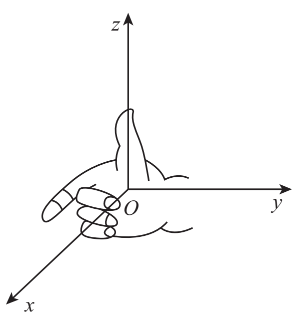


图 7-1

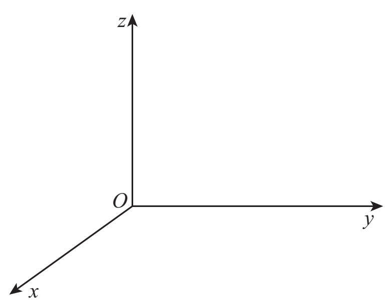


图 7-2

将平面 xOy，yOz，zOx 称为坐标平面. 三个坐标面将整个空间分成了八个部分，每一部分称为一个卦限. 由 x 轴、y 轴、z 轴的正方向所确定的空间称为第Ⅰ卦限；在 xOy 面上方的其余三个卦限按逆时针方向依次规定为第Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ卦限；在 xOy 面下方与第Ⅰ卦限所对的是第Ⅴ卦限；其余仍按逆时针方向依次规定为第Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ卦限. 如图 7-3 所示.

建立空间直角坐标系之后，我们就可以将空间中的点与数对应起来了.

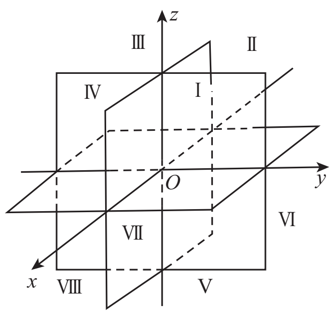


图 7-3

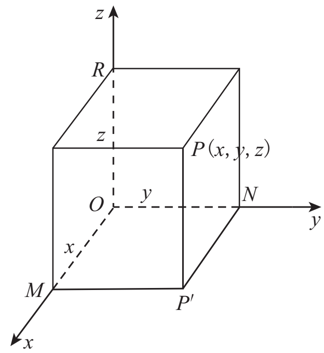


图 7-4

7.1.2　空间中点的坐标

设点 P 是空间中的任意一点，过 P 分别作 x 轴、y 轴、z 轴的垂面，分别交三个坐标轴于 M，N，R 三点，M，N，R 在数轴上分别对应于三个实数：x，y，z；反之，分别过 x 轴、y 轴、z 轴上的三点 M，N，R(M，N，R 分别对应三个数 x，y，z)的垂面也会相交于唯一一个点 P．于是，点 P 就与一组有序数 x，y，z 建立了一一对应关系，我们把这一组有序数 x，y，z 称为点 P 的坐标，记为 $P(x，y，z)$，如图 7-4 所示．

由点的坐标的定义，我们可以看出，每一卦限中的点满足如表 7-1 所示的特点．

表 7-1

卦限	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ	Ⅴ	Ⅵ	Ⅶ	Ⅷ
x,y,z 的符号	+,+,+	−,+,+	−,−,+	+,−,+	+,+,−	−,+,−	−,−,−	+,−,−

7.1.3　两点间的距离公式和中点坐标表示

设空间中有两点 $M_1(x_1，y_1，z_1)$和 $M_2(x_2，y_2，z_2)$，我们利用空间直角坐标系来讨论 M_1M_2 的长度及 M_1M_2 的中点 M 的坐标．

为此，我们可以分别过 M_1，M_2 作三条坐标轴的垂面，则该 6 个垂面将形成如图 7-5 所示的一个长方体，$|M_1M_2|$ 恰好是长方体的体对角线 M_1M_2 的长度．所以

$$|M_1M_2|^2=|M_1P|^2+|PN|^2+|NM_2|^2,$$

而

$$|M_1P|=x_2-x_1,$$
$$|PN|=y_2-y_1,$$
$$|NM_2|=z_2-z_1,$$

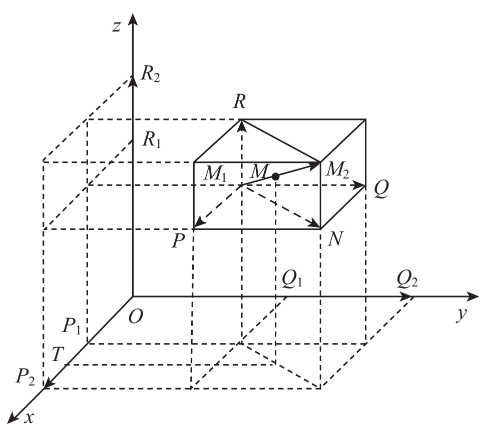


图 7-5

所以

$$|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

上式称为两点间的距离公式.

取 M_1M_2 的中点 M，过 M 作 x 轴的垂面交 x 轴于点 T，则点 T 是 P_1P_2 的中点，于是点 T 的坐标是$\dfrac{x_1+x_2}{2}$，所以点 M 的横坐标就是$\dfrac{x_1+x_2}{2}$，同理可求得点 M 的纵坐标和竖坐标分别为$\dfrac{y_1+y_2}{2}$和$\dfrac{z_1+z_2}{2}$，即 M_1M_2 的中点 M 的坐标为

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2},\ \frac{z_1+z_2}{2}\right).$$

例 试在 y 轴上求一点 M，使它到点 $A(-1, 2, 0)$和点 $B(1, 3, -2)$等距离，并求线段 AB 的中点 M'.

解 由于 M 在 y 轴上，所以设 M 点的坐标为$(0, y, 0)$，根据题意得 $|MA|=|MB|$，即

$$\sqrt{(-1-0)^2+(2-y)^2+(0-0)^2}=\sqrt{(1-0)^2+(3-y)^2+(-2-0)^2},$$

解得

$$y=\frac{9}{2},$$

故所求 M 点的坐标为$\left(0, \dfrac{9}{2}, 0\right)$.

设 AB 的中点 M'的坐标为(x', y', z')，根据中点坐标公式，得

$$x'=\frac{-1+1}{2}=0,$$

$$y'=\frac{2+3}{2}=\frac{5}{2},$$

$$z'=\frac{0+(-2)}{2}=-1,$$

即所求线段中点 M'的坐标为$\left(0, \dfrac{5}{2}, -1\right)$.

习题 7.1

1. 求点 $M(x, y, z)$分别关于 x 轴、y 轴、z 轴，xOy 坐标面、yOz 坐标面、zOx 坐标面以及原点对称的点的坐标.

2. 指出下列各点在空间中的位置：

(1) $(0, -2, 0)$； (2) $(1, -1, 0)$；

(3) $(2, 0, 0)$； (4) $(0, 0, 0)$；

(5) (1，-1，-1).

3. 设两点 M_1，M_2 的坐标分别为(4，-7，1)，(6，2，k)，它们间的距离 $|M_1M_2|$ 是 11，求点 M_2 的坐标及 M_1M_2 的中点 M 的坐标.

4. 设三角形 ABC 的三个顶点的坐标分别为(2，4，3)，(10，-1，6)，(4，1，9)，试证该三角形为等腰直角三角形.

7.2 向量代数

向量是解决数学、物理及工程技术等问题的有力工具，本节主要向大家介绍向量的相关概念及向量的线性运算.

7.2.1　向量的概念

在日常生活中，我们常会遇到两种类型的量：一类是只有大小的量，如长度、面积、温度、质量等；另一类是既有大小又有方向的量，如力、速度、位移等，我们把前一种类型的量称为数量或标量，后一种类型的量称为向量或矢量.

在几何上我们曾经学习过有向线段，它是一条既有长度又有方向的线段，于是，我们可以用有向线段来表示向量，即用有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向. 例如，以 A 为起点、B 为终点的向量可记为 $\overrightarrow{AB}$. 同时，向量也可以用黑体字母来表示，例如，向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 等；另外，在书写上，我们用在字母上方标注向右的箭头的形式表示向量，例如，向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 等.

在数学上我们所讨论的向量一般指的是自由向量，即只考虑其大小和方向，忽略位置的向量. 若两向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的大小和方向相等，则称两向量是相等的向量，记为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.

向量的大小称为向量的模，例如，向量 $\overrightarrow{AB}$ 的模可记为 $|\overrightarrow{AB}|$，向量 $\boldsymbol{a}$ 的模记为 $|\boldsymbol{a}|$. 其中模等于 1 的向量，称为单位向量，与 $\boldsymbol{a}$ 同向的单位向量记为 $\boldsymbol{a}^0$；模等于 0 的向量，称为零向量，记为 $\boldsymbol{0}$ 或 $\vec{0}$，零向量的方向是任意的.

当两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 所在的直线平行或垂直时，称两向量平行或垂直，记为 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 或 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

最后，给出两向量的夹角的定义.

定义 7.2　给定两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，将向量 $\boldsymbol{a}$ 或者 $\boldsymbol{b}$ 平移，使之有共同的起点，由一向量旋转到另一向量所转过的最小正角(θ)，称为两向量的夹角，记为($\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$)或($\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}$)，如图 7-6 所示. 可见，两向量的夹角范围是

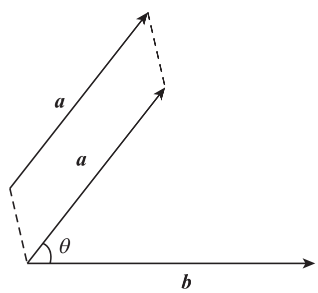


图 7-6

$$0\leqslant(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})\leqslant\pi.$$

7.2.2 向量的线性运算

1. 向量的和

我们曾经在物理课上学习过力的合成与分解，其实运用的就是有关向量的和或差的运算，在此基础上，我们给出向量的加法法则.

定义 7.3 (向量加法的平行四边形法则)已知两个不平行的非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，在平面上任取一点 O，作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，以 OA、OB 为邻边作平行四边形 $OACB$，则向量 $\overrightarrow{OC}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的和向量，记为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，如图 7-7 所示. 我们称这种求两向量和的方法为平行四边形法则.

由图 7-7 可见，$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{BC}$，如果将向量 $\boldsymbol{a}$ 直接平移到 $\overrightarrow{BC}$ 的位置，我们同样也能求得 $\overrightarrow{OC}$ 这个向量.

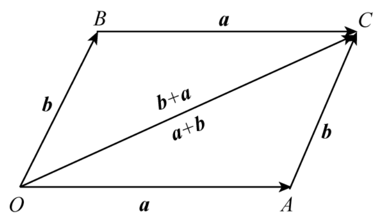


图 7-7

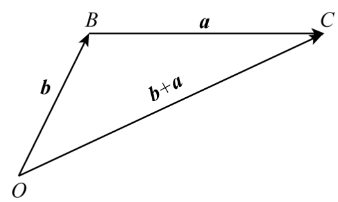


图 7-8

定义 7.4 (向量加法的三角形法则)已知两个不平行的非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，在平面上任取一点 O，作 $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，作 $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$，则向量 $\overrightarrow{OC}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的和向量，如图 7-8 所示. 我们称这种求两向量和的方法为三角形法则.

例 1 计算 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}$ 的和向量.

解 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}$.

由此可见，利用向量的三角形法则来计算向量的和是非常方便的.

利用向量的加法法则，可以来求向量的和，但向量的差如何来求呢？我们还是用向量的加法法则，只要规定向量的负向量即可.

如果某一向量与向量 $\boldsymbol{b}$ 的模相等，且方向与向量 $\boldsymbol{b}$ 的方向相反，那么称该向量为向量 $\boldsymbol{b}$ 的负向量，记为 $-\boldsymbol{b}$.

我们把向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $-\boldsymbol{b}$ 的和向量称为两向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的差向量，即 $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，记为 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，如图 7-9 所示.

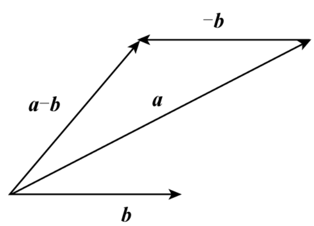


图 7-9

2. 数与向量的乘积

我们把数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积 $\lambda\boldsymbol{a}$ 称为数与向量的乘积. 它是一个与向量 $\boldsymbol{a}$ 平行的向量，该向量的模等于向量 $\boldsymbol{a}$ 的模的 $|\lambda|$ 倍，即

$$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|,$$

当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同；当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反；当 $\lambda=0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 就成了零向量，方向是任意的.

另外，数与向量的乘积有下面一个重要的结论：

定理 7.1　设向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，则向量 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}$ 的充分必要条件是存在唯一一个实数 λ，使得

$$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}.$$

证　充分性是显然的.

必要性　设 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}$. 取 $|\lambda|=\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$，当 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 同向时 λ 取正值；当 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 反向时 λ 取负值. 于是有 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

再证 λ 的唯一性　设 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}=\mu\boldsymbol{a}$，两式相减得

$$(\lambda-\mu)\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0},$$

即

$$|\lambda-\mu||\boldsymbol{a}|=0,$$

因为 $\boldsymbol{a}$ 是非零向量，所以

$$|\lambda-\mu|=0,$$

即

$$\lambda=\mu.$$

想一想：当定理中的“$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$”的条件去掉，结论还成立吗？

我们把向量的和运算及数与向量的乘积运算，称为向量的线性运算.

向量的线性运算满足如下的运算律：

（1）交换律：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$，

（2）结合律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$，

$\lambda(k\boldsymbol{a})=(\lambda k)\boldsymbol{a}$（其中 λ，k 是常数），

（3）分配律：$(\lambda+k)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{a}$，

$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$，其中 λ，k 是常数.

例 2　试用向量的线性运算证明：三角形的中位线平行于第三边且等于第三边的一半.

解　设 M，N 分别是 AB，AC 的中点，如图 7-10 所示. 根据向量的加法法则，知

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN},\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC},$$

因为 M，N 分别是 AB，AC 的中点，于是有

$$\overrightarrow{MA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA},\overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC},$$

故

$$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC},$$

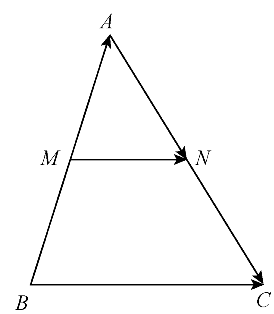


图 7-10

由数与向量乘法，得

$$\overrightarrow{MN}//\overrightarrow{BC}，且\ |\overrightarrow{MN}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}|，$$

即命题成立.

7.2.3 向量的坐标表示

1. 向量在轴上的投影

为了便于理解，我们首先给出空间一点在轴 u 上的投影的概念.

定义 7.5 已知空间中的点 A 和轴 u，过点 A 作一平面垂直相交轴 u 于点 A'，称点 A'为点 A 在轴 u 上的投影，如图 7-11 所示.

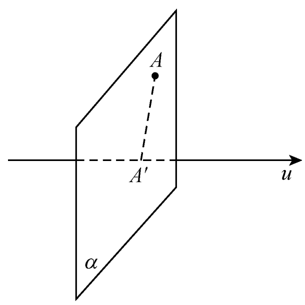


图 7-11

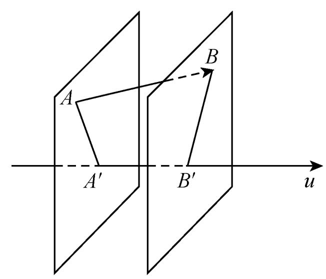


图 7-12

于是，向量在轴上的投影可以表述为：

定义 7.6 已知向量 $\overrightarrow{AB}$ 的起点 A 和终点 B 在轴 u 上的投影分别为 A'和 B'，我们把 $A'B'$在轴 u 上的数量称为向量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 u 上的投影，如图 7-12 所示，记为 $\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{AB}$. 如果轴 u 是数轴，设 A'，B'在数轴上的坐标分别为 u_1 和 u_2，那么 $A'B'$的数量应是 u_2-u_1，即

$$\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{AB}=u_2-u_1.$$

向量在轴上的投影有下面的性质：

性质 1 向量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 u 上的投影等于向量的模与向量和轴 u 夹角 θ 余弦的乘积，即

$$\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}|\cos\theta.$$

性质 2 两个向量的和向量在轴 u 上的投影等于各个向量在轴 u 上投影的和，即

$$\mathrm{Prj}_u(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}+\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{b}.$$

此性质还可以推广到任意有限个的情况，即

$$\mathrm{Prj}_u(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n)=\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}_1+\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}_2+\cdots+\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}_n.$$

性质 3 数与向量乘积在轴 u 上的投影等于数乘向量在轴 u 上的投影，即

$$\mathrm{Prj}_u(\lambda\boldsymbol{a})=\lambda\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}（其中\ \lambda\ 是常数）.$$

2. 向量的坐标表示

前面我们学习了用向量的平行四边形法则或三角形法则来表示向量的和、差运算，但

要更深入地研究向量以及用向量解决实际问题的话，还需借助于代数的方法．为此，我们要引入向量的坐标概念，并用向量的坐标表示向量的各种运算．

在空间直角坐标系中，分别引入 x 轴、y 轴、z 轴正方向上的三个单位向量 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$，称此三个单位向量为基本单位向量，这样就建立了一个空间直角向量坐标系，如图 7-13 所示．

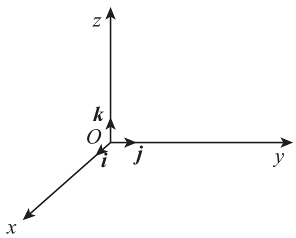


图 7-13

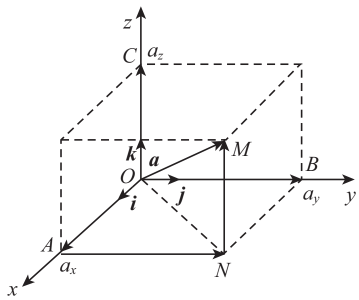


图 7-14

设空间中有一任意向量 $\boldsymbol{a}$，将 $\boldsymbol{a}$ 平移后，使得 $\boldsymbol{a}$ 的起点与坐标原点 O 重合，如图 7-14 所示．

若点 M 的坐标为(a_x, a_y, a_z)，由点在轴上的投影可知，点 M 在 x 轴、y 轴、z 轴上的投影分别为 $A(a_x, 0, 0)$、$B(0, a_y, 0)$、$C(0, 0, a_z)$，由向量的加法法则，得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OM}&=\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{NM}\\&=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC},\end{aligned}$$

又因为 $\overrightarrow{OA}=a_x\boldsymbol{i}$，$\overrightarrow{OB}=a_y\boldsymbol{j}$，$\overrightarrow{OC}=a_z\boldsymbol{k}$，所以

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}.$$

上式称为向量 $\boldsymbol{a}$ 按基本单位向量的分解式；向量 $a_x\boldsymbol{i}$、$a_y\boldsymbol{j}$、$a_z\boldsymbol{k}$ 分别称为向量 $\boldsymbol{a}$ 在 x 轴、y 轴、z 轴上的分向量．

根据向量在轴上投影的定义，有

$$\mathrm{Prj}_x\boldsymbol{a}=a_x,\quad \mathrm{Prj}_y\boldsymbol{a}=a_y,\quad \mathrm{Prj}_z\boldsymbol{a}=a_z,$$

即 a_x，a_y，a_z是向量 $\boldsymbol{a}$ 分别在 x 轴、y 轴、z 轴上的投影．

由此看来，向量 $\boldsymbol{a}$ 与一组有序数 a_x，a_y，a_z相对应；反之，给定一组有序数 a_x，a_y，a_z，按照上述相反的过程同样能确定一个向量 $\boldsymbol{a}$．这样，向量 $\boldsymbol{a}$ 就与一组有序数 a_x，a_y，a_z建立了一一对应关系．从而有下面的定义：

定义 7.7　设向量 $\boldsymbol{a}$ 在 x 轴、y 轴、z 轴上的投影分别为 a_x，a_y，a_z，于是有

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$$

成立，这时称 a_x，a_y，a_z为向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标，记为 $\boldsymbol{a}=\{a_x, a_y, a_z\}$．

另外，上式 $\boldsymbol{a}=\{a_x, a_y, a_z\}$又称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标表达式．显然，$\boldsymbol{a}=\{a_x, a_y, a_z\}$与 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$ 是同一向量的两种不同表达形式，两种形式是等价的．

例 3 已知两点 $M(x_1, y_1, z_1)$，$N(x_2, y_2, z_2)$，$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{MN}$，求：

(1) 向量 $\boldsymbol{a}$ 在三坐标轴上的投影；

(2) 向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标.

解 (1)因为 M，N 的横坐标分别是 x_1，x_2，所以

$$\mathrm{Prj}_x\boldsymbol{a}=x_2-x_1,$$

同理，可得

$$\mathrm{Prj}_y\boldsymbol{a}=y_2-y_1,\quad \mathrm{Prj}_z\boldsymbol{a}=z_2-z_1.$$

(2) 由向量的坐标定义可知

$$\boldsymbol{a}=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k},$$

所以，向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标为

$$\{x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1\}.$$

可见，任一向量的坐标等于其终点与起点相应坐标的差. 同时，若已知向量 $\boldsymbol{a}=\{a_x, a_y, a_z\}$，$\boldsymbol{b}=\{b_x, b_y, b_z\}$及数 λ，则两向量之间的线性运算可以表示为：

$$\boldsymbol{a}\pm\lambda\boldsymbol{b}=\{a_x\pm\lambda b_x,\ a_y\pm\lambda b_y,\ a_z\pm\lambda b_z\}.$$

3. 向量的模与方向角

(1) 向量模的坐标表示

设向量 $\boldsymbol{a}=\{a_x, a_y, a_z\}$，把向量 $\boldsymbol{a}$ 平移，使得向量 $\boldsymbol{a}$ 的起点与坐标原点 O 重合，同时设这时的终点为 M，如图 7-15 所示，则 M 的坐标为 $M(a_x, a_y, a_z)$，由两点间的距离公式，得

$$|\boldsymbol{a}|=|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{(a_x-0)^2+(a_y-0)^2+(a_z-0)^2}=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2},$$

上式即为向量的模的坐标表达式. 同理，我们还可以得到：起点是 $M(x_1, y_1, z_1)$，终点是 $N(x_2, y_2, z_2)$的向量 $\overrightarrow{MN}$ 的模为

$$|\overrightarrow{MN}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

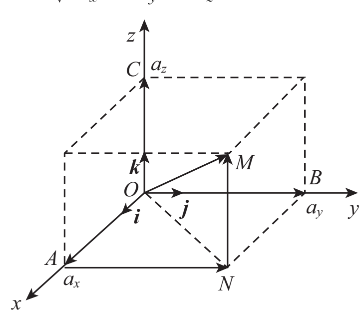


图 7-15

(2) 向量的方向角与方向余弦

设向量 $\boldsymbol{a}$ 为非零向量，则向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向可由它与三条坐标轴正向的夹角 α，β，γ 来唯一确定，称角 α，β，γ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向角.

下面讨论有关方向角的表示和性质.

设非零向量 $\boldsymbol{a}=\{a_x, a_y, a_z\}$，$\alpha$，$\beta$，$\gamma$ 是它关于 x 轴、y 轴、z 轴的方向角. 由向量在轴上的投影性质 1，知

$$\mathrm{Prj}_x\boldsymbol{a}=a_x=|\boldsymbol{a}|\cos\alpha,$$

即

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},$$

同理，可得

$$\cos\beta=\frac{a_y}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{a_z}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}.$$

这时称 $\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦或向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向数．显然，一个向量的方向余弦满足：

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

且 $\boldsymbol{a}^0=\{\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma\}$是 $\boldsymbol{a}$ 的同方向上的单位向量．

例 4　设有两点 $A(1,\ 2,\ -3)$，$B(-1,\ 1,\ 2)$，求向量 $\overrightarrow{AB}$ 的模和方向余弦．

解　因为 $\overrightarrow{AB}=\{-1-1,\ 1-2,\ 2-(-3)\}=\{-2,\ -1,\ 5\}$，所以该向量的模为

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-2)^2+(-1)^2+5^2}=\sqrt{30},$$

于是，向量 $\overrightarrow{AB}$ 的方向余弦分别为

$$\cos\alpha=\frac{-2}{\sqrt{30}},\quad \cos\beta=\frac{-1}{\sqrt{30}},\quad \cos\gamma=\frac{5}{\sqrt{30}}.$$

习题 7.2

1. 设向量 $\boldsymbol{a}=\{1,\ 2,\ -2\}$，求向量 $\boldsymbol{a}$ 的模 $|\boldsymbol{a}|$ 及与向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向上的单位向量 $\boldsymbol{a}^0$．
2. 求平行于 $\boldsymbol{a}=\{-1,\ 1,\ 2\}$的单位向量 $\boldsymbol{a}^0$．
3. 用向量的线性运算来证明对角线互相平分的四边形是平行四边形．
4. 向量 $\boldsymbol{\alpha}=\{2,\ \lambda,\ 5\}$与向量 $\boldsymbol{\beta}=\{4,\ 2,\ 10\}$平行，求实数 λ．
5. 设点 $A(1,\ 0,\ -1)$，$B(-1,\ 2,\ 3)$，求向量 $\overrightarrow{AB}$ 的坐标及模 $|\overrightarrow{AB}|$．
6. 求与 z 轴正方向相反，模为 5 的向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标．
7. 设向量 $\boldsymbol{a}$ 在 x 轴和 y 轴上的投影分别是-1，2，且向量 $\boldsymbol{a}$ 的模是$\sqrt{14}$，写出该向量按基本单位向量的分解式．
8. 已知点 $A(0,\ -1,\ -2)$，$B(1,\ 2,\ -1)$，求：

(1) 向量 $\overrightarrow{AB}$ 在三坐标轴上的投影；

(2) 向量 $\overrightarrow{AB}$ 的坐标．

9. 已知向量 $\overrightarrow{AB}=\{4,\ 0,\ -3\}$，$B$ 点的坐标是$(2,\ 0,\ 2)$，求：

(1) 点 A 的坐标；

(2) 模 $|\overrightarrow{AB}|$；

(3) 向量 $\overrightarrow{AB}$ 的方向余弦.

10. 设向量 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{c}=5\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$，求向量 $\boldsymbol{d}=\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c}$ 在三坐标轴上的投影.

11. 设向量 $\boldsymbol{a}$ 与各坐标轴成相等的锐角，且 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{6}$，求向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标.

7.3 向量的数量积和向量积

两向量间的乘法运算分数量积和向量积两种，下面分别讨论它们的定义、运算及性质. 首先，我们由物理中功的求法，引入两向量的数量积的概念.

7.3.1 两向量的数量积

引例 1 如图 7-16 所示，一个物体在恒力 $\boldsymbol{F}$ 的作用下，沿直线从 A 点运动到了 B 点，其中 A 到 B 的位移是 $\boldsymbol{s}$，力 $\boldsymbol{F}$ 与位移 $\boldsymbol{s}$ 的夹角为 θ，问：在该过程中力 $\boldsymbol{F}$ 对物体所做的功是多少？

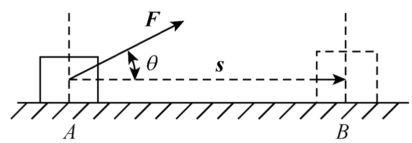


图 7-16

分析 由物理知识，容易得到

$$W=|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{s}|\cos\theta,$$

$\boldsymbol{F}$，$\boldsymbol{s}$ 是两个向量(矢量)，而 W 是一个数量(标量).

在实际问题中，我们也时常会遇到类似计算功的这种情况，为此，引入两向量的数量积的概念.

1. 数量积的定义及性质

定义 7.8 设两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，它们的模及夹角余弦的乘积称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积(又称点积或内积)，记为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}),$$

依照此定义，力 $\boldsymbol{F}$ 对物体所做的功 W 可以简记为

$$W=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}.$$

再利用向量在轴上的投影性质 1，得

$$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}),\quad \mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}),$$

所以

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}.$$

另外，由数量积的定义，我们还能得到数量积具有下面的性质：

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{a}|^2$.

(2) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{0}=0$.

(3) 交换律：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$.

(4) 分配律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$.

(5) 结合律：$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$(其中 λ 是常数).

2. 两向量数量积的坐标表示

设向量 $\boldsymbol{a}=\{a_x, a_y, a_z\}$，向量 $\boldsymbol{b}=\{b_x, b_y, b_z\}$，由数量积的性质，可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=a_x\boldsymbol{i}\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})+a_y\boldsymbol{j}\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})+a_z\boldsymbol{k}\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=a_x\boldsymbol{i}\cdot b_x\boldsymbol{i}+a_x\boldsymbol{i}\cdot b_y\boldsymbol{j}+a_x\boldsymbol{i}\cdot b_z\boldsymbol{k}+a_y\boldsymbol{j}\cdot b_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}\cdot b_y\boldsymbol{j}+a_y\boldsymbol{j}\cdot b_z\boldsymbol{k}\\&\quad+a_z\boldsymbol{k}\cdot b_x\boldsymbol{i}+a_z\boldsymbol{k}\cdot b_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}\cdot b_z\boldsymbol{k}\\&=a_xb_x\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}+a_xb_y\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}+a_xb_z\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}+a_yb_x\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}+a_yb_y\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}+a_yb_z\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}\\&\quad+a_zb_x\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}+a_zb_y\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}+a_zb_z\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k},\end{aligned}$$

又因为

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1,$$
$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}=0,$$

所以

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.$$

上式称为两向量数量积的坐标表示式，此式表明，两向量的数量积等于它们对应坐标乘积的和.

由数量积的定义可知，

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}).$$

由两向量数量积的坐标表示式，我们可以求得两向量之间的夹角余弦，进而能求得它们的夹角 θ，即

$$\cos(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})=\cos\theta=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}},$$

$$\theta=\arccos\left(\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}\right).$$

可见，若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则有$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})=\dfrac{\pi}{2}$，即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，亦有 $a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$. 反之也成立，因此得到下面的定理：

定理 7.2　向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直的充分必要条件是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，即

$$a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0.$$

这说明，当两向量垂直时，它们对应坐标乘积的和为零. 利用此定理，可以判断两向量是否垂直.

例 1　已知向量 $\boldsymbol{a}=\{1, 1, -4\}$，$\boldsymbol{b}=\{1, -2, 2\}$，求：

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$；(2)向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的夹角；(3)向量 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影 $\mathrm{Prj}_b\boldsymbol{a}$；(4)向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 是否垂直？

解　(1) 由数量积的坐标表示式，得

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1\times1+1\times(-2)+(-4)\times2=-9.$$

(2) 设两向量的夹角为 θ，由数量积的定义，得

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{-9}{\sqrt{1^2+1^2+(-4)^2}\cdot\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}},$$

所以两向量的夹角为

$$\theta=\frac{3\pi}{4}.$$

(3) 因为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\mathrm{Prj}_b\boldsymbol{a}$，所以

$$\mathrm{Prj}_b\boldsymbol{a}=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\frac{-9}{3}=-3.$$

(4) 由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-9\neq0$ 可知，向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 不垂直.

7.3.2 两向量的向量积

我们仍然可以从一个物理问题引入向量积的概念.

引例 2 如图 7-17 所示，设有一正电荷 q 以速度 $\boldsymbol{v}$ 在匀强磁场 $\boldsymbol{B}$ 中运动，且电荷 q 的运动方向与该点的磁场 $\boldsymbol{B}$ 的正向成 α 角，问：该点电荷在磁场内受到的洛伦兹力是多少？

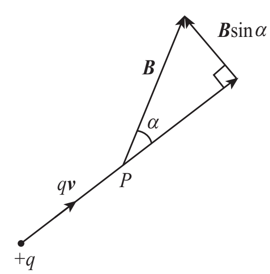


图 7-17

分析 由物理知识，得

电荷所受到的洛伦兹力 $\boldsymbol{f}$ 的大小是

$$|\boldsymbol{f}|=q|\boldsymbol{v}||\boldsymbol{B}|\sin\alpha$$

方向符合右手定则，即 $\boldsymbol{f}$ 同时垂直于 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 所在的平面.

如果抛开此问题的具体含义，其实就是表达了两向量的向量积的概念.

1. 向量积的定义和性质

定义 7.9 设两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积(又称叉积或外积)是一个向量，记为 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，它满足下列条件：

(1) $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$；

(2) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{a}$ 且 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{b}$ 且 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 满足右手定则.

依照此定义，引例 2 中的洛伦兹力 $\boldsymbol{f}$ 可以简记为

$$\boldsymbol{f}=q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}.$$

另外，由向量积的定义，我们还能得到向量积具有下面的性质：

(1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$.

(2) 反交换律：$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$.

(3) 与数乘的结合律：$(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})$(其中 λ 是常数).

(4) 分配律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$.

2. 两向量的向量积的坐标表示

设向量 $\boldsymbol{a}=\{a_x, a_y, a_z\}$，向量 $\boldsymbol{b}=\{b_x, b_y, b_z\}$，由向量积的性质，可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} &=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\times(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=a_x\boldsymbol{i}\times(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})+a_y\boldsymbol{j}\times(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})+a_z\boldsymbol{k}\times(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=a_x\boldsymbol{i}\times b_x\boldsymbol{i}+a_x\boldsymbol{i}\times b_y\boldsymbol{j}+a_x\boldsymbol{i}\times b_z\boldsymbol{k}+a_y\boldsymbol{j}\times b_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}\times b_y\boldsymbol{j}+a_y\boldsymbol{j}\times b_z\boldsymbol{k}\\&\quad+a_z\boldsymbol{k}\times b_x\boldsymbol{i}+a_z\boldsymbol{k}\times b_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}\times b_z\boldsymbol{k}\\&=a_xb_x\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}+a_xb_y\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}+a_xb_z\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}+a_yb_x\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}+a_yb_y\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}+a_yb_z\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}\\&\quad+a_zb_x\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}+a_zb_y\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}+a_zb_z\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k},\end{aligned}$$

又因为

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0},$$

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{j},$$

所以

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(a_yb_z-a_zb_y)\boldsymbol{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\boldsymbol{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\boldsymbol{k}.$$

上式可以写成一个三阶行列式，我们可以利用三阶行列式的对角线算法帮助记忆，即

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}.$$

例 2　求同时垂直于向量 $\boldsymbol{a}=\{2, 2, 1\}$和 $\boldsymbol{b}=\{4, 5, 3\}$的单位向量 $\boldsymbol{c}^0$.

解　由向量积的定义可知，向量$\pm(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$与向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 同时垂直，于是有

$$\pm(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\pm\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 2 & 2 & 1\\ 4 & 5 & 3\end{vmatrix}=\pm(\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}),$$

又因为

$$|\pm(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})|=\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}=3,$$

所以，同时垂直于向量 $\boldsymbol{a}=\{2, 2, 1\}$和 $\boldsymbol{b}=\{4, 5, 3\}$的单位向量 $\boldsymbol{c}^0$ 为

$$\boldsymbol{c}^0=\pm\frac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|}=\pm\frac{1}{3}(\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k})=\pm\frac{1}{3}\{1, -2, 2\}.$$

由向量积的定义

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}),$$

可知，当 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 时，$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})=0$ 或$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})=\pi$，此时 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，即

$$(a_yb_z-a_zb_y)\boldsymbol{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\boldsymbol{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}.$$

反之也成立，因此得到下面的定理：

定理 7.3　向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行的充分必要条件是 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，即

$$\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}.$$

这说明，当两向量平行时，它们的坐标对应成比例. 利用此定理，可以判断两向量是否平行.

例 3 求以点 $A(1, 2, 3)$，$B(0, 0, 1)$，$C(3, -1, 0)$为顶点的三角形的面积.

解 由于 $\overrightarrow{AB}=\{-1, -2, -2\}$，$\overrightarrow{AC}=\{2, -3, -3\}$，所以

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -1 & -2 & -2 \\ 2 & -3 & -3 \end{vmatrix}=-7\boldsymbol{j}+7\boldsymbol{k},$$

故

$$|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\sqrt{(-7)^2+7^2}=7\sqrt{2},$$

所以，所求三角形的面积为

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin A=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\frac{7\sqrt{2}}{2}.$$

例 4 已知 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n}$，其中 $\boldsymbol{m}$，$\boldsymbol{n}$ 是两个互相垂直的单位向量，求：(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$；(2) $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$.

解 (1) 由数量积的定义及性质，得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=(2\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n})\cdot(\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n})\\&=2\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{m}-2\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}+\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}\\&=2|\boldsymbol{m}|^2-\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}-|\boldsymbol{n}|^2,\end{aligned}$$

又因为 $\boldsymbol{m}\perp\boldsymbol{n}$，且 $|\boldsymbol{m}|=|\boldsymbol{n}|=1$，所以

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2-1=1.$$

(2) 由向量积的定义及性质，得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=(2\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n})\times(\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n})\\&=2\boldsymbol{m}\times(\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n})+\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n})\\&=2\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{m}-2\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}+\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}\\&=-2\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}+\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{m}=2\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{m}\\&=3\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{m},\end{aligned}$$

于是

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|3\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{m}|=3|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{m}|\sin(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{m}),$$

因为 $\boldsymbol{m}\perp\boldsymbol{n}$，且 $|\boldsymbol{m}|=|\boldsymbol{n}|=1$，所以

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=3.$$

*7.3.3 向量的混合积

定义 7.10 已知三个向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$，如果先作向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的向量积 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，再把所得的向量与第三个向量 $\boldsymbol{c}$ 作数量积$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$，我们把所得的这个数量积称为三向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 的混合积，记为$[\boldsymbol{abc}]$.

下面根据混合积的定义推导混合积的坐标表示式.

设向量 $\boldsymbol{a}=\{a_x, a_y, a_z\}$，$\boldsymbol{b}=\{b_x, b_y, b_z\}$，$\boldsymbol{c}=\{c_x, c_y, c_z\}$，因为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} &=(a_yb_z-a_zb_y)\boldsymbol{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\boldsymbol{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\boldsymbol{k}\\ &=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\boldsymbol{k},\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{abc}]=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}&=c_x\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}-c_y\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}+c_z\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\\ &=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}.\end{aligned}$$

向量混合积的几何意义，可以这样理解：

向量的混合积$[\boldsymbol{abc}]=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ 是一个数，它的绝对值表示以向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 为棱的平行六面体的体积，如图 7-18 所示.

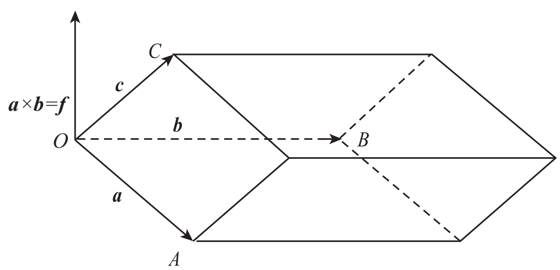


图 7-18

组成混合积$[\boldsymbol{abc}]$的三个向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 组成右手系，若向量 $\boldsymbol{c}$ 的方向是按右手定则从向量 $\boldsymbol{a}$ 转向向量 $\boldsymbol{b}$，即大拇指所指的方向，则该混合积是正值；相反则是负值.

事实上，设 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$. 按向量积的定义，向量积 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{f}$ 是一个向量，它的模在数值上等于以向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积，同时向量 $\boldsymbol{f}$ 垂直于这个平行四边形所在的平面，当 $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{f}$ 夹角为锐角(满足右手定则)时，由数量积知，此值应为正值，混合积$[\boldsymbol{abc}]$是正的；反之，当 $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{f}$ 夹角为钝角(不满足右手定则)时，由数量积知，此值为负值，混合积$[\boldsymbol{abc}]$是负的.

因此，由混合积的几何意义知，如果求以向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 为棱的平行六面体的体积，该体积可以表示成

$$V=|[\boldsymbol{abc}]|.$$

同时，我们得到判定三向量是否共面的一个定理.

定理 7.4　三向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 共面的充分必要条件是它们的混合积$[\boldsymbol{abc}]=0$，即

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=0.$$

证明略.

例 5 已知 $A(1,2,0)$、$B(2,3,1)$、$C(4,2,2)$和 $D(x,y,z)$四点共面，试求点 D 的坐标 x，y，z 所满足的关系式.

解 已知 A、B、C、D 四点共面，这就相当于三个向量 $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$、$\overrightarrow{AD}$ 共面，由已知条件得

$$\overrightarrow{AB}=\{1,1,1\},\overrightarrow{AC}=\{3,0,2\},\overrightarrow{AD}=\{x-1,y-2,z\},$$

根据三向量共面的充要条件，得

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}=0,$$

解得

$$2x+y-3z-4=0,$$

即当 A、B、C、D 四点共面时，点 D 的坐标 x，y，z 所满足的关系式是 $2x+y-3z-4=0$.

习题 7.3

1. 已知三点 $A(-1,2,3)$，$B(1,1,1)$，$C(0,0,5)$，求$\angle ABC$.
2. 若向量 $\boldsymbol{a}=\{-1,1,0\}$，$\boldsymbol{b}=\{2,1,-2\}$，求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 及 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$ 的值.
3. 求与向量 $\boldsymbol{a}=-3\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k}$ 和 y 轴同时垂直的向量.
4. 已知向量 $\boldsymbol{m}$ 和 $\boldsymbol{n}$，其中$(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n})=\dfrac{\pi}{3}$，$|\boldsymbol{m}|=1$，$|\boldsymbol{n}|=2$；又知 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{m}+2\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{m}-4\boldsymbol{n}$，求以 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积.
5. 试证明向量 $\boldsymbol{a}=\{1,0,1\}$与向量 $\boldsymbol{b}=\{-1,1,1\}$相互垂直.

*6. 求不共面四点 $A(x_1,y_1,z_1)$、$B(x_2,y_2,z_2)$、$C(x_3,y_3,z_3)$和 $D(x_4,y_4,z_4)$所构成的四面体的体积.

7.4 平面与空间直线

有了前面空间直角坐标系和向量代数的一些基本知识，从本节起，我们就来讨论空间中的一些简单图形的方程及关系等问题.

7.4.1　图形与方程

在平面解析几何中，我们把图形看作是动点按某种规律运动形成的点的轨迹，同样，在空间解析几何中的图形仍可看作动点运动形成的轨迹．这样一来，我们就可以将图形数量化：

若曲面 S(图形)与方程 $F(x, y, z)=0$(数量、规律)具有如下的关系：

(1) 曲面 S 上任一点的坐标满足方程 $F(x, y, z)=0$；

(2) 以方程 $F(x, y, z)=0$ 的解为坐标的点都在曲面 S 上．

则称方程 $F(x, y, z)=0$ 是曲面 S 的方程；曲面 S 是方程 $F(x, y, z)=0$ 的轨迹或图形．如图 7-19 所示．

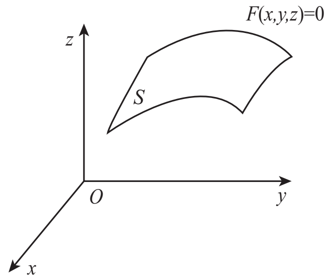


图 7-19

在空间中，平面和直线是最基本、最简单的几何图形，我们对空间图形的了解就从它们开始．

7.4.2　平面

在高中立体几何中，有这样一条定理：过空间中一点且与已知直线垂直的平面是唯一的．依据此定理，我们就能得到平面的方程．

1. 平面的方程

为了表述方便，我们首先引入平面法向量的概念．

定义 7.11　设非零向量 $\boldsymbol{n}=\{A, B, C\}$垂直于平面 π，则向量 $\boldsymbol{n}=\{A, B, C\}$叫作平面 π 的一个法向量．

显然，平面的法向量不是唯一的．

设平面 π 过点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$，向量 $\boldsymbol{n}=\{A, B, C\}$(其中 A, B, C 不全为零)是平面的一个法向量．如图 7-20 所示．

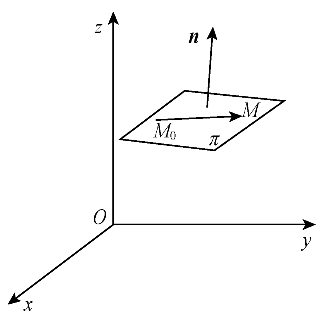


图 7-20

如果在平面上任取一点 $M(x, y, z)$，那么 $\overrightarrow{M_0M}$ 就是平面上的任意一向量，因为 $\boldsymbol{n}$ 是平面π 的法向量，所以 $\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{M_0M}$，从而

$$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{M_0M}=0.$$

由数量积的坐标表示，得

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \tag{1}$$

反之，如果满足(1)式的点 $M(x, y, z)$能得到 $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{M_0M}=0$，即 $\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{M_0M}$，这表明动点 M 在平面上．于是，方程(1)是平面 π 的方程，我们把此方程称为平面的点法式方程．

例 1 求过点(1，2，3)，且与向量 $\boldsymbol{n}=\{1,-1,1\}$ 垂直的平面方程.

解 由题意知，向量 $\boldsymbol{n}=\{1,-1,1\}$ 是平面的法向量，根据平面的点法式方程，得

$$1(x-1)-1(y-2)+1(z-3)=0,$$

即

$$x-y+z-2=0.$$

例 2 设平面过三点 $A(a,0,0)$，$B(0,b,0)$，$C(0,0,c)$(其中 a，b，c 非零)如图 7-21 所示，求该平面的方程.

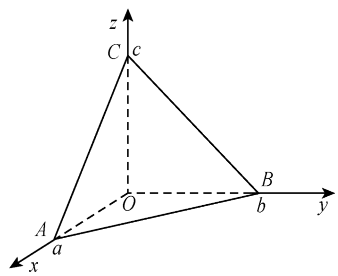


图 7-21

解 由已知条件，得

$$\overrightarrow{AB}=\{-a,b,0\},\overrightarrow{AC}=\{-a,0,c\},$$

根据向量积的定义，得该平面的法向量 $\boldsymbol{n}$ 为

$$\boldsymbol{n}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ -a & b & 0\\ -a & 0 & c\end{vmatrix}=bc\boldsymbol{i}+ca\boldsymbol{j}+ab\boldsymbol{k}=\{bc,ca,ab\},$$

故所求平面的方程为

$$bc(x-a)+ca(y-0)+ab(z-0)=0,$$

即

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1. \tag{2}$$

上式(2)被称为平面的截距式方程，其中 a，b，c 称为平面在三坐标轴上的截距.

另外，我们不管是对平面的点法式方程还是截距式方程变形，都能得到一个三元一次方程，即

$$Ax+By+Cz+D=0. \tag{3}$$

反之，上式(3)通过适当变换后，也能化成(1)或(2)的形式，它同样也表示一个平面，于是，我们称方程(3)为平面的一般式方程.

下面，通过平面的一般式方程讨论几种特殊位置的平面.

(1) 当 $A=0$，$D\neq 0$ 时，方程(3)变为 $By+Cz+D=0$，它所表示的是一个平行于 x 轴的平面，如图 7-22(1)所示.

(2) 当 $A=0$，$D=0$ 时，方程(3)变为 $By+Cz=0$，它所表示的是一个过 x 轴的平面，如图 7-22(2)所示.

(3) 当 $A=0$，$B=0$ 时，方程(3)变为 $Cz+D=0$，它所表示的是一个平行(或重合)于 xOy 坐标面(即与 z 轴垂直)的平面，如图 7-22(3)所示.

(4) 当 $D=0$ 时，方程(3)变为 $Ax+By+Cz=0$，它所表示的是一个过原点的平面，如图 7-22(4)所示.

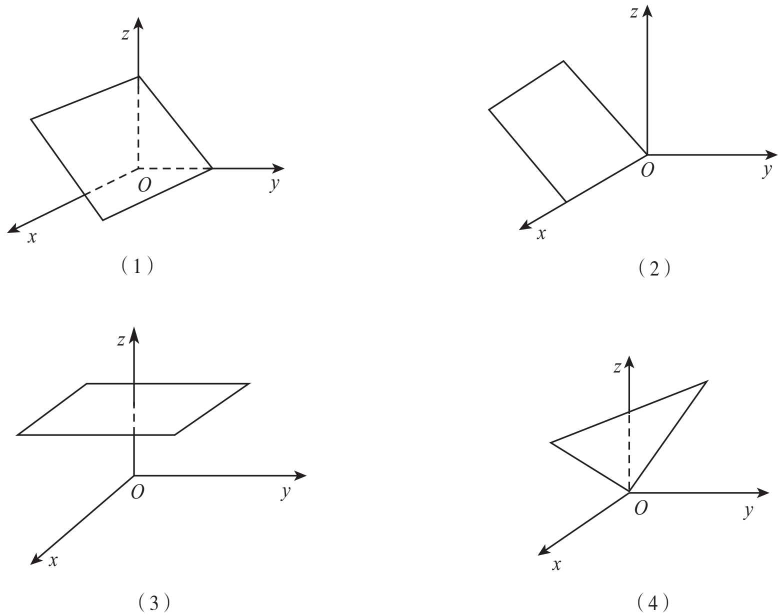


图 7-22

对于其他情况，有兴趣的读者可以自己尝试一下.

例 3　求过点 $A(1, -5, 1)$ 及点 $B(3, 2, -2)$，且与 xOz 坐标面垂直的平面方程.

解　因为平面与 xOz 坐标面垂直，所以该平面一定与 y 轴平行，于是设平面方程为

$$Ax+Cz+D=0,$$

又知道平面过点 $A(1, -5, 1)$ 及点 $B(3, 2, -2)$，所以点的坐标满足方程，于是有

$$\begin{cases} A+C+D=0, \\ 3A-2C+D=0, \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} A=-\dfrac{3}{5}D, \\ C=-\dfrac{2}{5}D, \end{cases}$$

于是，所求平面的方程为

$$-\frac{3}{5}Dx-\frac{2}{5}Dz+D=0,$$

即

$$3x+2z-5=0.$$

2. 点到平面的距离

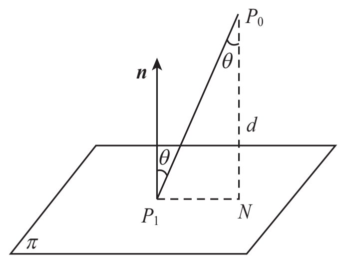


图 7-23

设平面 π 的方程为 $Ax+By+Cz+D=0$，平面外一点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$，过 P_0 作平面 π 的垂线，垂足为 N，如图 7-23 所示．则 P_0 到平面 π 的距离 $d=|\overrightarrow{NP_0}|$．

在平面 π 内任取一点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$，得向量 $\overrightarrow{P_1P_0}=\{x_0-x_1, y_0-y_1, z_0-z_1\}$，由 $\overrightarrow{NP_0}$ 垂直于平面 π 知，向量 $\overrightarrow{NP_0}$ 是平面 π 的一个法向量，又知平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}=\{A, B, C\}$，所以不妨设 $\overrightarrow{NP_0}=\{A, B, C\}$，由图 7-23 可见

$$d=|\overrightarrow{NP_0}|=|\overrightarrow{P_1P_0}|\cos\theta,$$

而

$$|\overrightarrow{P_1P_0}\cdot\boldsymbol{n}|=|\overrightarrow{P_1P_0}||\boldsymbol{n}||\cos\theta|=|\boldsymbol{n}|d,$$

所以

$$\begin{aligned}d=\frac{|\overrightarrow{P_1P_0}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}&=\frac{|A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)+C(z_0-z_1)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\\&=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0-(Ax_1+By_1+Cz_1)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\end{aligned}$$

又因为

$$Ax_1+By_1+Cz_1+D=0,$$

所以

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

上式为点到平面的距离公式．

例 4 求点 $A(1, 2, 3)$ 到平面 π：$2x+y-3z=2$ 的距离．

解 $2x+y-3z=2$ 化为一般式方程为 $2x+y-3z-2=0$．由点到平面的距离公式，得

$$\begin{aligned}d&=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\\&=\frac{|2\times1+1\times2-3\times3-2|}{\sqrt{2^2+1^2+(-3)^2}}=\frac{\sqrt{14}}{2}.\end{aligned}$$

此题表明，当运用点到平面的距离公式时，一定要注意将平面方程化成平面的一般式方程的标准形式.

3. 两平面的夹角

因为在立体几何中规定了两平面的夹角范围是 $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$，所以在利用向量来表示两平面的夹角时，要取两向量的 $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ 上的夹角，于是我们可以这样来定义两平面的夹角：

两平面的法向量的夹角(在 $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ 上的)称为两平面的夹角.

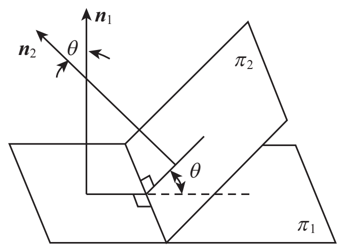


图 7-24

若平面 π_1：$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ 与平面 π_2：$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ 相交，如图 7-24 所示，下面来求它们的夹角 θ.

由于平面 π_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=\{A_1,\ B_1,\ C_1\}$，平面 π_2 的法向量为 $\boldsymbol{n}_2=\{A_2,\ B_2,\ C_2\}$，则两法向量的夹角满足

$$\cos(\boldsymbol{n}_1,\ \boldsymbol{n}_2)=\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}},$$

因为两平面的夹角 θ 满足

$$\cos\theta=|\cos(\boldsymbol{n}_1,\ \boldsymbol{n}_2)|,$$

所以

$$\cos\theta=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

上式称为两平面间的夹角公式.

由两平面间的夹角公式可以看出：

(1) 当平面 π_1 与平面 π_2 垂直时，$\theta=\frac{\pi}{2}$，则 $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$；

(2) 当平面 π_1 与平面 π_2 平行时，$\theta=0$ 或 π，则 $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$.

7.4.3　直线

根据过已知点且与已知直线平行的直线是唯一的这一事实，我们可以确定直线的方程.

1. 直线与方程

同样，为了表述方便，我们引入直线的方向向量的概念.

定义 7.12　设非零向量 $\boldsymbol{s}=\{m,\ n,\ p\}$所在的直线与已知直线 l 平行，则称向量 $\boldsymbol{s}$ 为直线 l 的一个方向向量.

下面利用方向向量来确定直线的方程.

若直线 l 经过一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$，且向量 $\boldsymbol{s}=\{m, n, p\}$是直线 l 的一个方向向量，如图 7-25 所示. 设直线上的任意一点 M 的坐标为(x, y, z)，这时向量 $\overrightarrow{M_0M}$ 就成为直线上的任意一向量，即

$$\overrightarrow{M_0M}=\{x-x_0, y-y_0, z-z_0\},$$

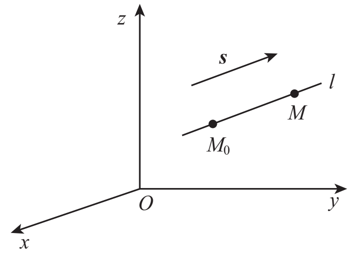


图 7-25

由于向量 $\boldsymbol{s}$ 是直线的方向向量，所以有 $\boldsymbol{s}/\!/\overrightarrow{M_0M}$，即

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}. \tag{4}$$

上式(4)称为直线的对称式方程或点向式方程，这时的 m，n，p 又称为该直线的一组方向数.

若令(4)式的比值为参数 t，即

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t\text{(其中 } t \text{ 为参数)},$$

则有

$$\begin{cases}x=x_0+mt,\\ y=y_0+nt, & \text{(其中 } t \text{ 为参数)}\\ z=z_0+pt.\end{cases} \tag{5}$$

上式(5)称为直线的参数式方程.

同时，直线可以理解为两个平面的交线，于是直线方程也可以表示为

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,\end{cases} \tag{6}$$

其中 $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ 和 $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ 分别表示相交的两个平面. 上式(6)称为空间直线的一般式方程.

以上讲述了直线方程的三种不同形式，它们之间可以相互转化，在不同问题下，如果运用得当可以使问题简化.

例 5 将直线的一般式方程

$$\begin{cases}x+y+z+1=0,\\ 2x-y+3z-5=0,\end{cases}$$

化为直线的点向式方程.

解 先找出直线上的一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$，不妨取 $x_0=0$，代入一般式方程得方程组

$$\begin{cases}y_0+z_0+1=0,\\ -y_0+3z_0-5=0,\end{cases}$$

解方程组，得

$$\begin{cases} y_0=-2, \\ z_0=1, \end{cases}$$

即所找的 M_0 为(0，−2，1).

再求该直线的一个方向向量 $\boldsymbol{s}=\{m, n, p\}$，由于直线是两平面的交线，所以该直线的方向向量一定与两平面的法向量 $\boldsymbol{n}_1=\{1, 1, 1\}$，$\boldsymbol{n}_2=\{2, -1, 3\}$同时垂直，于是

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}=4\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k},$$

即所求方向向量为

$$\boldsymbol{s}=\{4, -1, -3\},$$

故直线的点向式方程为

$$\frac{x-0}{4}=\frac{y-(-2)}{-1}=\frac{z-1}{-3},$$

即

$$\frac{x}{4}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-1}{-3}.$$

例 6　求直线 l：$\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z+4}{2}$与平面 π：$2x-y-z+5=0$ 的交点坐标.

解　将直线 l 的点向式方程，化为参数式方程，得

$$\begin{cases} x=2+t, \\ y=3-t, \qquad (\text{其中 } t \text{ 为参数}) \\ z=-4+2t, \end{cases}$$

代入平面方程，得

$$2(2+t)-(3-t)-(-4+2t)+5=0,$$

解得

$$t=-10,$$

于是，所求的交点为(−8，13，−24).

2. 直线与直线的夹角

同样，在前面知识中已经规定了直线与直线的夹角是在$\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$这个范围上，当用向量来表达两直线的夹角时，必须限定在$\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$上，于是两直线的方向向量的夹角(在$\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$上的)称为两直线的夹角.

若设直线 l_1 的方向向量为 $\boldsymbol{s}_1=\{m_1, n_1, p_1\}$，直线 l_2 的方向向量为 $\boldsymbol{s}_2=\{m_2, n_2, p_2\}$，则两方向向量的夹角满足

$$\cos(\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2)=\frac{\boldsymbol{s}_1 \cdot \boldsymbol{s}_2}{|\boldsymbol{s}_1||\boldsymbol{s}_2|}=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}.$$

根据两直线夹角的定义，得

$$\cos\theta=|\cos(\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2)|=\frac{|\boldsymbol{s}_1 \cdot \boldsymbol{s}_2|}{|\boldsymbol{s}_1||\boldsymbol{s}_2|}=\frac{|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}},$$

其中 θ 为两直线的夹角，并称上式为两直线的夹角公式.

由两直线的夹角公式可以看出：

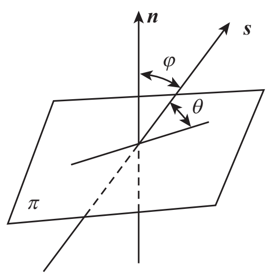
(1) 当直线 l_1 与直线 l_2 垂直时，$\theta=\frac{\pi}{2}$，则 $m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$；

(2) 当直线 l_1 与直线 l_2 平行时，$\theta=0$ 或 π，则 $\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}$.

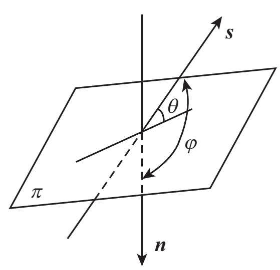
3. 直线与平面的夹角

依照前面的规定，我们给出直线与平面的夹角的定义.

当直线与平面不垂直时，直线和直线在平面上的投影直线的夹角 $\theta\left(0\leqslant\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ 称为直线与平面的夹角；当直线与平面垂直时，规定直线与平面的夹角为 $\frac{\pi}{2}$. 如图 7-26 所示.



(1)



(2)

图 7-26

若设平面 π 的法向量为 $\boldsymbol{n}=\{A, B, C\}$，直线 l 的方向向量为 $\boldsymbol{s}=\{m, n, p\}$，则两向量的夹角 φ 满足

$$\cos\varphi=\frac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

又因为两向量的夹角 φ 和直线与平面的夹角 θ 存在着如下的关系：

(1) $\varphi=\frac{\pi}{2}-\theta$，图 7-26(1)所示，

(2) $\varphi=\frac{\pi}{2}+\theta$，图 7-26(2)所示，

即

$$\varphi=\frac{\pi}{2}\pm\theta,$$

所以

$$\cos\varphi=\cos\left(\frac{\pi}{2}\pm\theta\right)=\pm\sin\theta,$$

亦有

$$\sin\theta=\pm\cos\varphi,$$

因为直线与平面的夹角 θ 是在 $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ 上，所以 $\sin\theta\geqslant 0$，于是

$$\sin\theta=|\cos\varphi|,$$

即

$$\sin\theta=|\cos\varphi|=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

上式称为直线与平面的夹角公式.

由直线与平面的夹角公式可以看出：

（1）当直线与平面垂直时，$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}$；

（2）当直线与平面平行时，$Am+Bn+Cp=0$.

例 7　求过点(1，−3，4)且与平面 $2x-3y+2z-5=0$ 垂直的直线的方程.

解　因为所求直线与平面垂直，所以平面的法向量 $\boldsymbol{n}=\{2,\ -3,\ 2\}$ 可以看作是直线的方向向量 $\boldsymbol{s}$，即

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{n}=\{2,\ -3,\ 2\},$$

于是，所求直线的点向式方程为

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-(-3)}{-3}=\frac{z-4}{2},$$

即

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{-3}=\frac{z-4}{2}.$$

习题 7.4

1. 求过点(1，0，−2)且与向量 $\boldsymbol{n}=\{3,\ -1,\ 2\}$ 垂直的平面方程.
2. 求过点(3，1，−1)且与平面 $x-7y+3z-12=0$ 平行的平面方程.
3. 求过点 $A(1,\ 2,\ -5)$ 和点 $B(-5,\ 2,\ 7)$，且与 z 轴平行的平面方程.
4. 求点 $P_0(-1,\ -2,\ 0)$ 到平面 $x+2y+2z-1=0$ 的距离.
5. 已知平面 π_1：$2x-y+2z-1=0$，平面 π_2：$2x-2y+7=0$，求两平面的夹角 θ.
6. 写出直线 l：$\begin{cases}x-2y+3z-3=0,\\3x+y-2z+5=0\end{cases}$ 的对称式方程和参数式方程.

7. 求直线 l_1：$\begin{cases}x=2t-1,\\y=t+2,\\z=-t+2\end{cases}$ 与直线 l_2：$\dfrac{x+1}{-2}=\dfrac{y+3}{1}=\dfrac{z-2}{1}$之间的夹角 θ.

8. 求过点 $A(1,1,-2)$且与平面 π：$2x-3y+z-2=0$ 平行，又与直线 l：$\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-1}{3}$垂直的直线方程.

9. 求直线 l：$\begin{cases}x+y+2z-1=0,\\x-y-z+2=0\end{cases}$ 与平面 π：$x-y-z+3=0$ 的夹角 φ.

10. 求过点$(1,0,2)$及直线$\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+2}{-1}$的平面方程.

11. 求过直线$\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{2}$且与平面 $x+4y-z+2=0$ 垂直的平面方程.

12. 判定下列各组中的直线和平面间的位置关系：

(1) $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-1}{7}=\dfrac{z-2}{-3}$与$-4x+2y+2z-2=0$；

(2) $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-1}{-2}$与 $x+2y-2z-6=0$；

(3) $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-3}{-4}$与 $x+y+z-3=0$.

7.5 曲面与空间曲线

在前面一节中，我们已经了解了曲面及其方程的概念，本节主要向大家介绍几种特殊的曲面、曲线以及如何来确定它们的方程，并用截痕法来研究常见二次曲面的形状.

7.5.1 曲面

1. 几种特殊的曲面及其方程

(1) 球面

设 $M_0(x_0,y_0,z_0)$是空间中的一定点，试确定到该点距离等于定长 R 的点的轨迹方程.

若动点 M 的坐标设为(x,y,z)，由两点间的距离公式，得

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=R,$$

即

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2.$$

我们称此方程为球面方程，该方程表示的是以点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$为球心、R 为半径的一个球面，如图 7-27 所示. 特别地，当 M_0 在原点时，球面方程可简化成

$$x^2+y^2+z^2=R^2.$$

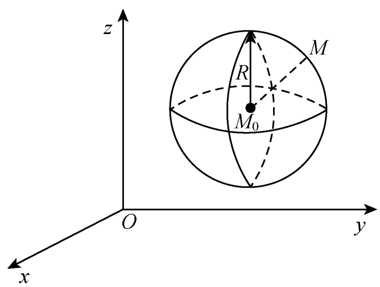


图 7-27

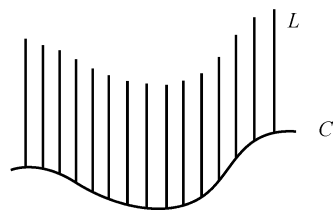


图 7-28

例 1　方程 $x^2+y^2+z^2-4x+2y-4z=0$ 表示什么样的曲面？

解　对方程配方，可得

$$(x-2)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=3^2,$$

所以该方程表示的是以(2，−1，2)为球心、3 为半径的一个球面.

(2) 柱面

我们把动直线 L 沿定曲线 C 平行移动所形成的轨迹，称为柱面. 其中，定曲线 C 称为柱面的准线，动直线 L 称为柱面的母线，如图 7-28 所示.

下面，讨论一下准线 C：$f(x, y)=0$ 在 xOy 面上，母线平行于 z 轴的柱面方程形式.

若设 $M(x, y, z)$是柱面上的任意一点，过 M 作平行于 z 轴的直线，则该直线一定与 C 相交于一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$(想一想，为什么).

于是得到 $x=x_0$，$y=y_0$，又因为 $M_0(x_0, y_0, z_0)$在 C 上，所以

$$f(x_0, y_0)=0,$$

从而得到

$$f(x, y)=0.$$

我们称此方程为以 xOy 面上 $f(x, y)=0$ 为准线，母线平行于 z 轴的柱面方程，它的特点是一个不含有 z 的二元方程. 例如：$x^2+y^2=a^2$ 表示在 xOy 平面上以 $x^2+y^2=a^2$ 为准线，母线平行于 z 轴的圆柱面，如图 7-29(1)所示. 类似地，我们还可以得到母线平行于 y 轴的柱面方程形式为 $g(x, z)=0$. 例如：$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 表示在 xOz 平面上以 $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 为准线，母线平行于 y 轴的双曲柱面，如图 7-29(2)所示. 又如，$y^2=2x$ 表示如图 7-29(3)所示的抛物柱面.

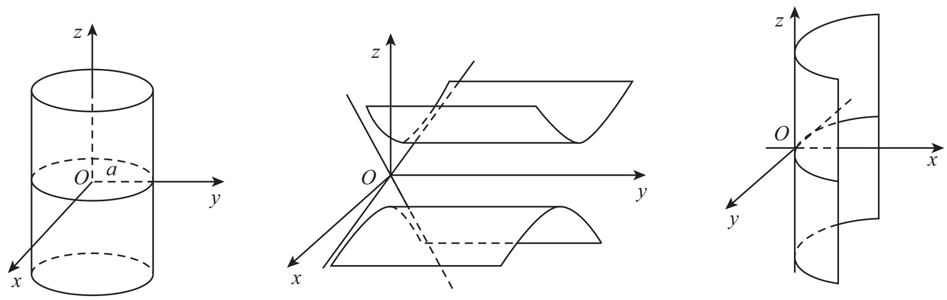


图 7-29

(3) 旋转曲面

平面曲线 L 绕它所在平面内的定直线 l 旋转一周后所形成的轨迹，称为旋转曲面，如图 7-30 所示.

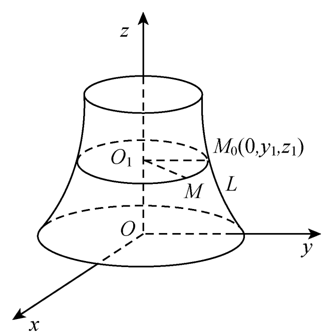


图 7-30

下面，我们来讨论在 yOz 平面上的曲线 L：$f(y,z)=0$ 绕 z 轴旋转所得到的方程形式.

设 $M(x,y,z)$是旋转曲面上的任意一点，该点可以认为是由在 yOz 平面上的点 $M_o(0,y_1,z_1)$旋转而得到的，于是

$$z=z_1,$$

且 M_0 到 z 轴的距离与 M 到 z 轴的距离是相等的，即

$$|y_1|=\sqrt{x^2+y^2},$$

亦即

$$y_1=\pm\sqrt{x^2+y^2},$$

又因为 $M_0(0,y_1,z_1)$在 L 上，所以

$$f(y_1,z_1)=0,$$

从而得到

$$f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0.$$

此方程称为在 yOz 平面上，曲线 $f(y,z)=0$ 绕 z 轴旋转所得到的曲面方程，该方程的特点是坐标平面上的方程 $f(y,z)=0$ 中的 z 保持不动，而将 y 写成$\pm\sqrt{x^2+y^2}$. 类似地，在 xOy 平面上的曲线 $g(x,y)=0$ 绕 y 轴旋转所得到的旋转曲面方程为 $g(\pm\sqrt{x^2+z^2},y)=0$；在 xOz 平面上曲线 $h(x,z)=0$ 绕 x 轴旋转所得到的旋转曲面方程为 $h(x,\pm\sqrt{y^2+z^2})=0$；等等.

2. 常见的二次曲面

我们把三元二次方程 $F(x,y,z)=0$ 所表示的曲面称为二次曲面. 我们怎样去了解

三元方程 $F(x, y, z)=0$ 所表示的曲面形状呢？方法之一，就是用平行于坐标平面的平面去截曲面，考察所得截痕的形状并加以综合考虑，从而描述曲面整体的大致形状，像这种研究曲面的方法称为截痕法.

下面，我们就利用这种方法讨论几个常见的二次曲面.

(1) 椭球面

由方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1(a, b, c>0),$$

所确定的曲面称为椭球面.

从方程中可以看出，

$$\frac{x^2}{a^2}\leqslant 1, \ \frac{y^2}{b^2}\leqslant 1, \ \frac{z^2}{c^2}\leqslant 1,$$

这表明该曲面可以被一个长方体"包含"起来，说明该曲面是有界的(另外我们把 a，b，c 称为椭球面的半轴长).

该曲面与三个坐标面的交线分别为

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, \\ z=0,\end{cases} \quad \begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1, \\ y=0,\end{cases} \quad \begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1, \\ x=0,\end{cases}$$

它们都是椭圆，如图 7-31 所示.

当用平行于 xOy 的平面 $z=z_0(|z_0|\leqslant c$，想一想，为什么)去截椭球面时，所截曲线为

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1-\dfrac{z_0^2}{c^2}, \\ z=z_0,\end{cases}$$

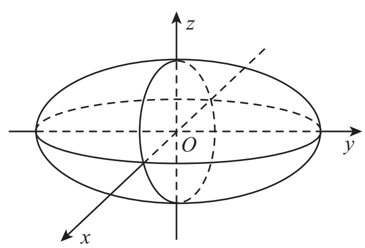


图 7-31

即

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{\left(\dfrac{a}{c}\sqrt{c^2-z_0^2}\right)^2}+\dfrac{y^2}{\left(\dfrac{b}{c}\sqrt{c^2-z_0^2}\right)^2}=1, \\ z=z_0.\end{cases}$$

它表示的是在 $z=z_0$ 平面上，两个半轴分别为 $\dfrac{a}{c}\sqrt{c^2-z_0^2}$，$\dfrac{b}{c}\sqrt{c^2-z_0^2}$ 的椭圆，即当 $|z_0|$ 增大时，所截椭圆的半轴逐渐减小，此椭圆随 $z=z_0$ 远离原点，特别地，当 $z_0=c$ 时，截痕就成为点$(0, 0, \pm c)$了.

类似地，我们还可以用 $x=x_0$，$y=y_0$ 去截椭球面，会得到与上面所类似的结论.

综合考虑，椭球面的形状如图 7-31 所示.

若椭球面方程中的 $a=b$，即

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

它可由 xOz 面上的曲线$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 绕 z 轴旋转而得到，则此时椭球面又称为旋转椭球面.

若椭球面方程中的 $a=b=c=R$，则椭球面方程变成了 $x^2+y^2+z^2=R^2$，这时椭球面就成了球面.

(2) 双曲面

由方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

所确定的曲面称为单叶双曲面.

该曲面与 xOz，yOz 坐标面的交线方程分别是

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\\ y=0,\end{cases}\begin{cases}\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\\ x=0,\end{cases}$$

它们分别表示的是在 xOz 面，yOz 面上的双曲线.

该曲线与 xOy 坐标面的交线方程为

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\\ z=0,\end{cases}$$

它所表示的是在 xOy 面上的一个椭圆.

如果用 $z=z_0$ 平面来截该曲面，那么所得截痕方程是

$$\begin{cases}\frac{x^2}{\left(\frac{a}{c}\sqrt{c^2+z_0^2}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{b}{c}\sqrt{c^2+z_0^2}\right)^2}=1,\\ z=z_0,\end{cases}$$

当平面 $z=z_0$ 远离原点时，即当 $|z_0|$ 增大时，所截椭圆的两个半轴逐渐增大.

综合考虑，我们得到上述方程所表示的单叶双曲面的形状，如图 7-32 所示.

由方程

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$$

所确定的曲面称为双叶双曲面.

对于双叶双曲面的形状，大家可以仿照对单叶双曲面的讨论，用截痕法自己分析一下，上述方程所表示的双叶双曲面的形状，如图 7-33 所示.

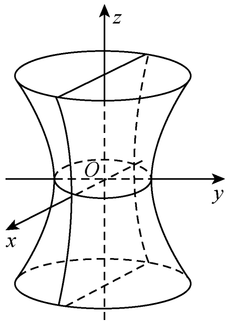


图 7-32

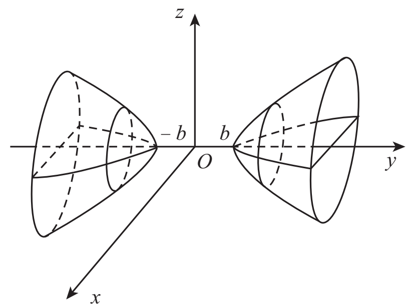


图 7-33

（3）抛物面

由方程

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z（其中\ p，q\ 同号）$$

所确定的曲面称为椭圆抛物面.

当 p，$q>0$ 时，若用平行于 xOy 面的平面 $z=z_0(z>0)$去截该曲面，则所截交线为

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{2pz_0}+\dfrac{y^2}{2qz_0}=1,\\ z=z_0,\end{cases}$$

它所表示的是在 $z=z_0$ 面上的一个椭圆，当 z_0 逐渐增大时，椭圆也逐渐由小变大.

用 xOz，yOz 坐标面去截该曲面，所得交线分别为

$$\begin{cases}x^2=2pz,\\ y=0,\end{cases}\qquad \begin{cases}y^2=2qz,\\ x=0,\end{cases}$$

它们分别表示在 xOz，yOz 面上的抛物线.

综合考虑，可得抛物面的形状，如图 7-34(1)所示.

当 p，$q<0$ 时，我们可得到抛物面的形状，如图 7-34(2)所示.

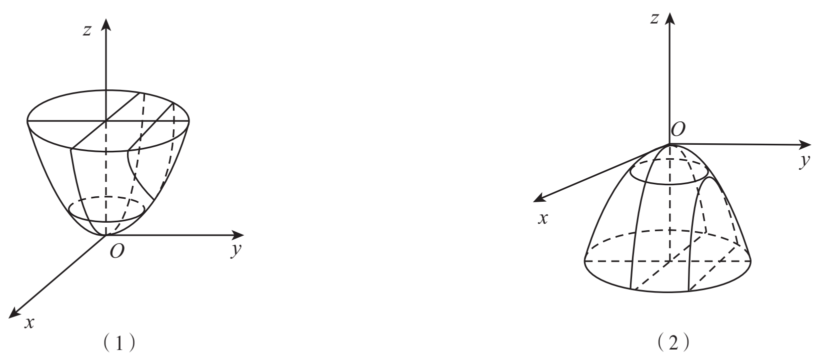


图 7-34

由方程

$$-\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z\text{（其中 }p\text{，}q\text{ 同号）}$$

所确定的曲面称为双曲抛物面，又称鞍形(马鞍)曲面.

当 p，$q>0$ 时，我们可用截痕法讨论得到它的形状，如图 7-35 所示.

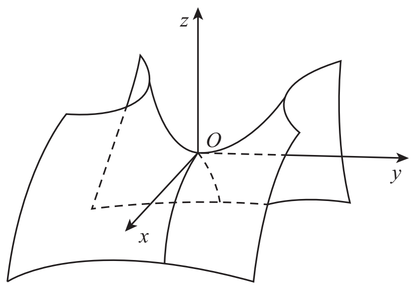


图 7-35

7.5.2 空间曲线

1. 空间曲线的一般式方程

与直线可以看作两平面的交线一样，空间曲线同样也可以认为是两个曲面的交线.

若空间曲线 Γ 是曲面 Σ_1 和曲面 Σ_2 的交线，曲面 Σ_1 的方程为 $F(x,y,z)=0$，曲面 Σ_2 的方程为 $G(x,y,z)=0$，则曲线 Γ 的方程可以表示为

$$\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\G(x,y,z)=0,\end{cases}$$

上述方程组称为空间曲线 Γ 的一般式方程.

例 2 讨论方程组

$$\begin{cases}z=\sqrt{25-x^2-y^2},\\z=4\end{cases}$$

表示什么样的曲线.

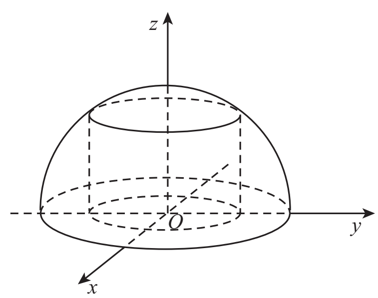


图 7-36

解 在平面 $z=4$ 上，将 $z=4$ 代入 $z=\sqrt{25-x^2-y^2}$ 中，得 $x^2+y^2=9=3^2$，所以该方程组表示的是圆心在(0，0，4)，半径为 3 的一个圆. 如图 7-36 所示.

注 即使是同一条曲线它的方程形式也不一定相同，如上述曲线还可以表示为

$$\begin{cases}z=\sqrt{25-x^2-y^2},\\x^2+y^2=9,\end{cases}$$

这说明，空间曲线的方程形式并不是唯一的.