高等数学

类目：公共基础课
书名：高等数学
主编：杨尚 夏久林 刘娜
出版社：湖南大学出版社
开本：大 16 开
书号：978-7-5667-4659-7
使用层次：通用
出版时间：2026 年 1 月
定价：49.80 元
印刷方式：双色
是否有资源：有

责任编辑：金红艳
封面设计：旗语书装

ISBN 978-7-5667-4659-7
定价：49.80元

公共基础课创新融合精品教材 "互联网+"教育改革新理念教材
高等数学
主编◎杨 尚 夏久林 刘 娜
湖南大学出版社

公共基础课创新融合精品教材
"互联网+"教育改革新理念教材

高等数学

主编◎杨 尚 夏久林 刘 娜

湖南大学出版社

公共基础课创新融合精品教材
“互联网 +”教育改革新理念教材

高等数学

主　编 ◎ 杨　尚　夏久林　刘　娜
副主编 ◎ 范玉梅　陈雪晴　梅　琳
康　瑾　魏会贤　杨燕妮
阳　衡　张　茜　金秀霞
张会丽

湖南大學出版社
· 长 沙 ·

图书在版编目(CIP)数据

高等数学 / 杨尚,夏久林,刘娜主编. --长沙 :
湖南大学出版社, 2026. 1. --ISBN 978-7-5667-4659-7

Ⅰ. O13

中国国家版本馆 CIP 数据核字第 2026Y4G316 号

高等数学

GAODENG SHUXUE

主　　编: 杨　尚　夏久林　刘　娜
责任编辑: 金红艳
印　　装: 河北龙大印务有限公司
开　　本: 889 mm×1 194 mm　1/16　　印　　张: 13.75　　字　　数: 358 千字
版　　次: 2026 年 1 月第 1 版　　印　　次: 2026 年 1 月第 1 次印刷
书　　号: ISBN 978-7-5667-4659-7
定　　价: 49.80 元

出 版 人: 李文邦
出版发行: 湖南大学出版社
社　　址: 湖南・长沙・岳麓山　　邮　　编:410082
电　　话: 0731-88822559(营销部)　88821174(编辑部)　88821006(出版部)
传　　真: 0731-88822264(总编室)
网　　址: http://press.hnu.edu.cn
电子邮箱: xiaoshulianwenhua@163.com

前　言

高等数学是普通高等学校一门重要的基础课程．作为科学学科，高等数学有其固有的特点——高度的抽象性、严密的逻辑性和广泛的应用性．抽象性是数学最基本、最显著的特点，正是通过高度抽象和统一，我们才能深入地揭示其本质规律，并将其应用于更广泛的领域．严密的逻辑性是指在数学理论的归纳和整理中，无论是概念和表述还是判断和推理，都要严格遵循逻辑规则和思维规律．所以说，数学也是一种思想方法，学习数学的过程就是思维训练的过程．人类社会的进步，与数学这门科学的广泛应用是分不开的．尤其是在当今时代，电子计算机的出现和普及使数学的应用领域不断拓宽，现代数学正成为科技发展的强大动力．

本书在编写过程中力求体现以下特点：

（1）内容力求简洁易懂，注意控制理论推导深度，注重培养学生的基本运算能力、分析问题和解决问题能力，贯彻理论联系实际和启发式教学原则，做到深入浅出，通俗易懂．

（2）注重从实际问题引入数学知识，再将数学工具应用于各种实际问题，通过丰富的实例体现数学的应用，加深学生对数学知识的理解，从而使数学源于实际，又服务于实际．例如，在定积分的应用部分，不仅讲述了其在几何、物理方面的应用，还拓展至了经济领域．

（3）充分考虑普通高等学校学生的数学基础，较好地处理了初等数学与高等数学的过渡与衔接．适度淡化逻辑论证，充分借助几何说明，帮助学生理解有关概念和理论．

（4）围绕重点和难点，书中选择了数量适中、难度适当的例题，以突出数学思维方法．

（5）为了方便教与学，每节配有习题，书后附有参考答案．

由于编者水平有限，再加上编写时间仓促，书中难免存在不妥之处，敬请各位专家及广大读者提出宝贵意见，以便修订时改进．

编　者

2025 年 12 月

目 录

第1章
函　数

1.1 函　数

1.1.1 函数的概念

在自然科学、经济学以及现代管理科学中都存在大量的变量之间的函数关系．下面通过一些实例来引入函数这一重要概念．

例 1 某海域昼夜水温 T 和时间 t 是两个变量，通过自动温度记录仪可以描绘出一条曲线，如图 1-1 所示．这个图象表示了气温 T 和时间 t 之间的函数关系．

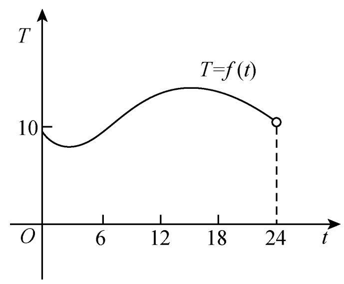


图 1-1

例 2 某公司 2024 年上半年某产品的销量如表 1-1 所示．

由表 1-1 可以看出，3 月份该产品的销量最多，可以建立销量 y 与月份 t 之间的函数关系，这样有助于了解产品的销售情况．

表 1-1

月份 t/月	1	2	3	4	5	6
销量 y/个	1 900	1 850	2 000	1 950	1 920	1 890

例 3 1 g 冰由 −10 ℃升至 10 ℃水的过程中，它所吸收的热量 Q 与温度 T 之间的函数关系式如下：

$$Q=\begin{cases}0.5(T+10), & -10\leqslant T<0, \\ T+85, & 0\leqslant T\leqslant 10.\end{cases}$$

下面给出函数的定义：

定义 1.1 设数集 $D\in\mathbf{R}$，则称映射 f：$D\to\mathbf{R}$ 为定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数，通常简记为 $y=f(x)$．x 称为自变量，y 称为因变量，D 称为函数的定义域，数集$\{f(x)\mid x\in D\}$称为函数 $f(x)$的值域，记作 $\mathbf{R}_f$ 或 $f(D)$．当 $x=x_0$ 时对应的函数值记为 $f(x_0)$．

需要指出，按照上述定义，记号 f 和 $f(x)$的含义是有区别的：前者表示自变量 x 和因变量 y 之间的对应法则，而后者表示与自变量 x 对应的函数值．但为了叙述方便，习惯上常用记号“$f(x)$，$x\in D$”或“$y=f(x)$，$x\in D$”来表示定义在 D 上的函数．

由函数的定义可以看出，函数是从实数集到实数集的映射，其值总在 $\mathbf{R}$ 内，所以确定函数有两个要素：定义域和对应法则．因此，两个函数相同的充分必要条件是两函数的定义域和对应法则对应相同．

例 4 判断下列函数是否表示相同的函数关系式：

①函数 $y=\dfrac{x^2}{x}$ 和 $y=x$；

②函数 $y=|x|$ 与 $y=\sqrt{x^2}$.

解 ①因为函数 $y=\frac{x^2}{x}$ 的定义域为 $x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq 0$，而函数 $y=x$ 的定义域为 $x\in\mathbf{R}$，所以它们的定义域不同，所以函数 $y=\frac{x^2}{x}$ 与 $y=x$ 不同.

②易知函数 $y=|x|$ 与 $y=\sqrt{x^2}$ 的定义域都是 $x\in\mathbf{R}$，$y=\sqrt{x^2}=|x|$，所以函数 $y=|x|$ 与 $y=\sqrt{x^2}$ 有相同的定义域和对应法则，所以函数 $y=|x|$ 与 $y=\sqrt{x^2}$ 表示相同的函数关系式.

在函数的定义中，对每个 $x\in D$，对应的函数值 y 总是唯一的. 如果给定一个对应法则，按这个法则，对每个 $x\in D$，总有确定的 y 值与之对应，但这个 y 不总是唯一的，那么对于这样的对应法则并不符合函数的定义，习惯上称这种法则确定了一个多值函数. 例如，设变量 x 和 y 之间的对应法则由方程 $x^2+y^2=r^2$ 可确定出对应的 y 值，当 $x=r$ 或 $x=-r$ 时，对应 $y=0$ 一个值；当 x 取 $(-r,r)$ 内任意一个值时，对应的 y 有两个值，所以这个方程确定了一个多值函数. 对于多值函数，如果附加一些条件，使得在附加条件之下，按照对应法则，对每个 $x\in D$，总有唯一确定的实数值 y 与之对应，那么这就确定了一个函数. 我们称这样的函数为多值函数的单值分支.

表示一个函数通常有三种方法：图象法、表格法和公式法.

(1)图象法：就是用图象来表达函数关系式. 这种方法直观性强并可观察函数的变化趋势，但根据函数图象所求出的函数值准确度不高且不便于理论研究.

(2)表格法：就是用表格来表达函数关系式. 优点是查找函数值比较方便，缺点是数据有限、不直观，不便于理论研究.

(3)公式法：就是用数学公式表达函数关系. 如 $y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^2$，优点是形式简明，便于理论研究与数值计算，缺点是不如图象法直观.

由此可见，例 1 就是用图象法表示一个函数；例 2 就是用表格法表示一个函数；例 3 就是用公式法表示一个函数.

在用公式法表示函数时，还会遇到下面几种情况：

(1)分段函数. 在自变量的不同取值范围内，有不同的公式表示的函数，称为分段函数. 如

$$f(x)=\begin{cases}x+1, & x<0,\\ x^2, & 0\leqslant x\leqslant 2,\\ \ln x, & 2<x\leqslant 5.\end{cases}$$

就是一个定义在区间 $(-\infty,5]$ 上的分段函数.

(2)用参数方程确定的函数. 参数方程

$$\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t),\end{cases}\quad (t\in I)$$

表示变量 x 与 y 之间的函数关系，称为用参数方程确定的函数. 例如，函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ $(x\in[-1,1])$ 可以用参数方程

$$\begin{cases}x=\cos t,\\ y=\sin t,\end{cases}\quad (0\leqslant t\leqslant \pi)$$

表示.

(3)隐函数. 如果在方程 $F(x,y)=0$ 中，当 x 在某区间 I 内任意取定一个值时，相应地总有满足该方程的唯一的 y 值存在，则称方程 $F(x,y)=0$ 在区间 I 内确定了一个隐函数. 例如，方程 $e^x+xy-1=0$ 确定了变量 y 与变量 x 之间的函数关系.

注

能表示成 $y=f(x)$[其中 $f(x)$仅为 x 的解析式]形式的函数，称为显函数. 把一个隐函数化成显函数的过程，称为“隐函数的显化”. 例如 $e^x+xy-1=0$ 可以化成显函数 $y=\frac{1-e^x}{x}$. 但有些隐函数却不能化成显函数，例如 $e^x+xy-e^y=0$.

在实际问题中，函数的定义域与问题的实际意义有关. 在数学中，有时不考虑函数的实际意义，这时约定函数的定义域就是自变量所能取到的使函数有意义的一切实数，例如，函数 $y=\arcsin x$ 的定义域为$[-1,1]$，函数 $y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$的定义域为$(-1,1)$.

一般地，自变量 x 在定义域内任取一个数值时，对应的函数值是唯一的，这种函数称为单值函数，在以后的章节中若无特殊说明，函数都是指单值函数.

例 5　求函数 $y=\frac{\lg(x+1)}{x-1}$的定义域.

解　根据对数的真数必须为正数，分数的分母不能为零，可以得到该函数的定义域 D 满足不等式组

$$\begin{cases} x+1>0, \\ x-1\neq 0, \end{cases}$$

解得

$$x>-1 \text{ 且 } x\neq 1,$$

即

$$D=(-1,1)\cup(1,+\infty).$$

例 6　求分段函数 $f(x)$的定义域和值域.

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x+1, & -2\leqslant x\leqslant 0, \\ -x, & 0<x<2. \end{cases}$$

解　如图 1-2 所示，$f(x)$的定义域为

$$D=\{x\,|\,-2\leqslant x<2\},$$

其值域为

$$W=\{f(x)\,|\,-2<f(x)\leqslant 1\}.$$

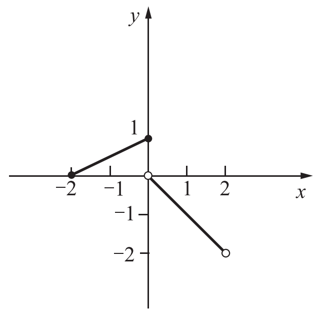


图 1-2

例 7　画出符号函数 $\operatorname{sgn} x=\begin{cases} 1, & x>0, \\ 0, & x=0, \\ -1, & x<0 \end{cases}$ 的图象.

解　如图 1-3 所示.

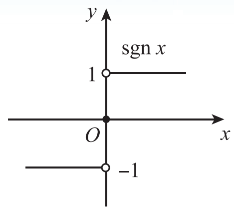


图 1-3

注

函数由解析式给出时，其定义域是使解析式有意义的自变量的取值范围．为此，求函数的定义域时应遵循以下原则：

(1)分式中分母不能为零.

(2)偶次根式内的被开方数非负.

(3)在对数中真数大于零.

(4)反三角函数 $\arcsin x$，$\arccos x$，应满足 $|x|\leqslant 1$.

(5)两函数和(差)的定义域，应是两函数定义域的公共部分.

(6)分段函数的定义域是各段定义域的并集.

(7)求复合函数的定义域时，一般是由外层向里层逐步求.

1.1.2 函数的几种特性

下面所讨论的函数的定义域都假设为 D.

1.1.2.1 奇偶性

如果函数 $f(x)$的定义域 D 关于原点对称，对于任意 $x\in D$ 都有 $f(-x)=f(x)$，那么称函数 $f(x)$为偶函数；

如果函数 $f(x)$的定义域 D 关于原点对称，对于任意 $x\in D$ 都有 $f(-x)=-f(x)$，那么称函数 $f(x)$为奇函数．

注

①偶函数的图象关于 y 轴对称，奇函数的图象关于原点对称.

②判断一个函数是奇函数还是偶函数，首先要看它的定义域是否关于原点对称，然后再判断它的奇偶性．

例 8 判断下列函数的奇偶性：

①$f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$；　②$f(x)=\lg\dfrac{1-x}{1+x}$.

解 ①函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$的定义域为 $D=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$关于原点对称．任意取一个 $x\in D$，则$-x\in D$，有

$$f(-x)=\frac{\sin(-x)}{-x}=\frac{\sin x}{x}=f(x),$$

所以 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$是偶函数.

②函数 $f(x)=\lg\dfrac{1-x}{1+x}$的定义域为 $D=(-1,1)$，关于原点对称．任意取 $x\in D$，则$-x\in D$，有

$$f(-x)=\lg\frac{1+x}{1-x}=\lg\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-1}=-\lg\frac{1-x}{1+x}=-f(x),$$

所以 $f(x)=\lg\frac{1-x}{1+x}$ 是奇函数.

例 9 证明：如果函数 $f(x)$ 的定义域关于原点对称，那么

①$F_1(x)=f(x)+f(-x)$ 为偶函数；

②$F_2(x)=f(x)-f(-x)$ 为奇函数.

证明 ①因为 $F_1(-x)=f(-x)+f(x)=f(x)+f(-x)=F_1(x)$，所以 $F_1(x)=f(x)+f(-x)$ 是偶函数.

②因为 $F_2(-x)=f(-x)-f(x)=-[f(x)-f(-x)]=-F_2(x)$，所以 $F_2(x)=f(x)-f(-x)$ 是奇函数.

1.1.2.2 周期性

对于函数 $f(x)$，如果存在一个常数 $T\neq 0$，对任意 $x\in D$，有 $x+T\in D$，且 $f(x+T)=f(x)$，那么称函数 $f(x)$ 为周期函数，T 为函数的周期.

注

①周期函数的周期 T，通常是指满足上述条件的最小正周期.

②周期函数若以 T 为周期，则在每个长度为 T 的相邻区间上函数图象有相同的形状.

③周期函数若以 T 为周期，则 $nT(n\in\mathbf{Z})$ 也是函数的周期.

例 10 求函数 $y=\cos 2x$ 的周期.

解 因为 $y(x+\pi)=\cos 2(x+\pi)=\cos(2x+2\pi)=\cos 2x$，所以函数 $y=\cos 2x$ 的周期是 π.

例 11 判断狄利克雷函数是否为周期函数：

$$D(x)=\begin{cases}0, & x\text{ 为有理数},\\ 1, & x\text{ 为无理数}.\end{cases}$$

解 容易验证这是一个周期函数，任何正有理数都是它的周期．因为不存在最小的正有理数，所以它没有最小的正周期.

1.1.2.3 单调性

如果函数 $f(x)$ 在区间 I 内随 x 的增大而增大，即对于 I 内的任意两点 x_1，$x_2\in I$，且 $x_1<x_2$，有 $f(x_1)<f(x_2)$，那么称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的；反之，若有 $f(x_1)>f(x_2)$，那么称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调减少的.

1.1.2.4 有界性

对于函数 $f(x)$，在区间 $I\in D$ 内对任意 $x\in I$，如果存在数 M_1，对应的函数值均有 $f(x)\leqslant M_1$，那么称 $f(x)$ 在区间 I 内有上界，M_1 称为函数 $f(x)$ 在 I 上的一个上界.

如果存在数 M_2，使得 $f(x)\geqslant M_2$ 对任意 $x\in I$ 都成立，那么称函数 $f(x)$ 在区间 I 内有下界，而 M_2 称为 $f(x)$ 在 I 上的一个下界.

如果存在 $M>0$，使得

$$|f(x)|\leqslant M,$$

对任意 $x\in I$ 都成立，那么称函数 $f(x)$ 在 I 上有界．如果这样的 M 不存在，那么称函数 $f(x)$ 在 I 上无界．这就是说，如果对于任意正数 M，总存在 $x_1\in I$，使 $|f(x_1)|>M$，那么函数 $f(x)$ 在 I 上无界.

例如，$y=\cos x$ 在 $x\in\mathbf{R}$ 内是有界函数(大于 1 的任何数都是它的上界，小于 -1 的任何数都是它的

下界)；$y=\dfrac{1}{x}$在$x\in\mathbf{R}$是无界函数.

例 12　证明：函数 $y=\sin x$ 在$\left(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$上单调增加且有界.

证明　令 $f(x)=\sin x$，任意取 x_1，$x_2\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$，不妨设 $x_1<x_2$，则

$$f(x_2)-f(x_1)=\sin x_2-\sin x_1=2\cos\frac{x_2+x_1}{2}\sin\frac{x_2-x_1}{2}.$$

因为 x_1，$x_2\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$，所以$\dfrac{x_2+x_1}{2}\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$，于是

$$\cos\frac{x_2+x_1}{2}>0.$$

又因为 $x_1<x_2$，所以有$\dfrac{x_2-x_1}{2}\in\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$，于是

$$\sin\frac{x_2-x_1}{2}>0,$$

所以

$$2\cos\frac{x_2+x_1}{2}\sin\frac{x_2-x_1}{2}>0,$$

即

$$f(x_2)>f(x_1),$$

所以 $y=\sin x$ 在$\left(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$上单调增加；又因为$|y|=|\sin x|\leqslant 1$，所以 $y=\sin x$ 在$\left(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$上有界.

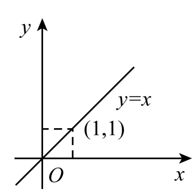
故函数 $y=\sin x$ 在$\left(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$上单调增加且有界.

1.1.3 基本初等函数

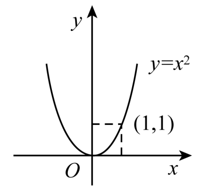
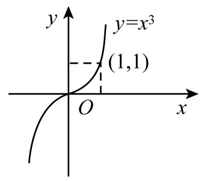
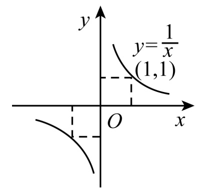
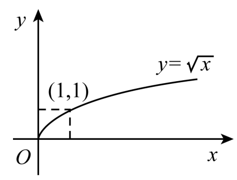
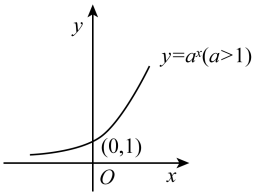
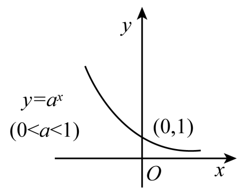
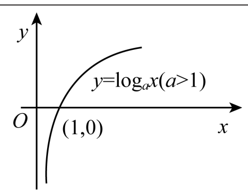
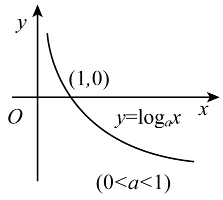
1.1.3.1　基本初等函数

通常把幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为基本初等函数．它们的图象、性质如表 1-2 所示．

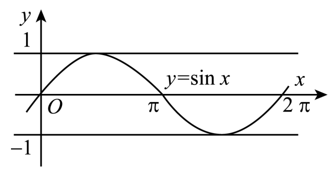
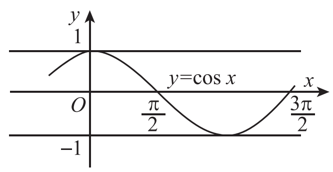
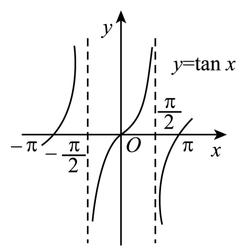
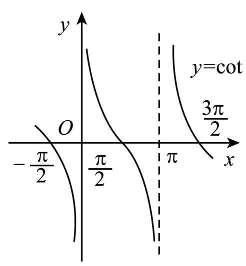
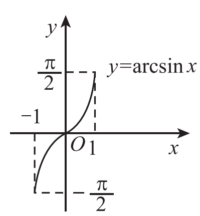
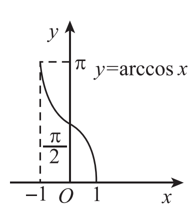
表 1-2　基本初等函数

	函　数	定义域与值域	图　象	特　性
幂函数	$y=x$	$x\in(-\infty,\ +\infty)$， $y\in(-\infty,\ +\infty)$		奇函数， 单调增加

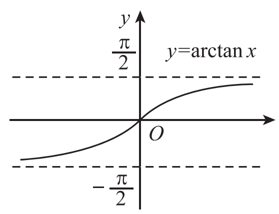
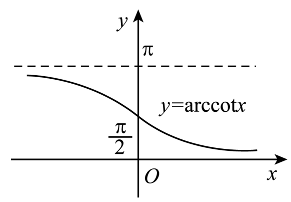
续表

	函　数	定义域与值域	图　象	特　性
幂函数	$y=x^2$	$x\in(-\infty,+\infty)$， $y\in[0,+\infty)$		偶函数， 在$(-\infty,0)$内单调减少， 在$[0,+\infty)$内单调增加
	$y=x^3$	$x\in(-\infty,+\infty)$， $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数， 单调增加
	$y=x^{-1}$	$x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$， $y\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$		奇函数， 单调减少
	$y=x^{\frac{1}{2}}$	$x\in[0,+\infty)$， $y\in[0,+\infty)$		单调增加
指数函数	$y=a^x$ $(a>1)$	$x\in(-\infty,+\infty)$， $y\in(0,+\infty)$		单调增加
	$y=a^x$ $(0<a<1)$	$x\in(-\infty,+\infty)$， $y\in(0,+\infty)$		单调减少
对数函数	$y=\log_a x$ $(a>1)$	$x\in(0,+\infty)$， $y\in(-\infty,+\infty)$		单调增加
	$y=\log_a x$ $(0<a<1)$	$x\in(0,+\infty)$， $y\in(-\infty,+\infty)$		单调减少

续表

	函　数	定义域与值域	图　象	特　性
三角函数	$y=\sin x$	$x\in(-\infty,+\infty)$， $y\in[-1,1]$		奇函数，最小周期为 2π，有界， 在 $\left(2k\pi-\frac{\pi}{2},\ 2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调增加， 在 $\left(2k\pi+\frac{\pi}{2},\ 2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right)$ 内单调减少
	$y=\cos x$	$x\in(-\infty,+\infty)$， $y\in[-1,1]$		偶函数，最小周期为 2π，有界， 在 $(2k\pi,\ 2k\pi+\pi)$ 内单调减少， 在 $(2k\pi+\pi,\ 2k\pi+2\pi)$ 内单调增加
	$y=\tan x$	$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$， $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，最小周期为 π， 在 $\left(k\pi-\frac{\pi}{2},\ k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调增加
	$y=\cot x$	$x\neq k\pi(k\in\mathbf{Z})$， $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，最小周期为 π， 在 $(k\pi,\ k\pi+\pi)$ 内单调减少
反三角函数	$y=\arcsin x$	$x\in[-1,1]$， $y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$		奇函数，单调增加，有界
	$y=\arccos x$	$x\in[-1,1]$， $y\in[0,\pi]$		单调减少，有界

续表

	函　数	定义域与值域	图　象	特　性
反三角函数	$y=\arctan x$	$x\in(-\infty,+\infty)$，$y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$		奇函数，单调增加，有界
	$y=\operatorname{arccot} x$	$x\in(-\infty,+\infty)$，$y\in(0,\pi)$		单调减少，有界

1.1.3.2　复合函数

先看一个例子，设 $y=\sin u$，$u=x^2$，对任意 $x\in\mathbf{R}$ 有 $u=x^2\in[0,+\infty)$. 又通过 $y=\sin u$，得到 $y=\sin x^2\in[-1,1]$，即通过中间变量 u，从而构成 y 是 x 的函数，于是称 $y=\sin x^2$ 是 $y=\sin u$ 和 $u=x^2$ 的复合函数.

定义 1.2　设有两个函数 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$，且 $\varphi(x)$的值域与 $f(u)$的定义域相交非空，那么 y 通过 u 的作用成为 x 的函数，于是称 $y=f(\varphi(x))$是由函数 $y=f(u)$及函数 $u=\varphi(x)$复合而成的复合函数，u 称为中间变量.

如自由落体运动的物体，其动能 $E=\frac{1}{2}mv^2$ 及速度 $v=gt$，于是它们所构成的复合函数是 $E=\frac{1}{2}mg^2t^2$.

例 13　设 $f(x)=x^3-x$，$\varphi(x)=\sin 2x$，求 $f(\varphi(x))$和 $\varphi(f(x))$.

解　由复合函数的定义知

$$f(\varphi(x))=(\sin 2x)^3-\sin 2x,$$
$$\varphi(f(x))=\sin 2(x^3-x).$$

例 14　设 $f(x)=\begin{cases}2x+3, & x\leqslant 0,\\ 2^x, & x>0,\end{cases}$ 求 $f(-1)$，$f(0)$及 $f(f(-1))$.

解

$$f(-1)=2\times(-1)+3=1;$$
$$f(0)=2\times 0+3=3;$$
$$f(f(-1))=f(1)=2^1=2.$$

例 15　将下列复合函数分解成基本初等函数或简单初等函数：

①$y=\arcsin(\ln x)$；②$y=\sin^2\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$；③$y=\ln(\tan \mathrm{e}^{x^2+2\sin x})$.

解　①外层是反正弦函数，即 $y=\arcsin u$，内层是对数函数，即 $u=\ln x$，所以分解得 $y=\arcsin u$，$u=\ln x$.

②最外层是幂函数，即 $y=u^2$，次外层是正弦函数，即 $u=\sin v$，从外向里第三层又是幂函数，即 $v=w^{-\frac{1}{2}}$，最里层是多项式函数，即 $w=x^2+1$，所以，分解得 $y=u^2$，$u=\sin v$，$v=w^{-\frac{1}{2}}$，$w=x^2+1$.

③最外层是对数函数，即 $y=\ln u$，次外层是正切函数，即 $u=\tan v$，从外向里第三层是指数函数，即 $v=e^w$，最里层是简单初等函数，即 $w=x^2+2\sin x$. 所以，分解得 $y=\ln u$，$u=\tan v$，$v=e^w$，$w=x^2+2\sin x$.

注

①并不是任意两个函数都可以复合成一个复合函数．如 $y=\sqrt{u-2}$，$u=\sin x$ 在实数范围内就不能进行复合．这是因为 $u=\sin x$ 在其定义域$(-\infty,+\infty)$中任何 x 的值对应的 u 值都小于 2，它们都不能使 $y=\sqrt{u-2}$ 有意义．即两个函数能复合的充要条件是：$y=f(u)$，$u=\varphi(x)$且内函数 $u=\varphi(x)$的值域与外函数 $y=f(u)$的定义域相交非空.

②复合函数的复合过程是由里到外，函数“套”函数而成的；分解复合函数时，采取由外到内层层分解的办法，拆分成若干基本初等函数或基本初等函数的四则运算的函数(简单初等函数).

1.1.4 初等函数

定义 1.3 由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算或有限次的复合运算构成的，且可用一个式子表示的函数，称为初等函数.

例如，$y=2x^2-1$，$y=\sin\dfrac{1}{x}$，$y=|x|=\sqrt{x^2}$ 以及前面见过的很多函数都是初等函数．高等数学中讨论的函数绝大多数都是初等函数．但需要注意的是，分段函数一般不是初等函数.

习题 1.1

(1)求下列函数的定义域：

①$y=\dfrac{x+1}{\sqrt{x-x^2}}$；　　②$y=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$；

③$y=\arccos\dfrac{1}{x}$；　　④$y=\dfrac{1}{e^x-1}$.

(2)求下列函数的值：

①设 $f(x)=e^{\sin x^2}$，求 $f(0)$，$f\left(\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\right)$，$f(f(0))$.

②设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0,\\ x-4, & x>0,\end{cases}$ 求 $f(0)$，$f(-1)$，$f(2)$，$f(f(e+2))$.

(3)下列每组的两个函数是否相同？为什么？

①$f(x)=\dfrac{x}{x}$，$g(x)=1$；

②$f(x)=|x|$，$g(x)=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0;\end{cases}$

③$f(x)=x+1$，$g(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$.

(4)判断下列函数的奇偶性：

①$y=\sin x\cos x$；　　②$y=\dfrac{3^x+3^{-x}}{2}$；

③$y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$；　　④$y=\dfrac{1+x}{1-x}$.

(5)设 $f(x)=1-x^2$，$\varphi(x)=\cos x$，求 $f(\varphi(x))$和 $\varphi(f(x))$.

(6)写出下列各函数的复合过程：

①$y=\arctan x^2$；　　②$y=\mathrm{e}^{\cos^2 x}$；

③$y=(1+\ln x)^3$；　　④$y=\dfrac{\ln\sqrt{(x+\sin x)}}{\mathrm{e}^x}$.

(7)讨论函数 $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$的单调性.

(8)设函数 $f(x)$是以 $T>0$ 为周期的周期函数，试证明：$f(ax)(a>0)$是以$\dfrac{T}{a}$为周期的周期函数.

(9)设函数 $f(x)$在数集 X 上有定义，试证："函数 $f(x)$在 X 上有界"的充分必要条件是"它在 X 上既有上界又有下界."

(10)求华氏温度(用℉表示)和摄氏温度(用℃表示)的转换公式，并求：

①90 ℉的等价摄氏温度和−5 ℃的等价华氏温度；

②是否存在一个温度值，使华氏温度计和摄氏温度计的读数是一样的？如果存在，那么该温度值是多少？

1.2 函数的极限

极限作为一种解题思想和研究工具自始至终贯穿于高等数学课程之中，它是区别常量数学与变量数学的主要标志．而函数的连续性又是函数的重要性质之一，它在刻画函数的性态中有着举足轻重的作用.

函数概念刻画了变量之间的关系，而极限概念着重刻画了变量的变化趋势．极限是学习微积分的基础和工具.

1.2.1 数列的极限

先说明数列的概念．如果按照某一法则，对每个 $n\in\mathbf{N}_+$，对应着一个确定的实数 x_n，这些实数 x_n 按照下标 n 从小到大排列得到的一个序列

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_n,\ \cdots,$$

就叫作数列，简记为数列$\{x_n\}$.

数列中的每一个数叫作数列的项，第 n 项 x_n 称为数列的一般项.

数列 x_1，x_2，…，x_n，…可以看作自变量为正整数的函数 $f(n)$，其中 $f(n)=x_n$，因此，数列的极限是一类特殊函数的极限，为了便于学习函数极限，先给出数列极限的定义.

定义 1.4　设$\{x_n\}$为一数列，如果存在常数 a，对于任意给定的正数 ε(不论多么小)，总存在正整数 N，使得当 $n>N$ 时，不等式

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

都成立，那么就称常数 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限，或者称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a，记作

$$\lim_{x\to\infty} x_n = a \text{ 或 } x_n \to a\,(n\to\infty),$$

其中，上式中的“$\to$”读作“趋于”，并称数列 $\{x_n\}$ 是收敛的；若数列 $\{x_n\}$ 没有极限，则称数列 $\{x_n\}$ 是发散的.

注

上面定义中的正数 ε 可以任意给定，因为只有这样，不等式 $|x_n - a| < \varepsilon$ 才能表达出 x_n 无限接近 a 的意思. 此外还应注意到：定义中的正整数 N 是与任意给定的正数 ε 有关的，它随着 ε 的给定而选定.

下面给“数列 $\{x_n\}$ 的极限为 a”一个几何解释.

将常数 a 及数列 x_1，x_2，…，x_n，…在数轴上用它们对应的点表示出来，再在数轴上做点 a 的 ε 邻域即开区间 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$，如图 1-4 所示.

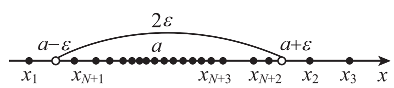


图 1-4

因为不等式 $|x_n - a| < \varepsilon$ 与不等式 $a-\varepsilon < x_n < a+\varepsilon$ 等价，所以当 $n > N$ 时，所有的点 x_n 都落在区间 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ 内，而只有有限个（至多只有 N 个）在这个区间以外.

为了表达方便，引入符号“$\forall$”表示“对于任意给定的”或“对于每一个”，符号“$\exists$”表示“存在”. 于是“对于任意给定的 $\varepsilon > 0$”写成“$\forall \varepsilon > 0$”，“存在正整数 N”写成“$\exists$ 正整数 N”，数列极限 $\lim\limits_{x\to\infty} x_n = a$ 的定义可表达为

$$\lim_{x\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists \text{ 正整数 } N,\text{ 当 } n > N \text{ 时，有 } |x_n - a| < \varepsilon.$$

现在列举几个说明数列极限概念的例子.

例 1 利用数列极限的定义，证明：数列 $2, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \cdots, 1+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}, \cdots$ 的极限是 1.

证明 $|x_n - 1| = \frac{1}{n}$，为了使 $|x_n - 1|$ 小于任意给定的正数 ε（设 $\varepsilon < 1$），只要

$$\frac{1}{n} < \varepsilon \text{ 或 } n > \frac{1}{\varepsilon},$$

所以 $\forall \varepsilon > 0$，取正整数 $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，当 $n > N$ 时，就有

$$\left|1+(-1)^{n-1}\frac{1}{n} - 1\right| < \varepsilon,$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\left[1+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right] = 1.$$

例 2 已知 $x_n = \frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$，证明：数列 $\{x_n\}$ 的极限是 0.

证明 $|x_n - 0| = \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{(n+1)}$.

为了使 $|x_n - 0|$ 小于任意给定的正数 ε（设 $\varepsilon < 1$），只要

$$\frac{1}{n+1}<\varepsilon \text{ 或 } n>\frac{1}{\varepsilon}-1,$$

所以 $\forall \varepsilon>0$，取正整数 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}-1\right]$，当 $n>N$ 时，就有

$$\left|\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}-0\right|<\varepsilon,$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}=0.$$

注

在利用数列极限的定义来论证某个数 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限时，重要的是对于任意给定的正数 ε，能够指出定义中所说的这种正整数 N 确实存在，但没有必要去求最小的 N. 如果知道 $|x_n-a|$ 小于某个量，那么当这个量小于 ε 时，$|x_n-a|<\varepsilon$ 自然也成立．若令这个量小于 ε 来定出 N 较方便，就可采用这种方法.

在数列 $\{x_n\}$ 中，任意抽取无限多项并保持这些项在原数列 $\{x_n\}$ 中的先后次序，这样得到的一个数列称为原数列 $\{x_n\}$ 的子数列(或子列).

设在数列 $\{x_n\}$ 中，第一次抽取 x_{n_1}，第二次在 x_{n_1} 后抽取 x_{n_2}，第三次在 x_{n_2} 后抽取 x_{n_3}，这样无休止地抽取下去，得到一个数列

$$x_{n_1},\ x_{n_2},\ \cdots,\ x_{n_k},\ \cdots,$$

这个数列 $\{x_{n_k}\}$ 就是数列 $\{x_n\}$ 的一个子数列．

注

在子数列 $\{x_{n_k}\}$ 中，一般项 x_{n_k} 是第 k 项，而在原数列 $\{x_n\}$ 中却是第 n_k 项，显然 $n_k\geqslant k$.

1.2.2 函数的极限

数列是定义于正整数集合上的函数，现在讨论定义于实数集合上的函数 $y=f(x)$ 的极限．根据自变量不同的变化趋势，下面分别给出函数极限的定义.

1.2.2.1 当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)$ 的极限

由反比例函数 $y=\frac{1}{x}$ 的图象(图 1-5)可以看出，x 轴是曲线的一条渐近线，也就是说当自变量 x 的绝对值无限增大时，相应的函数值 y 无限逼近常数 0，即当 $x\to\infty$ 时，函数 $y=\frac{1}{x}$ 的极限是 0.

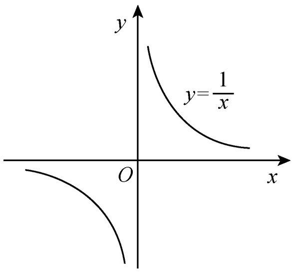


图 1-5

由此给出 $x\to\infty$ 时，函数极限的定义.

定义 1.5 设函数 $f(x)$ 当 $|x|$ 大于某一正数时有定义，如果存在常数 A，对于任意给定的正数 ε(不论它多么小)，总存在正数 X，使得当 x 满足不等式 $|x|>X$ 时，对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

那么称 A 为当 $x\to\infty$ 时 $f(x)$ 的极限，记作

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to\infty).$$

上述定义可简单表示为

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0,\ \exists X>0,\ 当\ |x|>X\ 时，有\ |f(x)-A|<\varepsilon.$$

从几何上来讲，$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$ 的意义是：作直线 $y=A-\varepsilon$ 和 $y=A+\varepsilon$，则总有一个正数 $X>0$ 存在，使得当 $|x|>X$ 时，函数 $y=f(x)$ 的图象位于这两直线之间．这时，直线 $y=A$ 称为函数 $y=f(x)$ 的图象的水平渐近线.

例 3　证明：$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin x}{x}=0$.

证明　$\forall \varepsilon>0$，要证 $\exists X>0$，当 $|x|>X$ 时，不等式 $\left|\dfrac{\sin x}{x}-0\right|<\varepsilon$ 成立.

因为 $\left|\dfrac{\sin x}{x}-0\right|=\left|\dfrac{\sin x}{x}\right|\leqslant\left|\dfrac{1}{x}\right|$，故 $\forall \varepsilon>0$，要证 $\left|\dfrac{\sin x}{x}-0\right|<\varepsilon$，只要证 $\left|\dfrac{1}{x}\right|<\varepsilon$，即 $|x|>\dfrac{1}{\varepsilon}$，由此可知，如果取 $X=\dfrac{1}{\varepsilon}$，那么当 $|x|>X$ 时，就有 $\left|\dfrac{1}{x}\right|<\varepsilon$ 成立，于是 $\left|\dfrac{\sin x}{x}-0\right|<\varepsilon$ 成立，这就证明了

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x}=0.$$

1.2.2.2　当 $x\to+\infty$ 或 $x\to-\infty$ 时，函数 $f(x)$ 的极限

有时还需要区分 x 趋于无穷大量的情况，如果 x 从某一时刻起，往后总是取正值且无限增大，则称 x 趋于正无穷大量，记作：$x\to+\infty$，此时定义中 $|x|>X$ 可改写成 $x>X$，就可得 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$ 的定义；如果 x 从某一时刻起，往后总取负值且 x 无限减小，那么称 x 趋于负无穷大量，记作：$x\to-\infty$，此时定义中的 $|x|>X$ 可改写成 $-x>X$，同样可得 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$ 的定义.

现在考查反正切函数 $f(x)=\arctan x$ 的图象，如图 1-6 所示．

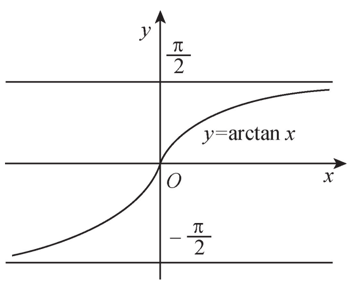


图 1-6

从图 1-6 可以看出，当 $x\to+\infty$ 时，函数 $f(x)=\arctan x$ 的值无限逼近于常数 $\dfrac{\pi}{2}$；而当 $x\to-\infty$ 时，函数 $f(x)=\arctan x$ 的值无限逼近于常数 $-\dfrac{\pi}{2}$.

当 $x\to\infty$，$x\to+\infty$，$x\to-\infty$ 时，由函数 $f(x)$ 的极限的定义，得到下面的定理.

定理 1.1　$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$ 的充分必要条件是

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} f(x)=A.$$

例 4　求下列极限：

①$\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$；　　②$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}$.

解　①因为

$$\lim_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x\to-\infty}\arctan x\neq\lim_{x\to+\infty}\arctan x.$$

所以，由定理 1.1 可知，$\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在.

②因为

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0,$$

所以

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=0.$$

1.2.2.3 当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限

下面考查函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$，当 $x\to1$ 时函数值的变化情况，如图 1-7 所示.

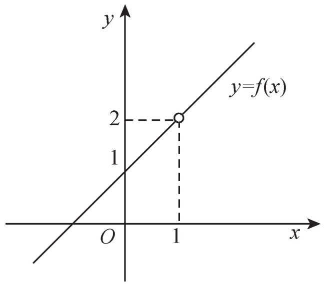


图 1-7

由图 1-7 可以看出，当 $x\to1$ 时，$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 的值无限接近常数 2，对于函数的这种变化趋势，有下面的定义：

定义 1.6 设函数 $f(x)$在 x_0 的某一去心邻域 $\mathring{U}(x_0,\ \delta)$内有定义，如果存在常数 A，对于任意给定的正数 ε(不论它多么小)，总存在正数 δ，使得当 x 满足不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，对应的函数值 $f(x)$都满足不等式

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

那么称 A 为 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$的极限，记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to x_0).$$

根据定义 1.6，上面的极限可记为$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$.

注

①极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 表示的是自变量 x 与 x_0 无限接近($x\neq x_0$)时，相应的函数值 $f(x)$的一种变化趋势：无限逼近常数 A；或者换个说法，当 $|x-x_0|$ 趋近 0 时，有 $|f(x)-A|$ 无限逼近 0. 因此，讨论 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$的极限，取决于 x_0 邻近的 $x(x\neq x_0)$处的函数值 $f(x)$，而与 $x=x_0$ 时 $f(x)$ 是否有定义或怎样定义无关.

②从几何上来讲，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的意义是：任意给定正数 ε，作直线 $y=A-\varepsilon$ 和 $y=A+\varepsilon$，介于两直线之间的是一条横区域．根据定义，对于给定的 ε，存在点 x_0 的一个 δ 邻域$(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$内，当 $y=f(x)$的图象上的点的横坐标在 x 邻域$(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$内，但 $x\neq x_0$ 时，这些点的纵坐标 $f(x)$满足不等式

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

或

$$A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon.$$

例 5 证明：$\lim\limits_{x\to x_0}C=C$($C$ 为常数).

证明 这里 $|f(x)-A|=|C-C|=0$，因此 $\forall$ 正数 ε，可任取正数 δ，使得当 x 满足不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，能使不等式

$$|f(x)-A|=|C-C|=0<\varepsilon$$

成立，所以 $\lim\limits_{x\to x_0} C=C$.

例 6 证明：$\lim\limits_{x\to 1}(2x-1)=1$.

证明 由于

$$|f(x)-A|=|2x-1-1|=2|x-1|,$$

为了使 $|f(x)-A|<\varepsilon$，只要

$$|x-1|<\frac{\varepsilon}{2},$$

所以 $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$，则当 x 满足不等式 $0<|x-1|<\delta$ 时，对应的函数值 $f(x)$ 就满足不等式

$$|f(x)-A|=|2x-1-1|=2|x-1|<\varepsilon,$$

从而

$$\lim_{x\to 1}(2x-1)=1.$$

1.2.2.4 当 $x\to x_0^+$ 或 $x\to x_0^-$ 时，函数 $f(x)$ 的左极限与右极限

有时候，需要考虑 x 只从 x_0 的左侧趋近于 x_0，记作 $x\to x_0^-$，或 x 只从 x_0 右侧趋近于 x_0，记作 $x\to x_0^+$ 时，函数值的变化趋势，由此，给出当 $x\to x_0^-$ 或 $x\to x_0^+$ 时，函数单侧极限的定义．

定义 1.7 设在 x_0 的某个左半邻域 $(x_0-\delta, x_0)$ [或者右半邻域 $(x_0, x_0+\delta)$] 内函数 $f(x)$ 有定义，如果存在常数 A，对于任意给定的正数 ε(不论它多么小)，总存在正数 δ，使得当 x 满足不等式 $x_0-\delta<x<x_0$ $(x_0<x<x_0+\delta)$ 时，对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

那么称 A 为函数 $f(x)$ 在 x_0 处的左极限(或右极限)，记作

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=A\left[\text{或} \lim_{x\to x_0^+} f(x)=A\right],$$

左极限与右极限统称为单侧极限.

定理 1.2 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 的充要条件是

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A.$$

例 7 设函数

$$f(x)=\begin{cases} x+2, & -\infty<x<0, \\ x, & 0\leqslant x<1, \\ (x-1)^2+1, & 1\leqslant x<+\infty. \end{cases}$$

试分别讨论当 $x\to 0$ 和 $x\to 1$ 的极限.

解 容易得出

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(x+2)=2;$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} x=0;$$

因为 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$，所以由定理 1.2 知，极限 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在．

同理

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} x=1;$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\left[(x-1)^2+1\right]=1.$$

因为 $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=1$，所以由定理 1.2 知，极限存在且有 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=1$.

1.2.2.5　函数极限的性质

函数极限的定义根据自变量的变化过程不同有多种形式，前面学过的数列的性质和下面函数的性质有很多相似之处.

下面仅以"$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$"这种形式为代表给出关于极限性质的一些定理，并就其中部分内容给出证明.

性质 1.1　(函数极限的唯一性)如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，那么这个极限唯一.

性质 1.2　(函数极限的局部有界性)如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，那么存在常数 $M>0$ 和 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)|\leqslant M$.

证明　因为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，所以取 $\varepsilon=1$，则 $\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有

$$|f(x)-A|<1\Rightarrow|f(x)|\leqslant|f(x)-A|+|A|<|A|+1.$$

记 $M=|A|+1$，则性质 1.2 得证.

性质 1.3　(函数极限的局部保号性)如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，且 $A>0$(或 $A<0$)，那么存在常数 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $f(x)>0$[或 $f(x)<0$].

证明　就 $A>0$ 的情形证明.

因为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A>0$，所以取 $\varepsilon=\dfrac{A}{2}>0$，则 $\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有

$$|f(x)-A|<\frac{A}{2}\Rightarrow f(x)>A-\frac{A}{2}=\frac{A}{2}>0,$$

类似地，可以证明 $A<0$ 的情形.

由性质 1.3 的证明过程可知，在性质 1.3 的条件下，可得下面更强的结论：

性质 1.3′　如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\,(A\neq0)$，那么就存在着 x_0 的某一去心邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta)$，当 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$时，就有 $|f(x)|>\dfrac{A}{2}$.

由性质 1.3 可得以下推论：

推论 1.1　如果在 x_0 的某一去心邻域内 $f(x)\geqslant0$[或 $f(x)\leqslant0$]，且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，那么 $A\geqslant0$(或 $A\leqslant0$).

习题 1.2

(1)观察下列数列的变化趋势，并写出收敛数列的极限：

①$x_n=\dfrac{n+1}{n-1}$；　②$x_n=\dfrac{2}{n^2}$；　③$x_n=(-1)^n\dfrac{n}{n^2+1}$；

④$x_n=\dfrac{3}{3^n}$；　⑤$x_n=(-1)^n$.

(2)根据数列极限的定义证明：

①$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}=0$；　②$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+1}{2n+1}=\dfrac{3}{2}$.

(3)设数列$\{x_n\}$有界，又 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$.

(4)写出下列函数的极限：

①$\lim\limits_{x\to 1}(x^2+2)$；　②$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3}{x^2}$；　③$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\sin x$；

④$\lim\limits_{x\to e}\ln x$；　⑤$\lim\limits_{x\to+\infty}3^{-x}$.

(5)根据函数极限的定义证明：

①$\lim\limits_{x\to 1}(x^2+5)=6$；　②$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6}{x^2}=0$.

(6)设函数 $f(x)=|x|$，画出它的图象，并讨论：当 $x\to 0$ 时，该函数在 $x=0$ 处的极限是否存在.

(7)设函数 $f(x)$的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & x<2,\\ 0, & x=2,\\ (x-1)^2+2, & x>2.\end{cases}$$

证明：函数 $f(x)$在 $x=2$ 时极限不存在.

(8)设函数

$$h(x)=\begin{cases}e^x, & x<0,\\ 1, & x=0,\\ \cos x, & x>0.\end{cases}$$

①求 $h(x)$在 $x=0$ 处的左右极限；

②求$\lim\limits_{x\to 0}h(x)$.

1.3 无穷小量与无穷大量

1.3.1 无穷小量

1.3.1.1 无穷小量的定义

定义 1.8 极限为零的变量称为无穷小量，简称无穷小量.

特别地，以零为极限的数列$\{x_n\}$称为 $n\to\infty$时的无穷小量.

由定义可知：当 $x\to 0$ 时，x，$\tan x$ 等都是无穷小量；当 $x\to\infty$时，$\dfrac{1}{x}$，$\dfrac{1}{x^2}$等也是无穷小量.

注

①零是唯一可以看作无穷小量的常数；

②不要把无穷小量与很小的数混为一谈. 因为无穷小量是这样的函数，在 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)的过程中，这函数的绝对值能小于任意给定的正数 ε，而很小的数如百万分之一，就不能小于任意给定的正数 ε(可以取千万分之一)；

③一般来说，无穷小量是相对于自变量的某个变化趋势而言的. 例如，$\dfrac{1}{x}$，当 $x\to\infty$时为无穷小量，但当 $x\to 1$ 时不是无穷小量.

例 1 自变量 x 在怎样的变化过程中，下列函数为无穷小量？

①$y=\frac{1}{2x-1}$；　②$y=2x-4$；　③$y=a^x(a>0，a\neq1)$.

解 ①因为$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{2x-1}=0$，所以当 $x\to\infty$时，$\frac{1}{2x-1}$为无穷小量.

②因为$\lim\limits_{x\to2}(2x-4)=0$，所以当 $x\to2$ 时，$2x-4$ 为无穷小量.

③$a>1$ 时，当 $x\to-\infty$时，a^x 是无穷小量；而 $0<a<1$ 时，当 $x\to+\infty$时，a^x 是无穷小量.

1.3.1.2 极限与无穷小量之间的关系

定理 1.3 “$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$”的充要条件是“$f(x)=A+\alpha(x)$，其中 $\alpha(x)$当 $x\to x_0$ 时为无穷小量.”

证明 先证必要性．设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

令 $\alpha(x)=f(x)-A$，则 $\alpha(x)$是当 $x\to x_0$ 时的无穷小量，且

$$f(x)=A+\alpha(x),$$

这就证明了 $f(x)$等于它的极限 A 与一个无穷小量$\alpha(x)$之和.

再证充分性．设 $f(x)=A+\alpha(x)$，其中 A 是常数，$\alpha(x)$当 $x\to x_0$ 时为无穷小量，于是$|f(x)-A|=|\alpha(x)|$，因为 $\alpha(x)$当 $x\to x_0$ 时为无穷小量，所以$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有

$$|\alpha(x)|<\varepsilon,$$

即

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

这就证明了 A 是 $f(x)$当 $x\to x_0$ 时的极限.

注

定理 1.3 中自变量的变化过程换成其他任何一种情形 $x\to0^+$，$x\to0^-$，$x\to\infty$，$x\to+\infty$，$x\to-\infty$时，结论仍成立.

1.3.1.3 无穷小量的性质

对于无穷小量具有如下的性质：

性质 1.4 有限个无穷小量的代数和还是无穷小量.

证明 考虑两个无穷小量的和.

设 α 和 β 是当 $x\to x_0$ 时的两个无穷小量，而

$$\gamma=\alpha+\beta,$$

$\forall\varepsilon>0$，因为 α 是 $x\to x_0$ 时的无穷小量，对于$\frac{\varepsilon}{2}>0$，$\exists\delta_1>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 时，不等式

$$|\alpha|<\frac{\varepsilon}{2}$$

成立. 又因 β 是 $x\to x_0$ 时的无穷小量，对于$\frac{\varepsilon}{2}>0$，$\exists\delta_2>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta_2$ 时，不等式

$$|\beta|<\frac{\varepsilon}{2}$$

成立．取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，

$$|\alpha|<\frac{\varepsilon}{2},\quad|\beta|<\frac{\varepsilon}{2}$$

同时成立，从而 $|\gamma|=|\alpha+\beta|\leqslant|\alpha|+|\beta|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$. 这就证明了 γ 也是 $x\to x_0$ 的无穷小量.

有限个无穷小量之和的情形可以类似证明.

性质 1.5 有界量与无穷小量的乘积还是无穷小量.

证明 设函数 u 在某一去心邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta_1)$ 内是有界的，即 $\exists M>0$ 使 $|u|\leqslant M$ 对一切 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta_1)$ 成立．又设 α 是当 $x\to x_0$ 时的无穷小量，即 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta_2>0$，使当 $0<|x-x_0|<\delta_2$，即当 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta_2)$ 时，有

$$|\alpha|<\frac{\varepsilon}{M},$$

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，则当 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$ 时，

$$|u|\leqslant M,\quad |\alpha|<\frac{\varepsilon}{M}$$

同时成立，从而

$$|u\alpha|=|u||\alpha|<M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon.$$

这就证明了 $u\alpha$ 是当 $x\to x_0$ 时的无穷小量.

推论 1.2 常数与无穷小量的乘积还是无穷小量.

性质 1.6 有限个无穷小量的乘积还是无穷小量．

注

①无穷多个无穷小量的和未必是无穷小量．如 $x\to\infty$ 时，$\frac{1}{x^2}$，$\frac{2}{x^2}$，…，$\frac{x}{x^2}$ 都是无穷小量，但 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^2}+\cdots+\frac{x}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x(x+1)}{2x^2}=\frac{1}{2}$.

②两个无穷小量的商未必是无穷小量．如 $x\to0$ 时，x，$2x$，x^2 都是无穷小量，由 $\lim\limits_{x\to0}\frac{2x}{x}=2$ 可知，当 $x\to0$ 时，$\frac{2x}{x}$ 不是无穷小量. 但由 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2}{x}=0$ 可知，当 $x\to0$ 时，$\frac{x^2}{x}$ 是无穷小量.

例 2 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\tan\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x}+\mathrm{e}^{-x^2}\right)$.

解 当 $x\to\infty$ 时，$\tan\frac{1}{x}$，$\sin\frac{1}{x}$ 和 e^{-x^2} 都是无穷小量，所以由性质 1.4 可得

$$\lim_{x\to\infty}\left(\tan\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x}+\mathrm{e}^{-x^2}\right)=0.$$

例 3 已知 $\lim\limits_{x\to0}g(x)=0$，求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left[g(x)\sin\frac{1}{x}\right]$.

解 因为 $\left|\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant1$，所以 $\sin\frac{1}{x}$ 是有界函数，并且 $\lim\limits_{x\to0}g(x)=0$，由性质 1.5 可得

$$\lim_{x\to0}\left[g(x)\sin\frac{1}{x}\right]=0.$$

1.3.1.4 无穷小量的比较

定义 1.9 设当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 和 $g(x)$ 都是无穷小量，

(1) 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=0$，那么称 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的高阶无穷小量[也称 $g(x)$ 为 $f(x)$ 的低阶无穷小量]，记

作 $f(x)=o(g(x))(x\to x_0)$；

(2)如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=C(C\neq 0$ 为常数)，那么称 $f(x)$是 $g(x)$的同阶无穷小量；

(3)如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g^k(x)}=C(C\neq 0$ 为常数，$k>0)$，那么称 $f(x)$是 $g(x)$的 k 阶无穷小量；

(4)特别地，如果当 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$ 时，那么称 $f(x)$和 $g(x)$是等价无穷小量，记作 $f(x)\sim g(x)(x\to x_0)$.

关于等价无穷小量有如下定理，此定理在极限的计算中经常会用到.

定理 1.4 设 $f(x)\sim\alpha(x)$，$g(x)\sim\beta(x)$，当 $x\to x_0$ 时，且 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$存在，则有

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}.$$

下列几组无穷小量是等价的：

$\sin x\sim x\,(x\to 0)$；$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2\,(x\to 0)$；$\tan x\sim x\,(x\to 0)$；$\sqrt{1+x}-1\sim\dfrac{1}{2}x\,(x\to 0)$；$e^x-1\sim x(x\to 0)$；$\ln(1+x)\sim x(x\to 0)$.

在求极限时，分子分母的无穷小量因子可用它们相应的等价无穷小量代换，从而达到简化计算的目的，这种方法叫作等价无穷小量代换法.

例 4 利用等价无穷小量代换法求下列极限：

①$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-x}-1}{x}$；　　②$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$.

解 ①因为当 $x\to 0$ 时，$e^{-x}-1\sim -x$，所以有

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{x}=-1.$$

②因为 $\tan x-\sin x=\tan x(1-\cos x)$，当 $x\to 0$ 时，$\tan x\sim x$，$1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{x^2}{2}}{x^3}=\frac{1}{2}.$$

注

在进行等价无穷小量的代换时，只能对分子或分母整体进行代换，不能对分子或分母的加减项用等价无穷小量代换.

例 5 比较下列各组无穷小量的阶：

①当 $x\to 0$ 时，$\sin x$ 与 $\tan x$；　　②当 $x\to+\infty$时，e^{-x} 与 2^{-x}；

③当 $x\to 0$ 时，$1-\cos x$ 与 x^2.

解 ①因为$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\tan x}=\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$，所以当 $x\to 0$ 时，$\sin x$ 和 $\tan x$ 是等价无穷小量.

②因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{-x}}{2^{-x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e}{2}\right)^{-x}=0$，所以当 $x\to+\infty$时，e^{-x} 是 2^{-x} 的高阶无穷小量.

③因为$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$，所以当 $x\to 0$ 时，$1-\cos x$ 是 x 的二阶无穷小量.

1.3.2 无穷大量

定义 1.10 设函数 $f(x)$在 x_0 的某一去心邻域内有定义(或$|x|$大于某一正数时有定义). 如果对于任意给定的正数 M(无论多大), 总存在正数 δ(或正数 X), 只要适合不等式 $0<|x-x_0|<\delta$(或$|x|>X$), 对应的函数值 $f(x)$总满足不等式

$$|f(x)|>M,$$

那么称函数 $f(x)$为当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的无穷大量, 简称为无穷大.

例如, 函数 $f(x)$是 $x\to x_0$ 时的无穷大量, 记作$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$; 函数 $f(x)$是 $x\to\infty$时的正无穷大量, 记作$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=+\infty$; 函数 $f(x)$是 $x\to x_0^+$ 时的负无穷大量, 记作 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=-\infty$.

注

①无穷大量必定是变量, 绝对值再大的常数也不是无穷大量.

②无穷大量是极限不存在的一种情形, 我们只是借用极限的符号: $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$, 表示“当 $x\to x_0$ 时, $f(x)$是无穷大量”.

③无穷大量和无界量是两个不同的概念, 无穷大量必定是无界量, 但是无界量未必是无穷大量, 如 $y=x\sin x$(当 $x\to\infty$时).

例 6 证明: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}=\infty$.

证明 设$\forall M>0$, 要使$\left|\dfrac{1}{x-1}\right|>M$, 只要$|x-1|<\dfrac{1}{M}$, 所以, 取$\delta=\dfrac{1}{M}$, 则只要 x 适合不等式 $0<|x-1|<\delta=\dfrac{1}{M}$, 就有$\left|\dfrac{1}{x-1}\right|>M$. 这就证明了$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}=\infty$.

1.3.3 无穷大量与无穷小量的关系

定理 1.5 如果函数 $f(x)$在自变量 x 的某一变化过程中是无穷大量, 那么在同一变化过程中$\dfrac{1}{f(x)}$为无穷小量; 反之, 在自变量 x 的某一变化过程中, 如果 $f(x)(f(x)\neq 0)$为无穷小量, 那么在同一变化过程中, $\dfrac{1}{f(x)}$为无穷大量.

证明 设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$, $\forall\varepsilon>0$, 根据无穷大量的定义, 对于$M=\dfrac{1}{\varepsilon}$, $\exists\delta>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 有

$$|f(x)|>M=\frac{1}{\varepsilon},$$

即

$$\left|\frac{1}{f(x)}\right|<\varepsilon,$$

所以$\dfrac{1}{f(x)}$为当 $x\to x_0$ 时的无穷小量.

反之, 设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$ 且 $f(x)\neq 0$. $\forall M>0$, 根据无穷小量的定义, 对于 $\varepsilon=\dfrac{1}{M}$, $\exists\delta>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 有

$$|f(x)|<\varepsilon=\frac{1}{M}.$$

由于当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时 $f(x)\neq 0$，所以

$$\left|\frac{1}{f(x)}\right|>M,$$

所以 $\frac{1}{f(x)}$ 为当 $x\to x_0$ 时的无穷大量.

类似地，可证当 $x\to\infty$ 的情形.

例 7　自变量在怎样的变化过程中，下列函数为无穷大量?

①$y=x$；　②$y=\frac{1}{x+2}$；　③$y=\ln(1-x)$；　④$y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$.

解　①当 $x\to\infty$ 时，$\lim\limits_{x\to\infty}x=\infty$，所以 $x\to\infty$ 时，x 是无穷大量.

②当 $x\to-2$ 时，$\frac{1}{x+2}\to\infty$，所以 $x\to-2$ 时，$\frac{1}{x+2}$ 是无穷大量.

③当 $x\to1^-$ 或 $x\to-\infty$ 时，$\ln(1-x)$ 是无穷大量.

④当 $x\to-\infty$ 时，$\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 是无穷大量.

习题 1.3

(1)下列函数在怎样的变化过程中是无穷大量或无穷小量?

①$\sin x$；　②$\frac{3}{x+1}$；

③$\ln x$.

(2)指出下列各题中的无穷大量与无穷小量：

①$\tan x\left(x\to\frac{\pi}{2}\right)$；　②$e^{-x}(x\to+\infty)$；

③$2^x-1(x\to0)$；　④$\frac{1}{x-1}(x\to1)$.

(3)根据定义证明：

①$y=\frac{x^2-9}{x+3}$ 为当 $x\to3$ 时的无穷小量；

②$y=\frac{1+2x}{x}$ 为当 $x\to0$ 时的无穷大量.

(4)利用等价无穷小量代换法求下列函数的极限：

①$\lim\limits_{x\to1}\frac{\sin(1-x)}{\ln x}$；　②$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\tan x^2}$；

③$\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2+2x}{\sin x}$；　④$\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x^2)(e^x-1)}{(1-\cos x)\sin 2x}$.

(5)如果函数 $f(x)$ 在某一变化过程中极限不存在，问：此函数在这一变化过程中是不是无穷大量?请举例说明.

1.4 极限的运算法则

下面给出极限的四则运算法则.

定理 1.6 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$，则有

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A\pm B$；

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A\cdot B$；

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}=\dfrac{A}{B}$ [其中 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\neq 0$].

此定理称为极限的四则运算法则.

推论 1.3 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，C 为常数，那么 $\lim\limits_{x\to x_0}[Cf(x)]=C\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

推论 1.4 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，$n\in\mathbf{N}$，那么 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^n=[\lim\limits_{x\to x_0} f(x)]^n$.

注

①以上法则对自变量的其他几种变化过程也成立.

②法则要求 $f(x)$，$g(x)$ 的极限分别存在.

③定理 1.6 中的法则(1)、(2)可以推广到任意有限个函数的情形，如

$$\lim_{x\to x_0}[f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_n(x)]=\lim_{x\to x_0} f_1(x)+\lim_{x\to x_0} f_2(x)+\cdots+\lim_{x\to x_0} f_n(x).$$

利用极限的基本性质和极限的四则运算法则可以解决许多极限问题，下面来看几个具体例子.

例 1 计算极限 $\lim\limits_{x\to 1}(x^3+2x^2+5)$.

解 由极限运算法则，得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}(x^2+2x^2+5)&=\lim_{x\to 1}x^3+\lim_{x\to 1}2x^2+\lim_{x\to 1}5\\&=(\lim_{x\to 1}x)^3+\lim_{x\to 1}2x^2+\lim_{x\to 1}5\\&=1^3+2\times 1^2+5=8.\end{aligned}$$

一般有

$$\lim_{x\to x_0}(a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n)=a_0x_0{}^n+a_1x_0{}^{n-1}+\cdots+a_n,$$

其中，$f_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$ 称为 n 次多项式函数.

例 2 计算极限 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x^2-3x+2}$.

解 当 $x\to 1$ 时，分母的极限为零，故不能直接用极限的运算法则．但由极限定义知，当 $x\to 1$ 时的极限与函数在 $x=1$ 点有无定义没有关系，因而可以先通过分解因式化简后再求极限.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^2-3x+2}&=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x-2)}\\&=\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x-2}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(x+2)}{\lim\limits_{x\to 1}(x-2)}=-3.\end{aligned}$$

注

对于例 2，以下解法是错误的：

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{x^2-3x+2}=\frac{\lim\limits_{x\to1}(x^2+x-2)}{\lim\limits_{x\to1}(x^2-3x+2)}=\frac{0}{0}=0.$$

像例 2 这样，先通过对分子、分母进行因式分解或恒等变形化简消去零因子，再求极限，这种方法在求一些“$\frac{0}{0}$”型极限时经常用到．由于“$\frac{0}{0}$”型的极限可能存在，也可能不存在，所以这种极限也称为不定式(不定型).

例 3 求极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sqrt{x+1}-1}$.

解 此题也是“$\frac{0}{0}$”型不定式，但求解时不能直接通过分解因式化简消去零因子，由于分母中含根号，所以先通过“分母有理化”化简，然后再求极限.

$$\lim_{x\to0}\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}=\lim_{x\to0}\frac{x(\sqrt{x+1}+1)}{x+1-1}=\lim_{x\to0}(\sqrt{x+1}+1)=2.$$

例 4 求极限$\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right)$.

解 因为$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x}{x-1}=\infty$，$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2}{x^2-1}=\infty$，所以不能用差的极限的运算法则．可先对函数进行通分，化成“$\frac{0}{0}$”型不定式，再利用因式分解化简消零因子的方法计算.

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}\right)=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to1}\frac{x+2}{x+1}=\frac{3}{2}.$$

例 5 求极限$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2x-1}{x^2-1}$.

解 当 $x\to\infty$时，分子、分母都是无穷大量，极限都不存在，所以不能直接用商的极限的运算法则，这种两个无穷大量的比“$\frac{\infty}{\infty}$”型的极限，和“$\frac{0}{0}$”型的极限一样，也是不定式．由于分子、分母关于 x 的最高次幂是 x^2，所以我们可以先将分子分母同时除以 x^2，然后再求极限.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+2x-1}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}}=3.$$

一般有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots b_m}=\lim_{x\to\infty}x^{n-m}\frac{a_0+a_1\cdot\frac{1}{x}+\cdots+a_n\cdot\frac{1}{x^n}}{b_0+b_1\cdot\frac{1}{x}+\cdots+b_m\cdot\frac{1}{x^m}}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & m=n,\\ 0, & m>n,\\ \infty, & m<n.\end{cases}$$

这里 $a_0\neq0$，$b_0\neq0$，m，n 为正整数.

例 6　求极限$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$.

解　$x\to1$ 时，$x^2-1\to0$，但 $x^2+x\to2(\neq0)$，不能直接用商的极限运算法则，由于该分式倒数的极限值为零，即

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x^2+x}=\frac{1^2-1}{1^2+1}=0,$$

因此，由无穷大量和无穷小量的关系，得$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+x}{x^2-1}=\infty$，故该极限不存在.

例 7　求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}\right)$.

解　当 $n\to\infty$时，上式是无限项之和，而极限的运算法则仅适用于有限项之和，这时必须先对函数式作适当的变形再求极限.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1\times\left(1-\dfrac{1}{2^{n+1}}\right)}{1-\dfrac{1}{2}}=2.$$

定理 1.7　（复合函数的极限运算法则）设函数 $y=f(g(x))$是由函数 $u=g(x)$与函数 $y=f(u)$复合而成，$y=f(g(x))$在点 x_0 的某去心邻域内有定义，若$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=u_0$，$\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$，且存在 $\delta_0>0$，当 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta_0)$时，有 $g(x)\neq u_0$，则

$$\lim_{x\to x_0}f(g(x))=\lim_{u\to u_0}f(u)=A.$$

小　结

①运用极限的四则运算法则时，必须注意只有各项极限存在（求商时还要规定分母的极限不为零）才能适用.

②如果所求极限是“$\dfrac{0}{0}$”或“$\dfrac{\infty}{\infty}$”等不定式形式，不能直接用极限法则，必须先对原式进行恒等变形（约分、通分、有理化、变量代换等），然后再求极限.

习题 1.4

（1）计算下列极限：

①$\lim\limits_{x\to0}(\sin x+\cos x+\tan x)$；　②$\lim\limits_{x\to2}(x^2-x-2)$；

③$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(2-\dfrac{2}{x^3}\right)$；　④$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+1}{x^2+2x}$；

⑤$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+x-2}{x-1}$；　⑥$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3+3x^2-2x+1}{6x^3-2x^2-5}$；

⑦$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}$；　⑧$\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1-3x}{1-x^2}\right)$；

⑨$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\cos x}{2x}$；　⑩$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{3+x}-\sqrt{3}}$.

(2)计算下列数列和的极限：

①$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n^2}+\frac{4}{n^2}+\cdots+\frac{2n}{n^2}\right)$； ②$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{n\times(n+1)}\right]$.

(3)已知 a，b 是常数，且 $\lim\limits_{x\to -1}\frac{ax+b}{x+1}=3$，求 a 和 b.

(4)设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$，证明：有 $x\to x_0$ 时的无穷小量 α，使 $f(x)=g(x)+\alpha$.

(5)若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty$，证明：$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$不存在.

1.5 函数的连续性

连续性是函数的重要性质之一，它反映了自然界中的许多现象，例如气温、物体运动的路程等都随着时间的改变而发生连续变化，当时间的改变量很小时，则该时刻空气的温度、物体运动的路程的改变量也很小.在数学上，可以用函数的连续性来表达这一性质.

下面先给出变量的增量(或称改变量)的概念，再引入函数连续的概念.

设 $y=f(x)$在 x_0 的某个邻域内有定义，当自变量从 x_0 变动到 x 时，称 $\Delta x=x-x_0$ 为自变量的增量(或改变量)，对应函数值从 $f(x_0)$变动到 $f(x_0+\Delta x)$，称 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$为函数的增量(或改变量).

变量的增量可以是正数、负数或零.

1.5.1 函数连续的概念

定义 1.11 设函数 $y=f(x)$在点 x_0 的某个邻域 $U(x_0)$内有定义，如果在 x_0 处，当自变量的增量 Δx 趋于零时，对应的函数的增量 Δy 也趋于零，即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0,$$

那么称函数 $y=f(x)$在点 x_0 处连续，点 x_0 称为函数 $f(x)$的连续点.

利用增量的定义，我们可以得出函数连续的另一等价定义.

定义 1.12 设函数 $y=f(x)$在点 x_0 的某个邻域$U(x_0)$内有定义，如果函数 $f(x)$当 $x\to x_0$ 时极限存在，且等于它在点 x_0 的函数值，即

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0),$$

那么称函数 $y=f(x)$在点 x_0 处连续，点 x_0 称为函数的连续点.

由函数 $f(x)$当 $x\to x_0$ 时的极限定义可知，上述定义也可用“$\varepsilon-\delta$”语言表达如下：

函数 $y=f(x)$在点 x_0 处连续$\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当$|x-x_0|<\delta$ 时，有$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

如果函数 $f(x)$在 x_0 有 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$[或 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$]，那么称函数 $y=f(x)$在点 x_0 右连续(或左连续)，记作 $f(x_0^+)=f(x_0)$[或 $f(x_0^-)=f(x_0)$].

关于函数的左连续和右连续有下面的一个定理.

定理 1.8 “函数 $f(x)$在点 x_0 处连续”的充分必要条件是“函数 $f(x)$在该点左连续且右连续.”

如果函数 $f(x)$在(a,b)内每一点都连续，那么称函数 $y=f(x)$在(a,b)内连续，区间(a,b)称为连续区间.如果函数 $y=f(x)$在(a,b)内连续，且该函数在左端点处右连续，在右端点处左连续，那么称函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续.

函数 $f(x)$在它的定义域内每一点都连续，则称 $f(x)$为连续函数.

从几何直观上，区间上的连续函数的图象是一条不间断的曲线.

例 1 证明：函数 $y=\ln x$ 在区间$(0,+\infty)$内连续.

证明 设 x_0 是定义域$(0,+\infty)$内任意一点，当 x 在 x_0 处有增量 Δx 时，对应函数的增量 Δy 为

$$\Delta y=\ln(x_0+\Delta x)-\ln x_0=\ln\frac{x_0+\Delta x}{x_0}=\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x_0}\right),$$

当 $\Delta x\to 0$ 时，$\dfrac{\Delta x}{x_0}\to 0$，则 $\ln\left(1+\dfrac{\Delta x}{x_0}\right)\to 0$，即有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0,$$

所以由连续的定义可知，函数 $y=\ln x$ 在$(0,+\infty)$内连续.

例 2 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性.

解 因为 $x\to 0$ 时，$x\sin\dfrac{1}{x}$是无穷小量，且

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\left(x\sin\frac{1}{x}\right)=0=f(0),$$

所以函数 $f(x)$在 $x=0$ 处连续.

例 3 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}1+\cos x, & x<\dfrac{\pi}{2},\\ \sin x, & x\geqslant\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$ 在 $x=\dfrac{\pi}{2}$处的连续性.

解 由于 $f(x)$在 $x=\dfrac{\pi}{2}$的左、右表达式不同，所以先讨论函数 $f(x)$在$\dfrac{\pi}{2}$处的左、右连续性.

由于

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}(\sin x)=\sin\frac{\pi}{2}=1=f\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(1+\cos x)=1+\cos\frac{\pi}{2}=1=f\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

所以函数 $f(x)$在 $x=\dfrac{\pi}{2}$处左、右连续，从而在 $x=\dfrac{\pi}{2}$处连续.

1.5.2 初等函数的连续性

1.5.2.1 连续函数的和差积商的运算

定理 1.9 若函数 $f(x)$，$g(x)$都在 x_0 处连续，则函数 $f(x)\pm g(x)$，$f(x)\cdot g(x)$也在 x_0 处连续.

定理 1.10 若函数 $f(x)$，$g(x)$都在 x_0 处连续，$g(x_0)\neq 0$，则在 x_0 处函数$\dfrac{f(x)}{g(x)}$也连续.

注

定理 1.9 可以推广到任意有限个函数的情况.

1.5.2.2 反函数与复合函数的连续性

定理 1.11 如果函数 $y=f(x)$在某区间上单调增加(或减少)且连续，那么它的反函数 $x=f^{-1}(y)$在

相应的区间上单调增加(或减少)且连续.

例 4　讨论函数 $y=\arcsin x(x\in[-1,1])$ 的连续性.

解　由于 $y=\sin x$ 在 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上单调增加且连续，由定理1.11，得 $y=\sin x$ 的反函数 $x=\arcsin y$ 在 $[-1,1]$ 上连续，所以函数 $y=\arcsin x$ 在 $[-1,1]$ 上连续.

定理 1.12　设函数 $u=\varphi(x)$ 在 x_0 处连续且 $u_0=\varphi(x_0)$，函数 $y=f(u)$ 在 u_0 处连续，则复合函数 $y=f(\varphi(x))$ 在 x_0 处连续.

推论 1.5　若 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0$，函数 $y=f(u)$ 在 u_0 处连续，则

$$\lim_{x\to x_0}f(\varphi(x))=f(\lim_{x\to x_0}\varphi(x)).$$

此推论表明，只要复合函数连续，则极限符号可以同运算符号交换次序 .

注

①定理 1.12 在复合函数极限的计算中有着重要的用途，在计算 $\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]$ 时，只要满足定理 1.12 的条件，可通过变换 $u=\varphi(x)$，转化为求 $\lim\limits_{u\to u_0}f(u)$，从而使得计算简化.

②定理 1.12 和推论 1.5 中的 $x\to x_0$ 换成 $x\to\infty$ 等其他情形，结论也成立.

例 5　求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\cos\dfrac{(x^2-1)\pi}{x^2+1}$.

解　因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x^2-1)\pi}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\left(\dfrac{1}{x}\right)^2}{1+\left(\dfrac{1}{x}\right)^2}\cdot\pi=\pi$ 且 $y=\cos u$ 在 $u=\pi$ 处连续，所以由推论 1.5，得

$$\lim_{x\to\infty}\cos\frac{(x^2-1)\pi}{x^2+1}=\cos\left[\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2-1)\pi}{x^2+1}\right]=\cos\pi=-1.$$

1.5.2.3　初等函数的连续性

如果函数 $f(x)$ 在一个区间的每一点处都连续，那么称 $f(x)$ 在该区间上连续 . 可以证明：基本初等函数在其定义域内是连续的；所有初等函数在其定义域内都是连续的.

因此，求初等函数 $f(x)$ 在其定义区间内的点 x_0 处的极限，可以直接用 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ 来求；求初等函数的连续区间就是求定义区间. 关于分段函数的连续性，除考虑每一段函数的连续性外，还必须讨论定义域分界点处的连续性.

例 6　求极限 $\lim\limits_{x\to1}\sqrt{3x^2-x+2}$.

解　易知函数 $f(x)=\sqrt{3x^2-x+2}$ 是初等函数，因此有

$$\lim_{x\to1}\sqrt{3x^2-x+2}=\sqrt{3\cdot1^2-1+2}=2.$$

例 7　求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{\sin 5x}$.

解

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sin 5x}&=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)}{\sin5x(\sqrt{x+4}+2)}\\&=\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin 5x(\sqrt{x+4}+2)}\\&=\frac{1}{5}\lim_{x\to0}\frac{5x}{\sin5x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{x+4}+2}\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(\sqrt{0+4}+2)}$$
$$=\frac{1}{20}.$$

1.5.3 函数的间断点

定义 1.13　设函数 $f(x)$ 在 x_0 的空心邻域内有定义且函数 $f(x)$ 在 x_0 点不连续，则称 x_0 为函数 $f(x)$ 的间断点.

由函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续的定义可知，x_0 是函数 $f(x)$ 的间断点，至少属于下列三种情形之一：

(1) $f(x)$ 在点 x_0 处无定义；

(2) 极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在；

(3) $f(x)$ 在 x_0 处有定义且极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，但 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$.

例 8　讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2}, & x\neq 2,\\ 2, & x=2\end{cases}$ 的连续性，并求它的间断点.

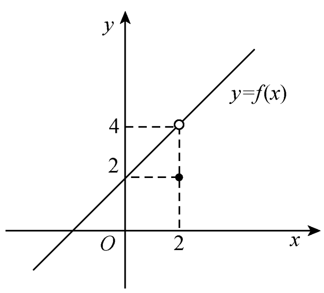


图 1-8

解　因为 $x\neq 2$ 时，$f(x)=x+2$，所以函数 $f(x)$ 有连续区间 $(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$.

因为 $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\lim\limits_{x\to 2}(x+2)=4\neq f(2)$，所以 $x=2$ 是函数 $f(x)$ 的间断点，如图 1-8 所示.

例 9　讨论函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}$ 的连续性，求它的间断点.

解　函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}$ 是初等函数，其定义域 $D=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，因此，函数 $f(x)$ 有连续区间 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. $x=0$ 是它的间断点.

例 10　讨论函数 $f(x)=\begin{cases}5x-1, & x<1,\\ 5, & x=1,\\ 5x+1, & x>1\end{cases}$ 的连续性，并求它的间断点.

解　函数图象如图 1-9 所示.

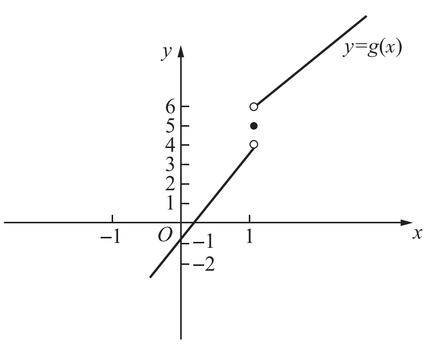


图 1-9

因为 $x>1$ 时，函数 $f(x)=5x+1$ 是连续的；$x<1$ 时，函数 $f(x)=5x-1$ 也是连续的，所以函数 $f(x)$ 有连续区间 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.

因为 $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(5x+1)=4$，$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(5x+1)=6$，即左右极限存在但不相等，所以 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ 不存在，$x=1$ 为函数 $f(x)$ 的间断点.

例 11　求正切函数 $y=\tan x$ 的间断点.

解　正切函数为基本初等函数，在定义域内处处连续. 在 $x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 处，$\tan x$ 无意义，且

$$\lim_{x\to k\pi+\frac{\pi}{2}}\tan x=\infty.$$

因此 $k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 为 $y=\tan x$ 的间断点.

由以上的四个例题可知，函数的间断点在间断的“程度”上有很大的差异，为了便于表达，我们把函数的间断点分为以下类型.

(1)若函数 $f(x)$在间断点 x_0 处的左、右极限都存在，则称 x_0 为函数 $f(x)$的第一类间断点. 其中左、右极限相等的间断点称为可去间断点；左、右极限不等的间断点称为跳跃间断点.

(2)若函数 $f(x)$在间断点 x_0 处的左、右极限至少有一个不存在，则称 x_0 为函数 $f(x)$的第二类间断点. 若在第二类间断点中，左、右极限至少有一个为无穷大量，则间断点称为无穷间断点.

例 8 中的 $x=2$、例 9 中的 $x=0$ 都是可去间断点. 对于例 8 如果改变函数 $f(x)$在 $x=2$ 的定义$[f(2)=4]$，就可以使函数在 $x=2$ 处连续；对于例 9，只要补充定义 $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\dfrac{1}{2}$，即

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}, & x\neq 0,\\ \dfrac{1}{2}, & x=0,\end{cases}$$

则能使函数 $f(x)$在 $x=0$ 处连续.

一般地，对函数 $y=f(x)$有可去间断点 x_0，只要重新定义或补充定义为 $f(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$，则函数 $f(x)$便在 x_0 处连续，这也是可去间断点这一名称的由来.

例 10 中的 $x=1$ 是函数的第一类跳跃间断点. 从图象上看，在跳跃间断点的左、右图象有一个突跳. 如图 1-9 所示.

例 11 中正切函数 $y=\tan x$ 的间断点 $k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$是属于第二类间断点. 由于 $\lim\limits_{x\to k\pi+\frac{\pi}{2}}\tan x=\infty$，所以 $k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$为 $y=\tan x$ 的第二类的无穷间断点.

1.5.4 闭区间上连续函数的性质

闭区间上的连续函数有一些非常重要的性质，下面仅给出定理的叙述，不做证明.

定理 1.13 (最值存在定理)闭区间上的连续函数必能取到最大值和最小值. 即若 $f(x)$在$[a, b]$上连续，则在$[a, b]$上至少存在一点 ξ_1 和一点 ξ_2，对于$[a, b]$上任一点 x，均满足：

$$f(\xi_1)\leqslant f(x)\leqslant f(\xi_2),$$

称 $f(\xi_1)$为 $f(x)$在$[a, b]$上的最小值，$f(\xi_2)$为 $f(x)$在$[a, b]$上的最大值.

注

如果定理 1.13 中“闭区间”和“连续”的条件不具备，那么结论可能不成立. 如果函数 $y=x$ 在开区间$(0, 1)$内连续，那么它既无最大值也无最小值.

推论 1.6 (有界定理)闭区间上的连续函数有界.

定理 1.14 (介值定理)闭区间上的连续函数必能取到介于最大值和最小值之间的一切值，即函数 $f(x)$在闭区间$[a, b]$上连续，C 是介于 $f(x)$的最大值 M 和最小值 m 之间的一个值，则至少存在一点 $\xi\in[a, b]$，使得 $f(\xi)=C$.

推论 1.7 (零点存在定理)若 $f(x)$在闭区间$[a, b]$上连续，且 $f(a)\cdot f(b)<0$，则至少存在一点 $\xi\in(a, b)$，使得 $f(\xi)=0$.

这个定理也叫作根的存在定理，常用来判断方程是否存在根.

例 12 证明：方程 $x^5-3x^3+1=0$ 在区间$(0, 1)$内至少有一个根.

证明 令 $f(x)=x^5-3x^3+1$，则 $f(x)$显然在$[0, 1]$上连续，并且有

$$f(0)=1>0, \quad f(1)=-1<0,$$

则由零点存在定理可知，在$(0, 1)$内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=0$，即

$$\xi^5-3\xi^3+1=0, \quad \xi\in(0, 1),$$

这说明方程 $x^5-3x^3+1=0$ 在$(0, 1)$内至少有一个根.

习题 1.5

(1)用连续性定义证明：$y=\sin x$ 在其定义域内连续.

(2)设函数 $f(x)=\begin{cases} e^x, & x<0, \\ x+a, & x\geqslant 0, \end{cases}$ 求常数 a，使函数 $f(x)$在$(-\infty, +\infty)$内连续.

(3)求下列函数的间断点：

①$y=\dfrac{1}{x-2}$；　②$y=\dfrac{1}{x\sin x}$；

③$y=\dfrac{x+1}{x}$；　④$y=\dfrac{1}{\ln x}$.

(4)讨论下列函数的连续性，若存在间断点，指出间断点的类型：

①$f(x)=\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}$；　②$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x}\sin x, & x<0, \\ 2, & x=0, \\ x\sin\dfrac{1}{x}, & x>0. \end{cases}$

(5)求下列函数的极限：

①$\lim\limits_{x\to\frac{2}{\pi}}\sin\dfrac{1}{x}$；　②$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+1}{x-2}$；

③$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$；　④$\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}}$；

⑤$\lim\limits_{x\to\pi^+}\dfrac{\sin x}{\sqrt{1+\cos x}}$.

(6)证明：方程 $x^4-4x+2=0$ 在区间$(1, 2)$内至少有一个实根.

(7)证明：方程 $x=2\sin x+1$ 至少有一个小于 3 的正根.

(8)设 $f(x)$在 **R** 上连续，且 $f(x)\neq 0$，$\varphi(x)$在 **R** 上有定义，且有间断点，则下列陈述中哪些是对的，哪些是错的？如果是对的，请说明理由；如果是错的，试给出一个反例.

①$\varphi(f(x))$必有间断点；　②$(\varphi(x))^2$ 必有间断点；

③$f(\varphi(x))$未必有间断点；　④$\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$必有间断点.

第 2 章

导数和微分