

# 小学数学课程与教学



类目：教育类

书名：小学数学课程与教学

主编：王荟 王志勇

出版社：电子科技大学出版社

开本：大 16 开

书号：978-7-5770-2158-4

使用层次：通用

出版时间：2026 年 4 月

定价：49.80 元

印刷方式：双色

是否有资源：有

策划编辑: 万晓桐  
责任编辑: 龚煜  
封面设计: 龚煜

# 小学数学 课程与教学

1958  
+ 2467  
-----  
4425



ISBN 978-7-312-2158-4

9 787577 021584 >

定价: 49.80元

“互联网+”教育类创新融合教材



教育类创新融合教材  
“互联网+”教育改革新理念教材

小学数学课程与教学

主编◎王荟 王志勇

电子科技大学出版社

# 小学数学 课程与教学

主编◎王荟 王志勇

电子科技大学出版社  
University of Electronic Science and Technology of China Press

1958  
+ 2467  
-----  
4425



教育类创新融合教材  
“互联网+”教育改革新理念教材

# 小学数学 课程与教学

主 编 ◎ 王 荟 王志勇

副主编 ◎ 季万鹏 李献庆 魏卫霞

王松丽 李红丽 金秀霞

李海霞 李 晶



电子科技大学出版社  
University of Electronic Science and Technology of China Press

· 成 都 ·

图书在版编目 (CIP) 数据

小学数学课程与教学 / 王荟, 王志勇主编. -- 成都 :  
成都电子科大出版社, 2026. 4. -- ISBN 978-7-5770  
-2158-4

I. G623.502

中国国家版本馆 CIP 数据核字第 20253CG591 号

小学数学课程与教学

XIAOXUE SHUXUE KECHENG YU JIAOXUE

王 荟 王志勇 主编

策划编辑 万晓桐  
责任编辑 龚 煜  
责任校对 万晓桐  
责任印制 梁 硕

出版发行 电子科技大学出版社  
成都市一环路东一段 159 号电子信息产业大厦九楼 邮编 610051

主 页 [www.uestcp.com.cn](http://www.uestcp.com.cn)  
服务电话 028-83203399  
邮购电话 028-83201495

印 刷 三河市祥达印刷包装有限公司  
成品尺寸 210 mm × 285 mm  
印 张 14  
字 数 388 千字  
版 次 2026 年 4 月第 1 版  
印 次 2026 年 4 月第 1 次印刷  
书 号 ISBN 978-7-5770-2158-4  
定 价 49.80 元

版权所有, 侵权必究



# PREFACE

党的二十大报告对教育事业作出重大战略部署，首次把教育、科技、人才进行一体化统筹安排和整体论述，提出了一系列新观点、新论断、新思想，为小学教育的发展指明了方向，为小学教育的教材编写指明了方向。

全书内容共包含九章，包括数学课程基础理论、数学学习过程与认知、小学数学教材分析与教学设计、数与代数的教学、图形与几何的教学、统计与概率的教学、教学实施与课堂艺术、教学评价与专业发展、小学教师资格与综合实践。本书具有以下几个特点。

## 1. 素质教育，立德树人

党的二十大报告指出：“育人的根本在于立德。”本书有机融入党的二十大精神，秉承能力教育与素质教育同向同行的理念，在正文中添加了“德育长廊”模块，旨在培养学生形成正确的世界观、人生观和价值观，全面提高学生的综合素质。

## 2. 校际合作，案例实用

在本书的编写过程中，编者得到了师范类学校及小学数学教学研究领域专家的大力支持与帮助。他们提供了来源于一线、丰富而实用的教学案例。这些案例不仅可以锻炼学生的工作思维和实践能力，还可以帮助学生更快地适应未来的教育教学工作。

## 3. 全新形态，全新理念

本书结构清晰、编排有序，每章均由若干小节组成。每章开篇设置了“数海启航”和“目标罗盘”等模块，帮助读者了解全章内容；每章末添加“智慧结晶”“讲台模拟”“思维擂台”等模块，帮助学生提高实践能力，巩固所学知识。

本书具有理论性、系统性、实用性等特点，既可作为师范专业数学课程的教材，也可作为中小学数学教师和数学课程爱好者的参考用书。

在编写本书的过程中，编者参阅了大量的文献资料，借鉴了一些著作的内容。在此，向各位作者一并表示感谢。由于编者理论修养和实践经验水平有限，书中难免存在疏漏，敬请广大师生批评指正。





# CONTENTS

## 第一章 数学课程基础理论 \ 1

数海启航 \ 1

目标罗盘 \ 1

数学脉络 \ 2

### 第一节 小学数学学科的性质与任务 \ 2

一、数学学科的本质和特征 \ 2

二、数学科学与小学数学学科 \ 4

三、小学数学学科的性质、地位与作用 \ 5

### 第二节 义务教育数学课程标准 \ 6

一、课程性质 \ 6

二、课程理念 \ 6

三、课程目标 \ 8

四、课程内容 \ 10

五、学业质量 \ 10

六、课程实施 \ 11

### 第三节 小学数学教育改革历程 \ 11

一、新中国成立前的小学数学教育 \ 11

二、新中国成立后的小学数学教育 \ 12

智慧结晶 \ 14

讲台模拟 \ 15

思维擂台 \ 15

## 第二章 数学学习过程与认知 \ 17

数海启航 \ 17

目标罗盘 \ 17

数学脉络 \ 18

### 第一节 数学概念和命题的学习机制 \ 18

一、数学概念的含义 \ 18

二、数学概念的学习 \ 19

三、数学命题的学习 \ 21

### 第二节 数学问题的解决策略 \ 22

一、数学问题和数学问题解决的含义 \ 22

二、数学问题解决的学习心理过程 \ 23

三、影响数学问题解决的因素 \ 25

### 第三节 小学数学核心素养培养 \ 26

一、小学数学核心素养的内涵 \ 26

二、小学生数学学习的特点 \ 27

三、小学数学核心素养的构成要素 \ 28

四、小学生数学学习过程中情感态度的培养 \ 28

智慧结晶 \ 30

讲台模拟 \ 30

思维擂台 \ 31

## 第三章 小学数学教材分析与教学设计 \ 32

数海启航 \ 32

目标罗盘 \ 32

数学脉络 \ 33

### 第一节 小学数学教材编写的理念与实践 \ 33

一、体现核心素养培养要求 \ 33

二、教学设计的含义 \ 34

三、教学设计的理念 \ 35

四、教学设计方案的形成 \ 36

五、素材选取要贴近学生的现实、真实可信 \ 39

### 第二节 小学数学教学目标的制定与案例分析 \ 40

一、制定目标所使用的动词 \ 40

二、在教学目标中体现数学核心素养 \ 40

三、从小学数学核心素养视角看教学方法的选择 \ 43



### 第三节 小学数学教学设计 \ 45

- 一、教案的结构 \ 45
- 二、教案的一般格式 \ 47
- 三、不同课型教学设计案例 \ 55
- 智慧结晶 \ 60
- 讲台模拟 \ 60
- 思维擂台 \ 61

## 第四章 数与代数的教学 \ 62

- 数海启航 \ 62
- 目标罗盘 \ 62
- 数学脉络 \ 63

### 第一节 “数与运算”的课程目标 与内容 \ 63

- 一、“数与运算”的教育价值 \ 63
- 二、“数与运算”的总目标 \ 64
- 三、“数与运算”的主要内容 \ 65
- 四、“数与运算”的教学策略 \ 69

### 第二节 代数思维的发展与对策 \ 84

- 一、代数思维的现状 \ 84
- 二、代数思维的解决对策 \ 85

### 第三节 数与代数的教学设计案例 \ 88

- 一、数学概念教学 \ 88
- 二、教学规则教学 \ 91
- 智慧结晶 \ 94
- 讲台模拟 \ 94
- 思维擂台 \ 95

## 第五章 图形与几何的教学 \ 96

- 数海启航 \ 96
- 目标罗盘 \ 96
- 数学脉络 \ 97

### 第一节 图形认识的课程目标与内容 \ 97

- 一、“图形与几何”课程目标分析 \ 97
- 二、图形的认识和测量的主要内容 \ 101
- 三、图形的认识与测量的教学策略 \ 104
- 四、图形的认识与测量的教学步骤 \ 111

### 第二节 空间观念的发展规律 \ 114

- 一、空间观念的基本内涵 \ 114
- 二、小学生空间观念发展的特点 \ 115
- 三、培养小学生空间观念的基本策略 \ 117

### 第三节 图形与几何的教学设计案例 \ 119

- 一、图形的认识 \ 119
- 二、测量 \ 120
- 三、图形的运动 \ 122
- 四、图形与位置 \ 124
- 智慧结晶 \ 126
- 讲台模拟 \ 126
- 思维擂台 \ 127

## 第六章 统计与概率的教学 \ 128

- 数海启航 \ 128
- 目标罗盘 \ 128
- 数学脉络 \ 129

### 第一节 统计观念的培养路径 \ 129

- 一、对统计观念的认识 \ 129
- 二、数据分析观念是统计的核心思想 \ 130
- 三、小学生统计观念的方向 \ 131
- 四、小学生统计观念的基本要求 \ 131
- 五、小学生统计观念的培养 \ 132

### 第二节 概率教学的实施建议 \ 133

- 一、“统计与概率”的课程要求 \ 133
- 二、“统计与概率”的内容理解 \ 134
- 三、“统计与概率”的教学建议 \ 136
- 智慧结晶 \ 137
- 讲台模拟 \ 138
- 思维擂台 \ 138

## 第七章 教学实施与课堂艺术 \ 140

- 数海启航 \ 140
- 目标罗盘 \ 140
- 数学脉络 \ 141

### 第一节 小学数学课堂的教学 策略和方法 \ 141



一、小学数学课堂的教学策略 \ 141

二、小学数学课堂的教学方法 \ 143

## 第二节 课堂语言与教学生成调控 \ 144

一、小学数学课堂语言的内涵 \ 145

二、小学数学课堂语言的类型 \ 146

三、小学数学教学精心设计预设 \ 147

四、小学数学教学正确对待预设与生成 \ 148

智慧结晶 \ 151

讲台模拟 \ 151

思维擂台 \ 151

## 第八章 教学评价与专业发展 \ 153

数海启航 \ 153

目标罗盘 \ 153

数学脉络 \ 154

### 第一节 课堂教学评价体系 \ 154

一、小学数学课堂教学的评价标准 \ 154

二、小学数学课堂教学评价量表 \ 159

三、小学数学课堂教学评价的具体实施 \ 161

### 第二节 学生学业质量评价 \ 162

一、小学数学学业质量评价 \ 162

二、小学数学学业评价的体系 \ 164

三、小学数学学习评价的目的 \ 165

四、小学数学学习评价的类型 \ 166

五、小学数学学习评价的内容 \ 168

六、小学数学学习评价的方法 \ 169

### 第三节 教师反思与专业成长 \ 172

一、坚持做教学反思 \ 172

二、教师专业化成长 \ 173

智慧结晶 \ 174

讲台模拟 \ 174

思维擂台 \ 175

## 第九章 小学教师资格与综合实践 \ 176

数海启航 \ 176

目标罗盘 \ 176

数学脉络 \ 177

### 第一节 小学教师资格考试大纲 \ 177

一、考试大纲 \ 177

二、全国统考小学教师资格考试大纲 \ 178

三、中小学和幼儿园教师资格考试面试大纲（试行） \ 182

### 第二节 小学教师资格考试笔试备考 \ 184

一、备考指导 \ 184

二、考试注意事项及解题技巧 \ 186

### 第三节 小学教师资格考试面试备考 \ 195

一、面试的特点 \ 195

二、面试的基本流程 \ 196

三、面试技巧与注意事项 \ 196

四、试讲案例 \ 201

五、答辩技巧 \ 208

智慧结晶 \ 214

讲台模拟 \ 214

思维擂台 \ 215

## 参考文献 \ 216



# 第一章 数学课程 基础理论

教育不是灌输，而是点燃火焰。

——苏格拉底

## 数海启航

小学数学课程与教学的开展，离不开对数学学科本质与课程标准的深度把握。早在古代，我国数学教育便注重实用性，如《九章算术》的编写；近现代以来，从1904年《奏定学堂章程》确立近代小学数学教育，到新中国成立后多轮课程改革，数学教育不断适配时代需求。本章以党的二十大报告和《义务教育数学课程标准（2022年版）》为指引，先剖析数学学科的本质特征，厘清数学科学与小学数学学科的联系与区别，明确小学学段数学学科的性质、地位与任务；再解读义务教育课程标准的课程性质、理念、目标、内容等核心板块；最后梳理小学数学教育从新中国成立前到新课程改革时期的发展历程，为后续教学实践筑牢理论根基。

## 目标罗盘

### 知识目标

1. 掌握数学学科的本质、特征，明晰数学科学与小学数学学科的联系与区别。
2. 理解《义务教育数学课程标准（2022年版）》的课程性质、理念、目标等核心内容。
3. 了解小学数学教育从新中国成立前到新课程改革时期的发展历程。

### 能力目标

1. 能够结合实例分析数学学科的抽象性、逻辑性、应用性等特征。
2. 可依据课程标准，解读小学数学课程的育人目标与实施要求。
3. 具备梳理小学数学教育改革脉络，总结不同时期教育特点的能力。

### 素质目标

1. 形成对数学学科本质的深刻认知，培养从教育视角审视数学知识的素养。

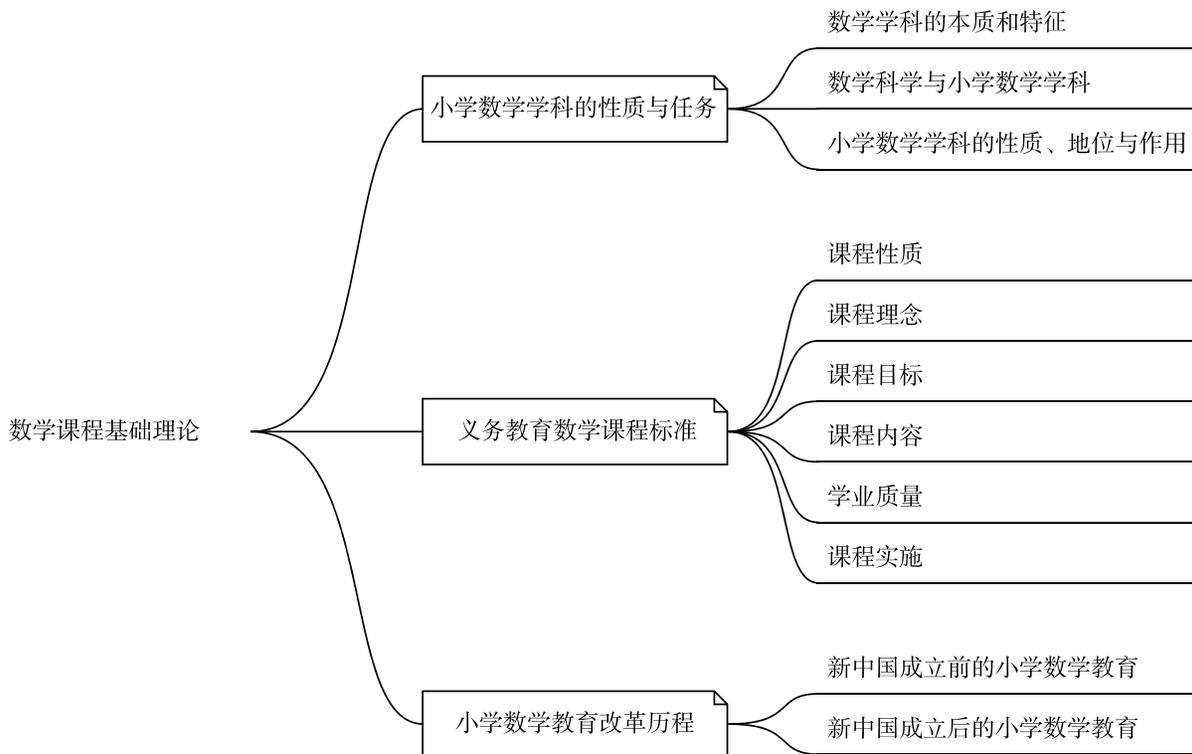


2. 树立以课程标准为导向的教学意识，提升对小学数学课程的整体把握能力。
3. 增强历史思维，善于从教育改革历程中汲取经验，优化教学认知。

### 思政目标

落实党的教育方针，以党的二十大精神为指引，坚持立德树人理念，传承数学学科中的科学精神与文化内涵，培养为人民满意教育事业贡献力量的意识。

## 数学脉络



## 第一节 小学数学学科的性质与任务

党的二十大报告指出，“我们要办好人民满意的教育，全面贯彻党的教育方针，落实立德树人根本任务，培养德智体美劳全面发展的社会主义建设者和接班人。”对小学数学教师而言，把握数学学科的本质是进行教学的基础。数学学科区别于其他学科，有着它独特的学科性质和教育任务。我们不禁要问，数学，是一门怎样的学科？数学科学与数学学科有着什么样的联系？小学学段的数学学科的主要任务又是什么呢？充分认识上述问题有利于我们理解小学数学课程的目标和任务。

### 一、数学学科的本质和特征

数学，是研究数量关系和空间形式的科学，是源于对现实世界的抽象，通过对数量和数量关系、图形和图形关系的抽象，得到数学的研究对象及其关系；基于抽象结构，通过对研究对象的符



号运算、形式推理、模型构建等，形成数学的结论和方法，帮助人们认识、理解和表达现实世界的本质、关系和规律。数学不仅是运算和推理的工具，还是表达和交流的语言。数学承载着人类思想和文化，是人类文明的重要组成部分。数学是自然科学的重要基础，在社会科学中也发挥着越来越重要的作用。数学的应用渗透到现代社会生活的各个方面，直接为社会创造价值，推动社会生产力的发展。随着大数据分析、人工智能的发展，数学研究与应用领域不断拓展。

数学的特点：其一，数学的对象是由人类发明或创造的；其二，数学的创造源于对现实世界和数学世界研究的需要；其三，数学性质具有客观存在的确定性；其四，数学是一个发展的动态体系。

数学的主要特征——高度的抽象性、严谨的逻辑性和广泛的应用性等。

### （一）高度的抽象性

数学的抽象性是指数学来源于实践，是现实世界的事物在数量关系和空间形式上的抽象，在表现形式和处理方法上都具有抽象的特征。从最简单的数学概念，到比较复杂的函数和图形，都具有抽象性的特征。例如，自然数就是现实中具体数量的抽象，“2”这个数可以代表2个苹果，2头牛，一个人的2条腿……一切数量上具有2的特征的事物都可以用“2”这个数来表示。因此，2作为抽象的符号，抛弃了事物的其他特性，只保留数量这一特征。几何中线和图形也同样具有抽象性。数学中的抽象又有不同的水平和不同的层次。代数中用字母代表数，字母相对于数字而言是一种较高的层次，可以表示一定范围内的任何数。数学的抽象过程是随着人们认识水平的提高而不断深化的。

### （二）严谨的逻辑性

数学的每个定理、定律都是经过严格的证明才得以成立的。数学的语言和思考过程都要求具有严谨性，合乎逻辑。数学的证明要从公理、定理等出发，经过严格的推导过程，得出合乎逻辑的结论。例如，平面几何的论证和推理就是这种严谨性的突出代表。小学数学教学中，由于学生的年龄特点，并不要求每一个结论都用严格的逻辑证明来得出，但在思考方式上应体现逻辑性。例如，小学数学中三角形的内角和，学生通过“量一量”和“算一算”猜测三角形的内角和是 $180^\circ$ ，在此基础上教师引导学生通过“剪一剪”“折一折”等方法验证猜想，让学生经历“观察—猜测—验证”的过程，推理归纳出三角形的内角和是 $180^\circ$ 。

### （三）广泛的应用性

由于数学的抽象特征，其应用的范围十分广泛。早在其产生之初，数学就成为解决我们生活和生产问题的主要工具，数学在各个领域发挥着它的重要作用。在科学技术飞速发展的今天，数学更是渗透到人们的生活、生产之中，运用到各个方面。例如，人们在购物后一般需要记账，以便年终统计查询。去银行办理储蓄业务，查收各住户水电费用等，这些都利用了数学知识。此外，社区和机关大院门口的推拉式自动伸缩门，运动场跑道直道与弯道的平滑连接，底部不能靠近的建筑物高度的计算，折扇的设计以及黄金分割等，则是平面几何中直线图形的性质及解直角三角形有关知识的应用。

同时，数学还在其他领域占有特殊地位。因为无论是自然科学、社会科学，还是思维科学，都可借用数学严密性和抽象性的特点来做更为精确的研究或描述。例如，英国物理学家詹姆斯·克拉克·麦克斯韦（James Clerk Maxwell, 1831—1879）用纯粹数学的方法推导出可能存在着电磁波并且这些电磁波应该以光速传播着。24年后，德国物理学家海因里希·鲁道夫·赫兹（Heinrich Rudolf Hertz, 1857—1894）在振荡放电试验中证实了电磁波的存在。随着计算机技术的发展，数学的应用



会更加广泛。

除此之外，数学还具有形式化、简单化和符号化等特征。随着数学学科的发展，数学的研究对象也在扩展，人们对数学本质的认识也在发展和变化。一种普遍的观点认为，数学是通过抽象方法揭示客观世界中所隐藏的各种规律的一门学科。

## 二、数学科学与小学数学学科

小学数学学科与数学科学既有密切联系又有明显区别。可以说，小学数学学科是数学科学的一部分，包括算术、几何初步、代数初步和统计初步等知识，以及与这些知识有关的技能和方法。它们源于数学科学，也遵循数学自身的科学性。比如数学本身的抽象性、形式化、符号化等特征在小学数学学科上也有不同程度的反映。但是这些内容又不同于数学科学中的内容，数学科学是以阐述数学的原理为目标的，而数学学科则是以培养人为目标的。故数学学科需要考虑的是如何使学生理解和掌握数学的相关内容，并通过这些内容的学习发展他们的思维水平，提高认知水平，进而培育学生的核心素养。

因此，作为学科的数学在内容的选择、组织和呈现方式上，都要考虑教育对象的年龄特点和认知水平。数学科学与数学学科的主要区别表现在以下几个方面。

第一，数学科学需要对数学理论与方法进行系统阐述，一般从基本的概念和原理出发，全面、完整地表述某一个数学领域的内容和方法。而数学学科则要考虑学生的心理特点和认知规律，以学生的需要为出发点，安排和呈现有关内容和方法。因此，数学学科不同于数学科学，它更注重利用学生在日常生活中所接触到的事物或实际问题以及模型、图形、图表等作为感性材料，引导学生通过观察、分析、比较、归纳和概括等方式去获取概念。

例如，在学习“平行线”的概念时，可以先让学生辨认一些熟悉的实例，像铁轨、门框的上下两条边、黑板的上下边缘等；然后分化出各例的属性，从中找出共同的本质属性。铁轨有下面的属性：是铁制的、可以看成是两条直线、在同一个平面内、两条边可以无限延长、两条边永不相交等。同样可分析出门框和黑板上下边的属性。通过比较可以发现，它们的共同属性是可以抽象地看成两条直线；两条直线在同一平面内；两条直线间距离处处相等；两条直线没有公共点等，最后抽象出本质属性，得到平行线的定义。

第二，数学科学对所有的定理、公式、法则等都要进行严格的论证和推导，以保证其逻辑性和严谨性。而数学学科则首先关注的是学生的接受能力，特别是小学数学学科，一般不做严格的论证，仅通过列举的方式和归纳的方法得出数学结论，让学生认识有关的数学内容。

例如，加法和乘法的运算定律，就是用列举实例的方法，通过归纳得出的。首先让学生观察实例，列出有关算式如下：

$$\begin{array}{lll} 2 \times 3 = 6 & 3 \times 2 = 6 & \text{所以 } 2 \times 3 = 3 \times 2 \\ 7 \times 5 = 35 & 5 \times 7 = 35 & \text{所以 } 7 \times 5 = 5 \times 7 \\ 25 \times 8 = 200 & 8 \times 25 = 200 & \text{所以 } 25 \times 8 = 8 \times 25 \end{array}$$

进而可以得出这样的结论，两个数相乘，交换因数的位置，结果不变，这就是乘法的交换律，用字母可以写成：

$$a \times b = a \times a$$

上述对数学内容的处理和呈现形式，显然不满足数学科学上严格的证明要求，但对于数学学科而言，它必须考虑到小学生的年龄特点和认知规律，故这种处理是恰当的。



## 课堂讨论

结合生活中的具体场景，如超市商品分类计价、小区停车位规划等，分析数学“高度的抽象性”“严谨的逻辑性”“广泛的应用性”三大特征分别体现在哪些环节？以“三角形稳定性”为例，讨论如何向小学生解释这一抽象特征，同时兼顾数学的严谨性与生活实用性？

第三，数学科学可以完全按照数学自身的理论体系和逻辑顺序安排，尽量使内容完整化、系统化和科学化。而数学学科在不影响内容的科学性的前提下，要充分考虑学生的认知规律，一些内容的呈现顺序和编排方式可以做适当的调整。比如小数作为数学概念系统的一部分，从数学科学的逻辑来看，应该先学习分数，再学习小数。而从学生的认知规律来看，小数和整数联系比较密切，在学习整数之后学习小数，再学习分数，这种处理方式会更加有利于学生对数学概念的理解。

## 三、小学数学学科的性质、地位与作用

### （一）课程的性质

小学数学课程与教学论是高等师范院校小学教育专业的一门专业必修课程，是专门研究小学数学教学基本理论及其规律的一门实践性很强的课程。它以一般教学论和教育学的基本理论为基础，从小学数学教学实际出发，分析小学数学教学过程的特点，总结长期以来小学数学教学的历史经验，揭示小学数学教学过程的规律，研究小学数学教学过程中的诸要素（教学方法、教学组织形式、教学的物质条件等）及其相互间的关系，帮助教师端正教学思想、形成教学技能，并对小学数学教学效果开展科学的评价。相对于数学学科的纯数学问题而言，它更多地关注小学数学教育教学中出现的问题，并将这些问题与数学专业知识和教育学、心理学、科学方法论等学科知识有机结合，揭示小学数学教学过程的本质特性和有关规律，进而总结出适用于小学数学教育实践的规律和方法。

### （二）课程的地位

小学数学课程与教学论作为小学教育专业的一门重要课程，对学生树立正确的数学教育理念、提高小学数学教育教学技能、搞好教育实习工作，以及将来从事小学数学教学与研究起到重要作用，对进一步推进数学新课程改革、培养合格的小学数学教师有着重要的现实意义。

### （三）课程的作用

本课程教学，可以帮助学生获得系统的小学数学课程与教学论知识和小学数学教学基本技能与教学方法，提高学生对小学数学教育的整体认识水平，帮助学生运用所学的理论和方法解决实际问题。在培养学生将来从事小学数学教学与研究的能力、提高学生从事小学数学教师职业所必备的综合素质与专业化水平等方面具有其他课程所不能替代的重要作用。

## 德育长廊

### 从祖冲之圆周率探索看数学精神传承

南北朝数学家祖冲之以超越时代的成就，书写古代科技传奇。在刘徽割圆术基础上，他通过繁复演算将圆周率精确至 3.141 592 6 与 3.141 592 7 之间，这一精度领先世界近千年。他还提出分数近似值  $355/113$ ，成为分母小于 16 604 的最佳近似值，展现极致的数学洞察力。数学



天赋更助力历法革新，所著《大明历》采用391年置144闰月的精密章法，引入岁差计算，回归年长度测算精度在当时世界遥遥领先。虽因时人不解历数，历法两度搁浅，最终在其子推动下于公元510年颁行。这位“兼擅理论与实践”的学者，用圆周率的刻度丈量出古人追求真理的深度，成为中华民族科学精神的象征。

作为未来的小学数学教师，我们应从祖冲之的故事中汲取精神养分，在教学中不仅要向学生传授数学知识，更要渗透这种严谨求实、勇于探索的科学精神，让学生理解数学并非孤立的数字与公式，而是与生活、文化、科技紧密相连的学科。同时，要引导学生树立对数学的敬畏之心与探索热情，传承祖冲之身上体现的民族智慧与担当，为今后用数学知识服务社会、贡献力量奠定思想基础。

## 第二节 义务教育数学课程标准

《义务教育数学课程标准（2022年版）》（以下简称《标准》）包括六个部分：课程性质、课程理念、课程目标、课程内容、学业质量、课程实施。

### 一、课程性质

《标准》中的课程性质分为两段。第一段先阐述数学的本质和作用，即“数学是研究数量关系和空间形式的科学”，紧接着强调了数学的抽象性，即“数学源于对现实世界的抽象，通过对数量和数量关系、图形和图形关系的抽象，得到数学的研究对象及其关系”。这样的表述，不仅强调了数学的研究对象是抽象的，还强调了数学的研究对象是通过对现实世界的数量和数量关系、图形和图形关系的抽象得到的。课程性质进一步阐述为“基于抽象结构，通过对研究对象的符号运算、形式推理、模型构建等，形成数学的结论和方法，帮助人们认识、理解和表达现实世界的本质、关系和规律”。这样的描述既显示了数学的作用，又彰显了数学的工具性。基于这样的理解，顺理成章地得到关于数学更为一般的表述：“数学不仅是运算和推理的工具，还是表达和交流的语言。数学承载着思想和文化，是人类文明的重要组成部分。”第一段的结尾处分析了现代数学所面临的现状：“数学是自然科学的重要基础，在社会科学中发挥着越来越重要的作用，数学的应用渗透到现代社会的各个方面，直接为社会创造价值，推动社会生产力的发展。随着大数据分析、人工智能的发展，数学研究与应用领域不断拓展。”

第二段阐述数学的教育功能与义务教育阶段数学课程的要求。数学独特的教育功能指的是：“数学在形成人的理性思维科学精神和促进个人智力发展中发挥着不可替代的作用。数学素养是现代社会的每一个公民应当具备的基本素养。”这样的表述与第一段对于数学的述说一脉相承，数学为人们提供了认识、理解和表达现实世界的思想方法，这样的思想方法是理性的、科学的，因此，良好的数学教育，不仅要关注学生数学知识技能的掌握，还要关注学生数学思想方法的形成与发展，在这样的过程中受教育者的智力也会得到开发。可见，数学教育的功能及数学教育的基本性质和要求就是：数学教育承载着落实立德树人根本任务、实施素质教育的功能。

### 二、课程理念

课程理念是数学课程设计遵循的基本原则，阐述了数学教育对于促进学生发展的基本价值追



求,以及制定课程目标、设计课程内容、实施教学活动、探索评价方式等方面的基本思路。

《标准》明确提出:“义务教育数学课程以习近平新时代中国特色社会主义思想为指导,落实立德树人根本任务,致力于实现义务教育阶段的培养目标,使得人人都能获得良好的数学教育,不同的人 在数学上得到不同的发展,逐步形成适应终身发展需要的核心素养。”这样的课程理念体现义务教育阶段的数学课程性质,体现新时代人才培养的要求,遵循义务教育课程方案提出的课程设计的总体要求,研究和吸收国内外近年来数学课程研究的重要成果,直面社会和科技发展对数学教育提出的新挑战与新问题。

### (一) 确立以核心素养为导向的课程目标

《标准》遵循“坚持全面发展,育人为本;面向全体学生,因材施教;聚焦核心素养,面向未来”等基本原则,确立体现学科育人价值的课程目标,使学生通过数学学习获得适应未来发展需要的知识、见识和素养。核心素养是在数学学习过程中逐渐形成和发展的,在不同领域和不同阶段有不同的表现,《标准》在总目标和阶段目标中都有具体的描述。

### (二) 设计体现结构化特征的课程内容

《标准》中明确要突出课程内容结构化,提倡以核心素养为导向的学科内容结构化重整,并加强跨学科主题学习,进一步体现数学课程与社会生活和学生经验的联系,把学科知识整合与跨学科实践体现在学科结构的重组、学习内容 的选择与组织中。

课程内容选择以发展学生核心素养为导向,充分考虑学生的发展需求、数学学科的特点和社会科技的发展。一是在保持相对稳定的学科体系的同时,关注数学学科发展前沿;二是课程内容要符合学生发展需求、数学学科特点和社会科技的发展,对未来的公民提出新要求,课程内容的选择应当关注学生核心素养的发展。

课程内容的组织要有助于学生的理解与掌握,促进学生核心素养的形成。《标准》强调对内容进行结构化整合,体现在各领域下属主题的重整,将具有一致学科本质特征的内容整合为一个主题,有助于学生整体理解和把握课程内容;注重学习内容之间的关联。通过内容的整体分析和教学设计,实现对核心概念的掌握,促进学生对学习内容的理解和迁移,发展学生核心素养。处理好过程与结果、直观与抽象、直接经验与间接经验的关系,让学生经历概念的形成过程,这是帮助学生形成和发展核心素养的必由之路。

课程内容的呈现方式直接影响学生对学习内容的感知与理解。课程与教学内容应采用适合学生年龄特征和促进学生学习的呈现方式。《标准》特别强调“跨学科主题学习”。当人们面对复杂的真实问题或需要解决实际问题时,并非只用单一的学科知识与方法就可以完成,而是需要从整体上认识问题,选择恰当的知识与方法加以解决。因此,在课程与教学实践中需要为学生提供跨学科学习的现实情境,引导学生进行跨学科主题学习。



### 课堂讨论

课标强调“加强跨学科主题学习”,请以“校园垃圾分类”为主题,讨论如何整合“统计与概率”,如数据分类、统计垃圾数量,与“道德与法治”,如环保意识、垃圾降解知识等学科内容,设计1个适合小学中年级的跨学科学习活动,并说明活动设计如何体现数学与现实生活的联系?

### (三) 实施促进学生发展的教学活动

教学活动的设计与实施是使课程从文本向实践转化的重要环节,是实现课程目标的基本途径。



《标准》明确了核心素养导向的教学活动设计与实施的基本要求，提出在教学实践中应“准确把握课程要培养的学生核心素养。明确教学内容和教学活动的素养要求，培养学生正确价值观、必备品格和关键能力。设定教学目标，改革教学过程和教学方法，把立德树人根本任务落实到具体教育教学活动中”。具体教学活动的设计与实施要“注重‘做中学’，引导学生参与学科探究活动，经历发现问题、解决问题、建构知识、运用知识的过程，体会学科思想方法。加强知识学习与学生经验、现实生活、社会实践之间的联系，注重真实情境的创设，增强学生认识真实世界、解决真实问题能力”。

#### （四）探索激励学习和改进教学的评价

评价既是检验课程实施效果的重要一环，又是考查学习目标达成及学生成长状况的重要手段。《标准》要求“强化素养导向，注重对正确价值观、必备品格和关键能力的考查，开展综合素质评价。倡导以评价促进学习的理念，注重提高学生自我评价、自我反思的能力，引导学生合理运用评价结果改进学习”。强化素养导向的评价意味着要以核心素养为导向构建学生评价指标和评价方法。

#### （五）促进信息技术与数学课程融合

《标准》从利用信息技术丰富学习资源、变革教学形式、创设信息化学习环境等方面阐述了信息技术与数学课程教学的融合。通过创设信息化学习环境，不仅为学生理解和掌握数学知识、方法提供支持，而且为学生提供了探索的空间、思考的机会，并在这一过程中提升学生的信息素养。

### 三、课程目标

课程目标的确定，应立足学生核心素养发展，集中体现数学课程的育人价值。

#### （一）核心素养的内涵

《标准》提出的核心素养主要包括“三会”：会用数学的眼光观察现实世界，会用数学的思维思考现实世界，会用数学的语言表达现实世界。

##### 1. 会用数学的眼光观察现实世界

第一，“数学眼光”是观察现实世界的一种特殊方式，其目的是透过事物的表面现象和各种物理属性，抽象出数量关系与空间形式。第二，问题是数学的心脏。“数学眼光”的一个重要含义是在各种现实和数学的问题情境中，“看”出其中的数学规律，发现和提出有意义的数学问题。第三，“数学眼光”在形成和理解数学基本概念、关系和结构方面具有重要意义，每一个数学概念、关系和结构的发生发展都涉及三种过程：历史过程、逻辑过程、心理过程。第四，除了数学学习和数学内部的问题解决外，“数学眼光”还表现在观察与探索数学外部的世界上，从数学的角度去理解自然与社会人文现象背后的数学原理，数学的审美价值，“真”与“美”是数学这门学科自始至终追求的目标。

##### 2. 会用数学的思维思考现实世界

从古希腊开始，数学就被称为“思维的体操”。《标准》对“数学思维”的内涵给出了具体的描述，表达了五个方面的含义：第一，数学思维的目的是理解与解释现实世界中的数量关系与空间形式，是一种抽象的、一般化的思维方式；第二，数学思维的基本元素是具有确定意义的数学概念；第三，在数学思维的运作过程中使用的是一些具有普适性的数学方法；第四，数学思维的基本形式是逻辑推理和数学运算；第五，为了确保数学思维的简约、严谨和具体化，数学思维采用了一套人工符号系统。



### 3. 会用数学的语言表达现实世界

语言是思维的载体，数学语言承载着数学的基本思想。《标准》对“数学语言”的内涵阐述包括两层含义：一是在数学内部能够用数学语言清晰、准确、严谨地表达数学的研究对象（概念、关系和结构）及思想方法，利用数学语言进行思考、交流和解决问题，其中所运用的是一套形式化的人工符号系统；二是用数学来描述、解释和解决现实世界中的实际问题，其主要表达方式是数学模型与数据。

核心素养具有高度的整体性、一致性和发展性。核心素养在不同阶段具有不同表现，小学阶段侧重对经验的感悟。核心素养主要表现为数感、量感、符号意识、运算能力、几何直观、空间观念、推理意识、数据意识、模型意识、应用意识和创新意识。

#### （二）总目标

义务教育阶段数学课程总目标是对学生数学学习的总体要求。总目标明确了以“三会”为核心素养，同时分别表述了“四基”“四能”“形成正确的情感态度和价值观”三个方面的要求。这既是学生核心素养形成的基础和条件，也蕴含了核心素养的要素。

“四基”：“获得适应未来生活和进一步发展所必需的数学基础知识、基本技能、基本思想、基本活动经验。”“四基”是对义务教育阶段学生学习数学的整体、基本要求。

“四能”：“体会数学知识之间、数学与其他学科之间、数学与生活之间的联系，在探索真实情境所蕴含的关系中，发现问题和提出问题，运用数学和其他学科的知识与方法分析问题和解决问题。”问题解决能力的培养是体现数学学科特征的重要目标，具体表现为学生在具体情境中发现、提出、分析和解决问题的能力。

“形成正确的情感态度和价值观”：“对数学具有好奇心和求知欲，了解数学的价值，欣赏数学的美，提高学习数学的兴趣，建立学好数学的信心，养成良好的学习习惯，形成质疑问难、自我反思和勇于探索的科学精神。”

#### （三）学段目标

学段目标是根据不同学段学生学习的水平，将总目标进行分解而成，同时将核心素养的具体表现体现在学段目标中。

##### 1. 义务教育阶段的学段划分

《标准》将义务教育阶段小学六年制划分为三个学段：1、2 年级为第一学段，3、4 年级为第二学段，5、6 年级为第三学段。

##### 2. 学段目标是总目标的阶段性水平描述

总目标是对义务教育阶段学生发展的总体要求，以核心素养为导向。学段目标是总目标的分解，每个学段目标分段描述，分别对应总目标的三个方面，同时将核心素养的具体表现融入其中。不同学段目标在知识技能、能力表现和情感态度等方面的要求，尽可能在水平上有所区别，以适应不同学段学生的年龄特征。

##### 3. 学段目标体现各学段内容主题的要求

义务教育阶段的课程内容包括“数与代数”“图形与几何”“统计与概率”“综合与实践”四个领域。这四个领域的内容分布在三个学段，每一个学段都设计了不同的内容要求和学业要求。学段目标体现了不同学段中这些内容要求的要点。



## 四、课程内容

义务教育阶段数学课程内容由“数与代数”“图形与几何”“统计与概率”“综合与实践”四个领域组成。

“数与代数”领域包括“数与运算”和“数量关系”两个主题。“数与运算”内容包括“数的认识”和“数的运算”，具体包括整数、小数和分数的认识及其四则运算。“数与运算”是将数量抽象为数，并以数为对象进行计算。“数量关系”主要是用符号（包括数）或含有符号的式子来表达数量之间的关系或规律。数量之间存在各种不同类型的关系，如大小关系、顺序关系、相等关系及包含关系等。小学阶段的数量关系主要涉及数量之间的相等关系，如加法模型、乘法模型、四则运算意义、运算律及正比例关系等都是表达数量之间的相等关系。小学生在具体情境中经历运用数量关系解决问题的过程，感悟加法模型和乘法模型的意义，可以提高发现和提出问题、分析和解决问题的能力，进而形成模型意识和初步的应用意识。

“图形与几何”领域包括“图形的认识与测量”和“图形的位置与运动”两个主题。“图形的认识与测量”包括立体图形和平面图形的认识、线段长度的测量，以及图形的周长、面积和体积的计算。“图形的位置与运动”包括确定点的位置，以及认识图形的平移、旋转、轴对称。学生可结合实际情境判断物体的位置，探索用数对表示平面上点的位置，增强空间观念和应用意识。学生经历对现实生活中图形运动的抽象过程，认识平移、旋转、轴对称的特征，体会运动前后图形的变与不变，有助于其感受数学的美，逐步形成空间观念和几何直观观念。

“统计与概率”领域包括“数据分类”“数据的收集、整理与表达”“随机现象发生的可能性”三个主题。“数据分类”主要包括按照给定的标准进行分类，或是由学生自己制定标准进行分类，学生可以用图画、表格等记录分类结果，感受分类结果的多样性。“数据的收集、整理与表达”包括数据的收集，用统计图表、平均数、百分数等表达数据，且从数据中提取信息并进行简单推断。“随机现象发生的可能性”包括两个方面：一方面是通过实例帮助学生认识生活中有些事情的发生是不确定的，在不确定事件中可能发生不同结果，它们的可能性是有大小的；另一方面是引导学生初步学会根据所有可能发生的情况，正确判断某种结果发生可能性的大小，侧重引导学生结合具体实例认识可能性及其大小，从整体上感受有关简单随机事件发生的可能性，作出定性描述。

“综合与实践”领域内容明确了以主题式学习和项目式学习为主要学习方式。主题活动分为两类：第一类，融入数学知识学习的主题活动，主要涉及常见的量、方向与位置、负数等知识的学习；第二类，运用数学知识及其他学科知识的主题活动。项目式学习的设计以解决现实问题为重点，综合应用数学和其他学科知识解决问题，体会数学知识的价值以及数学与其他学科的关联。《标准》列举了“数学游戏分享”“欢乐购物街”“时间在哪里”等11个主题活动，列举了“营养午餐”“水是生命之源”2个项目学习活动。

## 五、学业质量

学业质量是指“学生在完成课程阶段性学习后的学业成就表现，反映核心素养要求”。学业质量标准不仅仅刻画了学生完成阶段性数学知识的学习水平，还包括核心素养方面应当达到的水平及表现。因此，学业质量标准一可以指导教师开展教学活动，二可以指导学生开展自主学习与评价，三可以指导教材编写，四可以指导学业水平考试命题及评价。



## 六、课程实施

课程实施包括教学建议、评价建议、教材编写建议、课程资源开发与利用、教学研究与教师培训五个方面。

教学建议中，一是要制定指向核心素养的教学目标。教学目标要体现核心素养的主要表现，处理好核心素养与“四基”“四能”的关系，教学目标的设定要体现整体性和阶段性。二是要整体把握教学内容。注重教学内容的结构化，注重教学内容与核心素养的关联。三是要选择能引发学生思考的教学方式。丰富教学方式，重视单元整体教学设计，强化情境设计与问题提出。四是要进一步加强综合与实践。五是要注重信息技术与数学教学的融合。

评价建议中，发挥评价的育人导向作用，坚持以评促学、以评促教。在教学评价中，评价方式丰富、评价维度多元、评价主体多样。评价结果的呈现应更多地关注学生的进步，关注学生已有的学业水平与提升空间。其中，学业水平考试要科学制定评分标准。评分标准应具有科学性、可操作性。对开放性、综合性较强的试题，合理设计多层次任务的评分标准。

教材编写建议中，一是要体现核心素养培养要求；二是要有利于引发学生思考；三是素材选取要贴近学生的现实，真实可信；四是要注重教材创新。

课程资源开发与利用中，坚持育人为本，将促进学生身心健康发展作为首要任务，从促进学生核心素养形成和发展的内在规律出发，为教与学提供有效支撑。一是资源开发要丰富多样，二是资源开发要注重精品化，三是注重保护知识产权。

教学研究与教师培训中，教学研究应注重区域教研和校本教研协同，整合各类资源，创新教研机制，高水平开展研究、指导和服务工作。教师培训应面向全体教师，坚持“先培训后实施”。应充分发挥教研部门的作用，统筹课程专家、学科教育专家、教研员和一线骨干教师的力量，提升培训质量。

## 第三节 小学数学教育改革历程

### 一、新中国成立前的小学数学教育

我国的教育自古便有注重知识实用性的特点，从流传至今的《九章算术》中就可可见一斑。宋、元时期，我国的教育重视程序化算法的数学模式。清朝中晚期，我国数学教育发展的阶段性特征鲜明。1860年以前，受康熙皇帝重视数学学习的影响，数学教育继续维持，在一些书院中得以传播。1860年以后，在经受两次鸦片战争失败之痛后，洋务派开始大力宣扬数学教育，开办了一批教授数学课程的教学机构。1862年，清政府创办了第一所新式学堂京师同文馆，1866年又创立了天文算学馆。1904年，清政府颁布了《奏定学堂章程》，又称“癸卯学制”。这是中国近代第一个由中央政府以法律的形式在全国范围推行的学校制度，也是我国实施近代小学数学教育的标志。

《奏定学堂章程》包括《奏定初等小学堂章程》《奏定高等小学堂章程》《奏定中学堂章程》《奏定高等学堂章程》《奏定大学堂章程》《奏定蒙养院章程及家庭教育法章程》《奏定初级师范学



堂章程》等。《奏定初等小学堂章程》规定的算术课程目标为“其要义在使知日用之计算，与以自谋生计必须之知识，兼使精细其心思。当先就十以内之数示以加减乘除之方，使之纯熟无误，然后渐加其数至万位而止，兼及小数；并宜授以珠算，以便将来寻常实业之用”。《奏定高等小学堂章程》规定的算术课程目标为“其要义在使习四民皆所必须之算法，为将来自谋生计之基本。教授之时，宜稍加以复杂之算术，兼使习熟运算之法”。“四民”指“士、农、工、商”。这里的课程目标，在基础知识的教学上强调“日用”和“自谋生计”所需，在计算能力的培养上突出了当时较为实用的珠算，并提出了在数学教育中培养思维能力的要求，即“精细其心思”，但是对“几何初步知识”的课程要求未作具体说明。

1912年1月1日，中华民国临时政府成立。1912年9月2日，中华民国教育部公布了教育宗旨，其内容为“注重道德教育，以实利教育、军国民教育辅之，更以美感教育完成其道德”。教育宗旨的变革决定了民国初年学制的改革，1912年9月3日，教育部公布了《学校系统令》，次年作进一步修订，形成了我国第一部公布并施行的学制“壬子癸丑学制”，也称“1912—1913年学制”。

1915年以后，教育界改革学制的呼声渐起，20世纪20年代初，实用主义教育思潮在中国的传播与影响已达到了高潮，美国的教育模式已基本被中国教育界所接受。教育部于1922年11月1日颁布实施《学校系统改革案》，这就是1922年“新学制”，或称为“壬戌学制”。该学制从美国借鉴了中小学“六三三学制”，去除了“壬子癸丑学制”的双轨制做法，体现了单轨制的民主性，基本适合我国实际情况，并一直沿用至今。《学校系统改革案》用七条教育标准替代1912年的教育宗旨，即：（1）适应社会进化之需要；（2）发挥平民教育精神；（3）谋个性之发展；（4）注意国民经济力；（5）注意生活教育；（6）使教育易于普及；（7）多留各地方伸缩余地。

## 二、新中国成立后的小学数学教育

### （一）新中国成立初期

1950年，在主要吸取解放区和民国时期数学教育经验的基础上，政府颁布了《小学算术课程暂行标准（草案）》，这是新中国成立以来第一个关于数学教学的指导性文件。1952—1957年主要学习苏联经验，1952年颁布了五年制小学的算术教学大纲和珠算教学大纲，1956年颁布了《小学算术教学大纲（修订草案）》。

这一阶段重视计算能力的培养和发展空间观念。教学内容主要有：整数四则运算，复名数四则运算，直观几何知识，分数、小数、百分率等的运算和应用。这一时期主要以传授知识为主，教学以教师为中心，教师按“五环节”模式进行教学，即“组织教学、导入新课、讲授新课、巩固练习、布置作业”。

1963年，人民教育出版社编制了《全日制小学算术教学大纲（草案）》，明确规定了小学数学教育的目的：使学生牢固掌握算术和珠算的基础知识；培养学生正确地、迅速地进行计算的能力，能正确地解答应用题的能力；具有初步的逻辑推理能力和空间观念。同时，该大纲还科学合理地规划了教学内容：小学学习算术的基础内容；整数的学习分为四个环节，即二十以内、百以内、万以内、亿以内。

该大纲最突出的特色是，提出培养学生的“双基”和三大能力，即在传授基础知识和基本技能的同时，培养学生正确而且迅速的计算能力、逻辑推理能力和空间想象能力。大纲还要求教材的编



写应当遵循数形结合原则和集中与分散相结合的原则。这一时期的数学教学方法比较灵活，教学秩序明显好转，教学质量明显提高。

## （二）面向现代化时期

1978年以来，我国教育开始了“面向世界、面向未来和面向现代化”的探索与实践，即我们放眼世界，看看发达国家和地区的数学教育是什么样的，反思和改进我们的数学教育。1978年，教育部制定了《全日制十年制学校小学数学教学大纲（试行草案）》，提出了“精简、增加、渗透”的六字方针，即精选传统算术内容，适当增加代数与几何的部分内容，适当渗透一些现代数学思想。

该大纲规定小学数学的教学目的是：理解和掌握数量关系和空间形式的基础知识；正确迅速地进行整数、分数、小数的四则运算，初步了解现代数学的最简单思想，具有初步的逻辑思维能力和空间观念，并能运用所学知识解决简单问题；结合教学内容对学生进行思想政治教育。

由于当时小学的学制是五年制的，教材也做了相应调整，尽量反映现代科学文化的现代水平，并符合中国的实际情况。比如，小学增加了代数的初步知识，尤其将简易方程  $ax \pm b = c$  引入小学数学。也就是在这个时候，小学教材由“小学算术”改为“小学数学”。

## （三）九年义务教育时期

1986年4月12日，第六届全国人民代表大会第四次会议通过了《中华人民共和国义务教育法》，提出“国家实行九年义务教育制度”。同年12月颁布了《全日制小学数学教学大纲》，这是新中国成立后颁发的第一个没有“草案”两字的正式的小学教学大纲。该大纲规定的小学数学课程目标是：使学生理解和掌握数量关系和几何图形的最基础的知识，能够正确地、迅速地进行整数、小数和分数的四则计算，具有初步的逻辑思维能力和空间观念，并能够运用所学的知识解决日常生活和生产中的简单的实际问题。同时，结合教学内容对学生进行思想品德教育。该大纲是在1978年的《全日制十年制学校小学数学教学大纲（试行草案）》的基础上修订而成的，其在指导思想、发展智力、培养能力、结合教学内容进行思想品德教育、减轻学生过重负担、改革教学方法等方面都更加明确、具体，便于执行。其中，知识、能力和思想教育三方面的教学目标与1978年的《全日制十年制学校小学数学（试行草案）》基本相同，但表述更为确切，更加符合小学数学的特点和学生实际。

为了便于《中华人民共和国义务教育法》的实施，我国于1988年颁布了《九年制义务教育全日制小学数学教学大纲（初审稿）》，其教学目标有以下三个。（1）使学生理解、掌握数量关系和几何图形的最基础的知识。（2）使学生具有进行整数、小数、分数四则计算的能力，培养初步的逻辑思维能力和空间观念，能够运用所学的知识解决简单的实际问题。（3）使学生受到思想品德教育。经过4年的实践，1992年颁布了《九年制义务教育全日制小学数学教学大纲（试用）》，与初审稿相比，教学内容作了一些改变，而教学目标并没有变化。

为了迎接新世纪的曙光，谋划教育事业发展蓝图，2000年我国颁布了《九年义务教育全日制小学数学教学大纲（试用修订版）》。与1992年的大纲相比，2000年颁布的大纲具有两大历史性的进步。（1）首次提到了“探索”，这使得在小学数学教学中涌现了探索性学习、自主性学习、研究性学习等学习方式，促进了教师教学理念的转变与发展。（2）首次将“学习数学的兴趣，树立学好数学的信心”写入大纲，促使教师重视学生的学习兴趣和信心。



#### （四）新课程改革时期

在世界各国大力改革教育的大背景下，我国于2001年6月颁布了《基础教育课程改革纲要（试行）》。在该纲要的指引下，2001年7月，我国颁布了《全日制义务教育数学课程标准（实验稿）》。《全日制义务教育数学课程标准（实验稿）》将九年义务教育分为三个学段，第一、二学段是小学阶段，第三学段是初中阶段，并将目标分为“总体目标”与“学段目标”两部分。“总体目标”中有知识与技能、数学思考、解决问题、情感与态度四个方面。《全日制义务教育数学课程标准（实验稿）》提出了具体的学段目标，对每个知识点如何落实总体目标的四个方面作了比较详细的说明。2001年9月，《全日制义务教育数学课程标准（实验稿）》陆续在实验区试行。这一时期的数学教育改革面向全体学生，与之前的改革相比，有观念新、内容变化大、范围广、规模大、困难多、难度大六个特点。

2010年，中共中央、国务院印发了《国家中长期教育改革和发展规划纲要（2010—2020年）》，其中指出党和国家的教育目标为：“坚持教育为社会主义现代化建设服务，为人民服务，与生产劳动和社会实践相结合，培养德智体美劳全面发展的社会主义建设者和接班人。”在《国家中长期教育改革和发展规划纲要（2010—2020）》的指引下，教育部于2011年末对《全日制义务教育数学课程标准（实验稿）》进行了修订。2011年12月正式颁布了《义务教育数学课程标准（2011年版）》。该标准的理念和教学内容有所调整，其中指出了义务教育阶段的数学课程要面向全体学生，适应学生个性发展的需要，使得人人能获得良好的数学教育，不同的人能在数学上得到不同的发展；在原来培养学生分析和解决问题能力的基础上，增加发现与提出数学问题的能力；将“双基”拓展为“四基”，即在原来传授基础知识和基本技能的基础上，增加了传授学生数学的基本活动经验和基本思想方法。它不但将学习领域分为数与代数、图形与几何、统计与概率、综合和实践，而且根据义务教育阶段的课程性质、基本理念、设置思路、学生的身心特点，将义务教育阶段分为一到三年级、四到六年级、七到九年级三个学段。

2022年4月21日，教育部正式颁布《义务教育数学课程标准（2022年版）》。与《义务教育数学课程标准（2011年版）》相比较，《标准》的课程内容结构、具体内容、课程理念、目标、内容等方面都有明显变化，落实立德树人的根本任务，进一步深化课程改革，提高育人的质量。其主要变化有：强化了课程育人的导向，优化了课程内容的结构，研制了学业质量的标准，增强了指导性，加强了各学科的衔接。



#### 智慧结晶

本章首先剖析数学学科的本质与特征，明确数学是研究数量关系和空间形式的科学，对比数学科学与小学数学学科的差异，指出小学数学更注重结合生活实例引导学生抽象概念、弱化严格论证。其次，解读《义务教育数学课程标准（2022年版）》的核心内容，包括课程性质、理念、目标、内容、学业质量与课程实施，强调核心素养导向与结构化课程内容设计。最后，梳理小学数学教育改革历程，从晚清的《奏定学堂章程》，到新中国成立后不同时期的学制调整与课程改革，直至2022年版课标对核心素养的强化。通过本章学习，读者可建立对小学数学课程的理论认知，把握课程定位与改革方向，为教学实践提供理论支撑。



## 讲台模拟

### 【实训名称】

《义务教育数学课程标准（2022年版）》“数与代数”领域解读与教学目标转化实训

### 【实训目的】

- (1) 帮助学习者深入理解课标中“数与代数”领域的课程内容与核心素养要求。
- (2) 提升将课标要求转化为具体、可测的小学数学课堂教学目标的能力。

### 【实训准备】

(1) 材料：《义务教育数学课程标准（2022年版）》（节选“数与代数”领域内容）、人教版小学数学三年级“两位数乘一位数”教材片段。

(2) 工具：实训任务单（含课标解读要点、教学目标转化模板）。

### 【实训步骤】

(1) 课标解读（30分钟）：学习者分组研读“数与代数”领域中“数与运算”主题的学段要求，梳理“两位数乘一位数”对应的核心素养（如运算能力、数感等）及内容要求，记录关键信息。

(2) 目标转化（40分钟）：结合教材片段，参考任务单模板，将课标要求转化为“两位数乘一位数”的三维教学目标（知识与技能、过程与方法、情感态度与价值观），明确核心素养的具体体现。

(3) 交流互评（20分钟）：各组展示教学目标，其他组依据课标要求点评目标的准确性、可操作性，教师总结优化方法。

## 思维擂台

### 一、填空题

1. 《义务教育数学课程标准（2022年版）》提出的数学核心素养主要包括“三会”，即会用数学的眼光观察现实世界、会用数学的思维思考现实世界、会用数学的\_\_\_\_\_表达现实世界。

2. 1904年，清政府颁布的《奏定学堂章程》（又称“癸卯学制”），是我国实施\_\_\_\_\_数学教育的标志。

3. 义务教育阶段小学阶段六年制划分为三个学段，其中1、2年级为第\_\_\_\_\_学段，5、6年级为第\_\_\_\_\_学段。

### 二、简答题

1. 简述《义务教育数学课程标准（2022年版）》中“数与代数”领域的主要内容。

---



---



---



---



2. 新中国成立后“面向现代化时期”（1978年以来），小学数学教育在课程内容上有哪些重要调整？

---

---

---

---

3. 数学核心素养在小学阶段的主要表现有哪些？

---

---

---

---

## 第二章 数学学习 过程与认知

师者，所以传道受业解惑也。

——韩愈《师说》

### 数海启航

小学生学习数学并非简单接受知识，而是基于已有经验主动建构认知的过程。从儿童对“数”的初步感知，到逐步理解复杂的数学命题、解决实际问题，每个环节都蕴含独特的认知规律。本章先聚焦数学知识的学习机制，解析数学概念（内涵与外延）的两种学习形式——概念形成与概念同化，以及数学命题（定理、公式、法则）的下位学习、上位学习与并列学习；再以波利亚“启研”模式为核心，拆解数学问题解决的“理解题意—拟订计划—执行计划—回顾反思”四阶段心理过程，分析问题情境、学习者个人因素与解题策略的影响；最后结合小学生思维特点，阐释数学核心素养的内涵与构成要素，提出培养学习情感态度的具体方法，为教师引导小学生高效学习提供认知层面的科学指导。

### 目标罗盘

#### 知识目标

1. 掌握数学概念与命题的学习形式及影响因素。
2. 理解数学问题解决的含义、特征及波利亚“启研”四阶段模式。
3. 了解小学数学核心素养的内涵、构成要素及小学生数学学习特点。

#### 能力目标

1. 能够结合教学实例，分析学生数学概念与命题的学习过程。
2. 可运用波利亚模式，拆解数学问题解决的思维过程，设计引导策略。
3. 具备根据小学生认知特点，制订核心素养培养方案的初步能力。



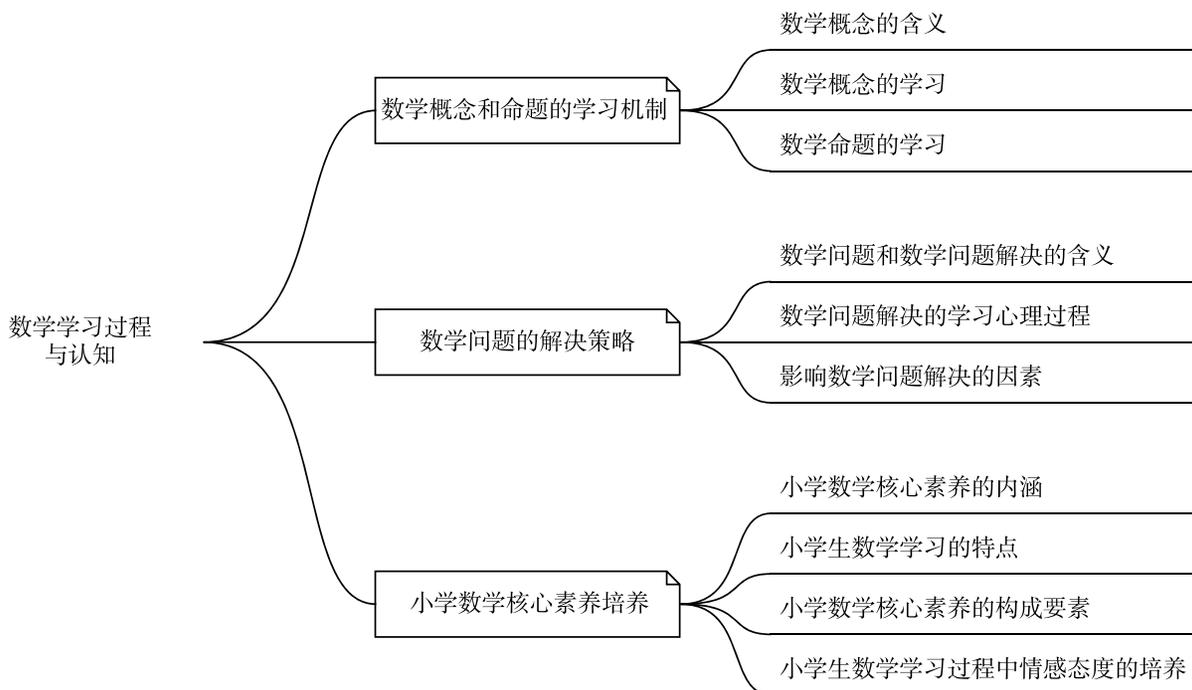
### 素质目标

1. 培养从认知心理学视角分析数学学习的素养，提升教学科学性。
2. 形成问题导向的教学思维，善于通过问题设计推动学生思考。
3. 增强学生主体意识，注重结合学生特点优化教学，促进个性化发展。

### 思政目标

激发学生对数学的求知欲，培养严谨求实的思维品质，树立勇于探索、不怕困难的学习态度，培养坚持不懈、追求真理的科学精神。

## 数学脉络



## 第一节 数学概念和命题的学习机制

### 一、数学概念的含义

概念是人们通过抽象化的方式从一群事物中提取出来的反映其共同特性的思维单位。一门学科的基本概念，反映了这门学科特有的思维形式与研究对象，体现了这门学科特有的思想方法。数学概念是人们对现实对象的数量关系和空间形式的本质特征的一种反映形式，是一种非常基础又极其重要的数学思维形式。也可以这样说，如果数学是一个生物有机体，那么数学概念则是构成这个有机体的细胞。

正确理解并灵活运用数学概念，是掌握数学基础知识和运算技能、发展逻辑论证和空间想象能



力的前提。在数学中，作为基本思维形式的判断与推理，以定理、法则、公式的方式表现出来，而数学概念则是构成它们的基础。我们常说的定理、推论、性质、公式等，在某种程度上是数学概念的特征及其之间关系的描述。

在一定程度上可以说，数学概念是每一个数学新知识的起点。乔治·波利亚（George Polya）在“怎样解题表”第二步“拟订方案”中，为了通过已知数据与未知量之间的联系来找到解题思路，有这样的提示：“回到定义上去。”“你把题目中所有关键的概念都考虑到了吗？”只有正确理解和运用数学概念，才能有效提高解题能力和思维能力。小学数学概念的教学对其他数学知识的教学和学生数学能力的培养都具有重要意义。

小学数学概念有的是从现实生活中抽象出来的，有的是从数学理论本身抽象发展而来的。数学概念包括内涵和外延两部分。内涵反映概念的本质属性，是概念“质”的反映。外延反映构成概念的所有对象的全体，是概念“量”的反映。例如，“三角形”概念的内涵是“由三条线段围成”“每相邻两条线段的端点相连”“图形”，外延是所有的钝角三角形、锐角三角形和直角三角形。正偶数概念的内涵是“能被2整除”“正整数”，外延是 $\{2, 4, 6, 8, \dots\}$ 。数学概念的科学理解就是要明确概念的内涵和外延。

## 二、数学概念的学习

### （一）数学概念学习的基本形式

数学概念的学习一般有两种基本形式：一是概念形成，二是概念同化。

#### 1. 数学概念形成

所谓数学概念形成，是指在教学条件下，从大量的实际例子出发，从学生实际经验的肯定例证中，经过比较、分类，从中找出一类事物的本质属性，然后再通过具体的例子对所发现的属性进行检验，最后通过概括得到定义并用符号表达出来。这种获得数学概念的方式叫作数学概念形成。数学概念形成的过程可以分为以下六个阶段。

##### （1）观察实例

观察数学概念的各种不同的肯定例证，可以是日常生活中的经验或事物，也可以是教师提供的典型事例。例如，要形成平行四边形的概念，可以观察每人画的平行四边形等。自然数3的认识，先是认识3朵红花、3个人、3张桌子等。

##### （2）分析共同属性

分析所观察实例的属性，通过比较得出各实例的共同属性。例如，通过比较可以得出平行四边形的共同属性是：四条边、两组对边分别平行且相等、对角相等。

##### （3）抽象本质属性

抽象本质属性就是从上面得出的共同属性中提出本质属性的假设。例如，提出平行四边形的本质属性的假设是：两组对边分别平行且相等、两组对角相等。

##### （4）确认本质属性

通过比较肯定例证和否定例证来检验假设，确认本质属性。例如，举出任意画的一个平行四边形都满足假设等。

##### （5）概括定义

在验证假设的基础上，从具体实例中抽象出本质属性，推广到一切同类事物，概括出概念的定义。



### (6) 具体运用

通过举出概念的实例，在一类事物中辨认出概念，或运用概念解答数学问题，进一步明确外延，如长方形、正方形也是平行四边形。从而，使新概念与原有认知结构中的相关概念建立起牢固的实质性的联系，把所学的概念纳入相应的概念体系中。

## 2. 数学概念同化

所谓概念同化，就是利用学习者认知结构中已有的概念，以定义或描述的方式直接向学习者揭示新概念的本质属性，进而使学习者获得新概念的过程。也就是以间接经验为基础，利用已掌握的概念去学习新概念的过程。例如，“等腰三角形”是在学习三角形之后学习的。教学时可以只给一些三角形图形，让大家先量一量各边的长，然后把有“两条边相等”的三角形定义为“等腰三角形”。教学梯形时，可以从平行四边形入手，让学生将梯形与平行四边形相比较，就可以突出“只有一组对边平行的四边形”这一梯形的本质属性。这就是概念的同化。

用概念的同化方式学习时，需要的条件是新学习的概念必须与学生原有认知结构中的某些概念或表象有密切的联系，且学生乐意进行有意义的学习。例如，学习公约数、最大公约数，学生必须主动将它们与自己认知结构中已有的约数概念及有关知识联系起来思考，认识到约数是对一个数来说的，公约数是对两个或更多个数来说的，且是它们都有的约数；由于一个数的约数个数是有限的，其中必有一个最大的约数，因此几个数的公约数中，也必有一个最大的公约数。这样使约数、公约数、最大公约数三个概念精确分化，前后贯通，纳入原有的整除概念系统中。

## 3. 数学概念形成与数学概念同化的比较

由上述可知，数学概念形成主要依靠的是对具体事物的抽象，而数学概念同化主要依靠的是学生对新旧知识的联系；并且数学概念形成与人类自发形成概念的方式接近，而数学概念同化是具有一定心理水平的人自觉学习概念的主要方式。小学阶段，在低年级数学概念形成中用得比较多；在高年级阶段数学概念同化逐渐增多，并成为获得数学概念的主要方式，但对较难理解的或开始学习新学科（新内容）时的一些数学概念，仍采用数学概念形成的学习方式。



### 课堂讨论

对比“数学概念形成”“数学概念同化”，讨论在“数与代数”“图形与几何”“统计与概率”不同领域，选择这两种概念学习方式的依据，分析如何通过这两种方式全面促进学生对数学概念的理解与掌握？

## (二) 影响数学概念学习的因素

在数学概念的学习过程中，学生对数学概念的接受和理解的程度往往各不相同。影响数学概念学习的因素很多，其中最主要的有3个。

### 1. 学生原有的认知结构

学生在学习数学概念时，往往是从他原有的认知结构出发，去认识、理解和区分事物的各种联系和性质。就概念形成来说，学生必须具有“刺激模式”方面的有关知识和经验，否则就不可能从中抽象出本质属性。比如，在平行四边形的基础上，很容易抽象出“梯形”的本质特征。

### 2. 有关新概念的感性材料和知识经验

概念形成主要依赖的是对感性材料的抽象，概念同化主要依赖的是对知识经验的概括。因此，



感性材料和知识经验是影响概念学习的重要因素。其中，概念学习素材的数量、典型性、变式和反例也直接影响着小学生对概念的感知、表征、理解和应用。如果提供的感性材料或感性经验数量太少，学生不仅不能获得概念的丰富表象，同时也难以区分出一类数学对象的本质属性和非本质属性。若概念的本质属性越明显、越突出，就越有利于学生对概念的理解和掌握；反之亦然。这就要求我们在教学中要选择那些能反映本质属性的典型材料说明概念，以此帮助学生顺利掌握数学概念。如果提供给学生的感性材料都是一些“标准”的实物或图形，那么学生在对概念意义的理解上就难免出现片面性。因此，学习数学概念时还应适当选择一些变式材料，让学生从不同角度去全面地理解数学概念的本质属性。

### 3. 学生的抽象概括能力

抽象是概念形成的必不可少的步骤，概括是概念同化的关键。如果缺乏必要的概括能力，学生是不容易真正掌握数学概念的。要实现概括，学生必须能对相应的一类具体事例的各种属性进行分化，再经过分析、综合、比较而抽象出共同的、本质的属性或特征，然后概括起来；在此基础上，再进行类化，即把概括而得到的本质属性推广到同类事物中去，这既是一个概念的运用过程，又是一个在更高层次上的抽象概括过程；然后，还要把新获得的概念纳入原有的概念系统中去，即要建立起新概念与已掌握的相关概念之间的联系，这是概括的高级阶段。



#### 课堂讨论

结合“角的认识”教学，讨论“学生原有的认知结构”，如已学过的线段知识、感性材料的典型性，如提供不同形状、位置的角、抽象概括能力这三个因素如何影响学生对角的概念的理解，教师可采取哪些策略优化这些影响因素？

## 三、数学命题的学习

### (一) 数学命题学习的定义

数学中的定理、公式和法则统被称为数学命题，学生对这些知识的学习称为数学命题的学习。在小学数学中，数的四则运算法则、运算定律与性质、计算公式等，既是现实世界数量关系和空间形式及其计算规律的概括与总结，又是有关计算过程具体实施细则的具体规定，也都符合关于数学命题的定义。因此，我们将学生对这些内容的学习称为数学命题的学习。命题学习的含义：一是发现命题，二是理解其语句所表达的复合关系的意义，三是推导或论证命题，四是运用命题在其适应的各种情境中解决问题。

### (二) 数学命题学习的基本形式

数学命题是由概念组成的，反映的是若干个数学概念之间的关系，因此数学命题的学习层次和复杂程度均高于数学概念的学习。数学命题学习的关键是获得对数学概念之间关系的理解，而数学概念之间各种关系的获得又依赖于新命题与原有认知结构中有关知识的联系。由于新命题和原有认知结构中相关知识的关系可以分为下位关系、上位关系和并列关系三种，因此数学命题的学习也可以分为以下三种基本形式。

#### 1. 下位学习

如果新命题在层次上低于原有的认知结构中的有关知识，那么新命题和原有认知结构中的相关



知识就构成下位关系。此时，新命题可以直接和原数学认知结构中的有关知识发生联系，直接纳入原有的认知结构中，充实原有的认知结构，这样的学习叫作“下位学习”。例如，在学习了长方形的有关规则后，再学习正方形的有关规则，便是下位学习。在学习了“大数-小数=差数”之后，再学习环形面积的计算公式：大圆面积-小圆面积=环形面积，也是下位学习。

在下位学习中，由于新命题所揭示的概念之间的关系是直接 from 原有的认知结构中处于概括水平较高的有关知识中分化出来的，因此这样的学习比较容易。在下位学习中，新命题和原有的认知结构的作用方式是同化。

## 2. 上位学习

如果新命题在层次上高于原认知结构中的有关知识，那么新命题和原有的认知结构中的有关知识就构成上位关系。通过对已有知识的归纳、综合与概括，将原有的认知结构改变为新的认知结构，这样的学习叫作“上位学习”。例如，在学习分数乘法时，先学习分数乘整数的法则，再学习一个数乘分数的法则，在此基础上概括出分数乘法法则，就是上位学习。

由于上位学习必须通过改造原有的认知结构才能完成，因此一般来说，上位学习比下位学习更困难。在上位学习中，新命题与原有的认知结构作用的方式是顺应。

## 3. 并列关系

如果新命题与原有认知结构中的有关知识具有一定的内在联系，但既不能构成下位关系，也不能构成上位关系，我们就把新命题和原有认知结构中的有关知识的这种关系称为并列关系。此时，学习新命题的关键在于寻找这种联系，使它们在一定意义上进行类比。这样的学习叫作“并列学习”。例如，学习了整数除法中商不变的性质，再学习分数的基本性质以及比的基本性质，都可以通过类比建立前后规则间的关系，让学生获得新知识。这些都是并列学习。

总之，在数学命题的学习中，新命题的内容以特殊的方式作用于原有的认知结构，并结合原有的认知结构，而形成新的认知结构。

## 第二节 数学问题的解决策略

问题是数学的心脏，解决问题是数学的核心。解决数学问题，既是数学学习应该达到的目标，也是学习数学的基本途径。正因为如此，20世纪80年代以来，问题解决受到普遍重视，一些国家和地区的数学课程标准对问题解决做了特别的规定，使其含义更加丰富。为了更好地理解什么是数学问题解决，我们需要先理解与其相关的教育名词。

### 一、数学问题和数学问题解决的含义

#### （一）数学问题的含义

所谓问题，是指没有现成方法可以解决的情境状态。数学问题是指人们在数学活动中所面临的、不能用现成的数学经验和方法解决的一种情境状态，需要在某种特定的情境中探究特定的、未知的数量关系和空间形式，并加以解决或作出论证的问题。

数学问题主要由3种成分构成：条件信息、目标信息、操作信息。目标即通常所说的要求什



么。操作在这里是指允许对条件所采取的行动，即可以采取哪些方式把数学问题由问题状态转化成目标状态，它是问题求解的依据。

## （二）数学问题解决的含义

根据数学问题的含义，数学问题解决是指学生在新的情境状态下，运用所掌握的数学知识对面临的问题采用新的策略和方法寻求问题答案的一种心理活动过程。数学问题解决是以思考为内涵，以问题目标为定向的心理活动过程，其实质是运用已有的知识去探索新情境中的问题，使问题由初始状态达到目标状态的一种心理活动过程。数学问题解决具有以下基本特征。

第一，数学问题解决指的是学生初次遇到的新问题，如果是解决以前解过的题，对学习来说就不是问题解决了，而是做练习。

第二，数学问题解决是一种积极探索和克服障碍的活动过程。它所采用的途径和方法是新的，至少其中某些部分是新的，这些方法和途径是已有数学知识和方法的重新组合。这种重新组合通常构成一些更高级的规则和解题方法，因此数学问题解决的过程又是一个发现和创造的过程。

第三，数学问题一旦得到解决，学生通过问题解决所获得的解决问题的方法就成为他们认知结构的一个组成部分，这些方法不仅可以直接用来完成同类学习任务，还可以作为进一步解决新问题的已有策略和方法。



### 课堂讨论

对比“纯数学问题”，如计算  $3.2 \times 1.5$ ，与“现实情境问题”，如“超市促销，商品原价 3.2 元，打 1.5 倍积分，实际积分多少”，讨论问题情境的呈现方式如何影响学生的解题思路，教师在设计问题情境时，如何平衡“趣味性”与“数学性”？如何避免情境干扰数学问题的核心逻辑？

## 二、数学问题解决的学习心理过程

数学教育家乔治·波利亚提出了数学问题解决的“启研”模式，揭示了问题解决的心路历程，被西方誉为“自我启发解决问题的经典概括”。阐述该模式的专著《怎样解题：数学思维的新方法》（*How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method*）成为数学教育领域的经典之作，并引导了 20 世纪数学教育中“问题解决”的热潮。

波利亚关于数学问题解决的“启研”模式由四个部分构成，即理解题意、拟订计划、执行计划和回顾反思。下面以解决平均分油问题“有 3 个没有刻度的油瓶，分别可以装 8 升、5 升、3 升，用这三个油瓶，如何将 8 升油二等分？”为例，解析波利亚关于数学问题解决的四个阶段。

### （一）理解题意

第一步，理解题意，弄清楚问题是什么。具体包括：了解问题情境是指什么；认识数学问题；知道问题叙述的内容是什么；它的背景是怎样的；它可能与什么事件有关；明确问题的条件和目标，就是将已知条件和解决后的目标从问题情境中分离出来，同时明确从条件到目标的障碍是什么。

比如，对于平均分油问题，解决者需要明白：三个油瓶，分别是 3 升、5 升和 8 升；没有别的刻度，也没有别的工具可以在瓶子上标刻度；这些油瓶的形状是未知的，无法从油的高度来刻画油瓶里装了多少油。此外，还需要明白：当前状态是 8 升油瓶里装满了油，另外两个是空的；用这几个瓶子相互倒油的方法，将这 8 升油平均分，即让 8 升油瓶和 5 升油瓶里各装 4 升油。



## (二) 拟定计划

第二步，拟定计划，找出已知数与未知数之间的联系，如果找不出直接的联系，可考虑辅助问题，最终得出一个求解的计划。寻求解决的方法，是指探索什么方法可能突破障碍，实现预期目标，并拟定一个比较完备的计划，设想主要经历哪些步骤，每个步骤大致会出现什么结果。

比如，对于平均分油问题，解决者要思考：怎么才能产生4升油呢？3升加上1升为4升，5升减1升为4升，所以解决的关键在于找到1升。问题就变为，要倒出1升油出来。怎么才能倒出这1升油呢？两个3升减去5升剩下1升，两个5升减去三个3升剩下1升。这样一来，方法就找到了。

## (三) 执行计划

第三步，执行计划，实行拟定的计划，看看能否顺利解决问题。如果不能解决，再回到上一阶段，修订计划；如果能解决，检验以下结论是否合理；如果合理，则问题解决；若不合理，再修正和调整，或者重新想办法。

比如，对于平均分油问题，就有两个解决方案，执行这两个解决方案，检验这两个方案是否正确（具体细节见表2-1）。

表 2-1 平均分油问题的两个解决方案

步骤	解决方案一	8升瓶	5升瓶	3升瓶	步骤	解决方案二	8升瓶	5升瓶	3升瓶
0	原始状态	8	0	0	0	原始状态	8	0	0
1	8升倒满3升	5	0	3	1	8升倒满5升	3	5	0
2	3升倒进5升	5	3	0	2	5升倒满3升	3	2	3
3	8升倒满3升	2	3	3	3	3升倒进8升	6	2	0
4	3升倒进5升	2	5	1	4	5升倒进3升	6	0	2
5	5升倒进8升	7	0	1	5	8升倒满5升	1	5	2
6	3升倒进5升	7	1	0	6	5升倒满3升	1	4	3
7	8升倒满3升	4	1	3	7	3升倒进8升	4	4	0
8	3升倒进5升	4	4	0	—	—	—	—	—

## (四) 回顾反思

第四步，回顾反思，即对解决问题的过程和方法进行回顾和评价。其主要内容包括：问题是如何解决的，怎么想到的思路，用到了哪些方法，这些方法在哪里还用过，还有没有其他方法，问题是否可以拓展，问题的一般形式是怎样的，解决这个问题给我哪些启发，以后遇到类似新问题可能会怎样？

比如，对于平均分油问题，我们需要思考以下问题：这个问题还有没有其他解决方法？还有没有类似问题？它隐藏的数学背景是什么？其实，这类问题还有很多，比如，有三个没有刻度的油瓶，分别可以装10升、7升、3升油，用这三个油瓶，如何将10升油平均分成两份？

这个问题隐藏了什么数学知识呢？或者说这个问题的数学背景是什么呢？仔细分析一下上述两种解法，不难发现，其实只是用3和5这两个数，经过若干次加减使结果等于4（用高等代数的表达语言来说，就是把4表示成5与3的线性组合）。比如，解法方案一就是 $3 \times 3 - 5 \times 1 = 4$ ，解法方案二就是 $3 \times (-2) + 5 \times 2 = 4$ 。也就是说，平均分油问题的本质是一个不定方程 $3x + 5y = 4$ ，它的解很



可能就是平均分油的方法。解决方案一对应的解是  $\begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}$ ，解决方案二对应的解是  $\begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \end{cases}$ ；这也就意味着这个不定方程的解，便是平均分油的方法。

通过上例不难发现，一个看似与数学没有多大关系的趣味思考题，背后隐藏了很多数学知识与思想。如果这个问题仅仅定义为智力题，我们一般就只能得到一种或两种方法，帮解决者发展思维。但是，一旦把它定义为一个数学问题，挖掘背后隐含的数学信息，探究它的数学背景，这个问题就变得更有趣，也更有助于解决者锻炼严谨的思维。更为重要的，作为一个数学问题来解决，可以让解决者体会到数学的魅力，增进解决者对数学学习的情感。

值得注意的是，国外有研究表明，解题的新手和专家在解决问题上的差别是很明显的。新手看到问题就开始尝试解答，解答失败后就放弃了。而专家遇到问题，则先明确已知和目标，然后花很长时间拟定解题计划，而执行计划的时间则比较短。更为重要的是，专家在解决问题后，会花大量时间进行回顾和反思。由此可见，要成为优秀的数学问题解决者，理解题意、拟定计划和回顾反思是不可缺少而且需要花大力气的环节。我们的数学教学，需要更加重视这三个环节。

### 三、影响数学问题解决的因素

影响数学问题解决的因素很多，总的来说，主要有以下三个方面。

#### （一）问题情境因素

问题的不同类型（选择题、填空题、计算题、证明题等）和难度（简单计算、混合计算、实际问题等），是影响学生数学问题解决的重要因素。面临性质不同、复杂程度相异的问题，学生运用思维的方式、对问题思考的紧张程度和解决问题的速度都会不同。对于小学生来说，对问题的具体理解直接影响着问题的解决，特别是当他们对问题所涉及的领域很陌生的时候，问题的具体化就成了促进问题解决的重要因素。同样，问题的陈述方式及知觉图示的难易程度，也会直接影响问题的解决。题目的文字说明要求学生有较好的语文基础和数学基础才能理解。对于图形题目，则要求学生有较好的图形知觉能力才能识别。

#### （二）学习者的个人因素

##### 1. 学生的知识经验基础

学生的知识经验基础是否坚实，影响着学生对问题性质的识别和变更问题的能力，而这正是数学问题解决的核心。没有坚实的知识经验基础，数学问题的解决是困难的。

##### 2. 学生的心理特点

学生的智力水平和个性品质，直接影响着数学问题解决的效率。高智力的学生具有较强的逻辑推理能力、理解能力、分析能力和记忆力，数学问题解决比较容易获得成功；智力水平低的学生在数学问题解决中则容易失败。有明确学习目的、富有创造精神、爱钻研、有毅力的学生，解决问题比较容易获得成功；反之，缺乏这些品质的学生，在解决问题的过程中往往遇难即退，因而成功率较低。

#### （三）解题策略的运用

解决问题的策略是指解决问题的人用来调节他们的注意、学习、回忆和思维的技能。研究表明，采用如下几种策略，往往能有助于解决问题：突破常规，产生不同寻常的新看法或新想法；改



变思考问题的方向；摸清问题的要点；多角度、多方位考察问题；联想与问题有密切关系的事实和条件；等等。



## 德育长廊

## 从袁隆平杂交水稻研究中学数学思维应用

“杂交水稻之父”袁隆平以数十年坚守，用一粒种子改变世界。面对“自花授粉作物杂交无优势”的国际定论，他独创“三系法”技术路线，为杂交水稻研究指明方向。从1964年起，他在稻田中逐株筛查，历经16天发现首株天然雄性不育株，以标记、镜检的严谨流程开启研究突破的序幕。1966年，《水稻的雄性不孕性》论文发表，成为全球首篇系统论述该课题的文献。他带领团队走遍各地，记录数万组稻株性状数据，以数学思维分析杂交规律，最终培育出高产杂交水稻，使单产大幅提升。从亩产不足300公斤到突破1500公斤，他用科学实践解决数亿人温饱，其“禾下乘凉梦”背后，是脚踏实地的科研精神与为国为民的赤子情怀。

袁隆平院士的研究过程，完美诠释了数学认知与问题解决的逻辑：他通过观察获取感性材料，再对数据进行分析、抽象与概括，这与数学概念形成、命题学习的认知过程高度契合；在解决杂交水稻培育难题时，他运用数学思维分析问题、拟订方案、验证结果，体现了波利亚“启研”模式的核心要义；而他面对失败不气馁、坚持不懈追求目标的精神，更是数学学习中不可或缺的品质。在小学数学教学中，我们要以袁隆平院士为榜样，引导学生像科学家一样思考。在讲解数学概念与命题时，注重引导学生经历“观察—分析—抽象—概括”的认知过程；在问题解决教学中，鼓励学生模仿袁隆平院士的研究思路，勇于面对困难、反复尝试。更重要的是，要渗透坚持不懈、追求真理的精神，让学生明白数学学习不仅是掌握知识与技能，更是培养克服困难、勇于探索的意志品质，为今后应对各种挑战打下坚实基础。

## 第三节 小学数学核心素养培养

## 一、小学数学核心素养的内涵

小学数学核心素养作为小学生应具备的、能够适应终身发展和社会发展需要的、在数学学习中表现出来的品格和关键能力，应该要带有鲜明的数学学科特征和独特的小学特质，侧重于对经验的感悟。

数学学科的特征，主要是强调在培养小学生的数学核心素养时，不能单一地从教育学原理的角度去讨论小学生的数学学习过程。数学教育与数学学科是不一样的概念，对于小学数学教育，要意识到学科本身与教育的关系，对数学学科本身的特点有一定的理解，因为数学学习的过程是思维发展的过程，具体表现为培养小学生的数感、量感、空间观念、符号意识、推理意识、数据意识、模型意识、应用意识、创新意识等，以及掌握基本的几何直观、运算能力等。对于培养小学生的数学核心素养，就要着重培养小学生的数学思维和能力，具体通过数学知识、技能学习这些载体来提高学生的思维水平和能力。



心理学研究表明,义务教育阶段的小学生一般处于6~12岁的童年期,年龄跨度较大,心理发展变化比较快。在这个时期,小学生在思维认知、语言表达和个性品质等方面都会经历一个快速变化的过程,即小学生的思维、认知和个性会出现阶段性变化,亦会有阶段性特点和总体特征。故作为一名数学教师,需要关注和把握小学生各方面的阶段性特点,把握小学生在不同阶段的认知、思维特点和个性变化,进而确定教学目标和设计教学内容,促使小学生在数学活动中自然生成数学核心素养。

小学数学核心素养的内涵,应当要具有鲜明的数学学科特征和小学特质。相较于中学阶段,小学阶段应该更加侧重于对经验的感悟。要注意的是,小学数学核心素养不仅仅指知识、技能,也包括小学生的情感态度、个性品格等方面的心理品质。

## 二、小学生数学学习的特点

小学生的数学学习一方面要体现数学学科抽象性、严谨性和应用性,另一方面要体现小学教育的基础性、普及性和发展性。小学生数学学习具体有以下特点。

### (一) 小学生的数学学习是以经验为基础的“数学再创造”过程

小学生在日常生活和以往的数学学习过程中已经积累了很多与数学相关的生活经验和数学活动经验,对数学基本思想的逻辑有一定的体验,每一个小学生都是从他们的经验出发,与教师、教材、同伴发生交互作用,扩充升华已有经验,建构自己的数学知识的。这一过程往往和数学理论的发生发展相一致,是数学的再创造过程。这一过程首先需要依赖已有经验通过直观、运算、推理等思维方式发现特征、发现规律,这实际是对思维严谨性的训练;其次需要对特征和规律加以抽象概括,使之成为用数学语言表达的概念、公式等,这实际是小学生的符号意识的形成过程;最后,要尝试用新的数学语言表达和分析客观世界,在应用中加深认识,从而构建头脑中新的数学结构,同时形成一定的模型意识和应用意识。

### (二) 小学生的数学学习是“三会”核心素养逐步养成的过程

小学数学的学习,不仅仅是知识和技能的获取,而且以“会用数学的眼光观察现实世界,会用数学的思维思考现实世界,会用数学的语言表达现实世界”为目标。数学知识和技能有一定的应用领域,而“三会”则是适应个人终身发展和社会发展需要的必备品格和关键能力。核心素养是在一次次问题解决和数学活动中逐步发展的,学生唯有切实感悟、体验和经历,才能实现核心素养目标从感悟、意识到观念再到能力的升华。《标准》将小学阶段的核心素养细化为数感、量感、符号意识、运算能力、几何直观、空间观念、推理意识、数据意识、模型意识、应用意识、创新意识,在小学阶段,以达到感悟、意识、观念程度为主,强调经验积累和态度养成。

### (三) 小学生的数学学习过程存在思维发展的普遍规律和个体差异

数学思考贯穿于整个数学学习活动,数学思考的抽象性和逻辑性是造成小学生数学学习困难的重要原因。小学生思维的基本特点是从以具体形象思维为主要形式逐步过渡到以抽象逻辑思维为主要形式,而且抽象逻辑思维仍然与具体事物、个别实例相联系,且不能进行形式化的逻辑运算。在抽象性方面,小学生需要经历从具体到表象再到数学语言的过程。在逻辑性方面,小学生能理解逻辑推理的各种形式,能主动进行合情推理并得出结论,演绎推理具有一定的条理性。在这一普遍的过程中,有些小学生观察细致、辨识力强,能很快抓住事物本质特征,有些概括能力强,有些思维思辨程度高,有些善于联想……这些思维的差异性导致在完成同一活动任务时,每个小学生所需要的支持和时间不同,这就要求教师因材施教,探索分层教学、合作学习等方式以使得不同的学生在数学上有不同的发展。



#### （四）小学生的数学学习是认知和情感态度相结合的过程

小学生正处于情感和态度的形成发展阶段，具有很强的可塑性。小学生的数学学习是以数学思考为中心的认知变化过程，会相应地产生对数学学习的情感态度，而良好的情感态度将会对后续的学习起到推动和辅助作用。《标准》将情感态度作为课程目标之一，旨在说明情感态度绝不是数学学习过程的“副产品”，需要有意识地加以培养，以良好的情感态度提高数学学习效果。



#### 课堂讨论

讨论不同特性角度下对小学生数学学习的整体认知如何影响教学重点的设定，教师在设计教学内容时，如何平衡“学科特性”与“教育特性”，避免一方过度侧重而影响学生全面的数学学习发展？

### 三、小学数学核心素养的构成要素

前面主要是针对小学数学核心素养的内涵进行定性的描述，数学核心素养与数学课程目标和内容有密切关系，对于理解数学学科本质、设计数学教学活动和展开教学评价活动都具有重要的意义和价值，要进一步落实小学生数学核心素养的培育，则需要对小学数学核心素养的构成要素展开具体的讨论。

国内在关于小学数学核心素养的要素构成方面的观点存在不少争议，其中比较具有代表性的观点有这几种。马云鹏教授认为，“课程标准”提出的十个核心词可以当成小学阶段的数学核心素养来看待，即数感、符号意识、空间观念、几何直观、数据分析观念、运算能力、推理能力、模型思想、应用意识和创新意识，因为它们的思想、方法或者关于数学的整体理解与把握，是学生数学素养的表现。李星云教授则是基于PISA2012提出的数学素养八大能力，进行梳理和补充，形成了小学阶段学生所需的六个数学核心素养，即数学交流、数学推理、运算能力、空间观念、数据分析能力和数学建模。周淑红教授等聚焦于学科特征和小学特质，认为数学核心素养是最基础、最具有发展性的“核心”要素，从义务教育数学课标中所提到的十个核心词中选择了四个核心要素，即应用意识、运算能力、几何直观和推理能力。

而《标准》提出，在小学阶段，数学核心素养主要表现为数感、量感、符号意识、运算能力、几何直观、空间观念、推理意识、数据意识、模型意识、应用意识、创新意识。

尽管国内不同学者对于小学数学核心素养的要素构成持有不同意见，我们至少可以从中理解到，数学核心素养不是凭空冒出来的全新概念，与过去所提的数学素养、核心词等相关概念都有着密切的关系，其核心强调了小学数学核心素养的整体性、一致性和阶段性。与其他学段不同的是，小学阶段主要指在数学学习实践活动中所形成的最基本、最具发展性的数学素养。

### 四、小学生数学学习过程中情感态度的培养

学习情感是学习过程中产生的内心体验。学生在学习中感受到数学的价值和数学美，体会到用数学应用的高效性，体验到数学任务成功完成的喜悦，从而喜欢数学，对数学有求知欲，有学习数学的兴趣和信心，这就是积极的情感。积极的情感不仅能活跃思维、激发智慧潜能、提高学习效率，还能产生持续性的学习动力，鼓舞学生克服困难，努力完成学习任务。学习态度是对数学学习的认识、情感与行为倾向，外显为个人在数学学习过程中的语言和行为，如上课注意力能否集中、能否独立按时完成作业、能否勇于质疑问难等。科学的态度是数学学习必不可少的心理条件。情感



和态度是互相影响、相互依存的。积极情感是正确态度的重要部分，而正确态度下的行为有利于获得成功的体验，进而提升积极情感。情感态度的发展不需要专门的学习，而是渗透于知识探索、问题解决的过程中，积极的情感和正确的态度需要教师有意识地、长期地培养，可采取以下几种方法。

### （一）将小学生对现实世界的好奇心引向对数学的求知欲

人对周围世界具有天然的好奇心，好奇是人类的本能，小学生大脑还未发育完全，受到的本能的影响还很强烈，加上他们的生活经验少，现实世界对于他们来说是新奇的，他们乐于去探索、发现。教师应该充分利用学生的好奇心，以现实情境刺激学生的感官，调动他们的好奇心，然后引导他们发现现实中蕴藏的数量和图形，启发他们用数学的语言描述现实并提出问题，这时小学生对现实的好奇心就转化成了对数学的求知欲。当学生获得了新的数学知识时，还可以引导学生将数学的眼光转向更为广阔的生活情境：找一找周围是否存在概念原型，尝试用新规则处理生活问题，重新阅读媒体信息看一看是否有不同的认识……让小学生感受到将这缤纷的世界和数学联系起来时，数学竟“变得如此简单”，从而激发小学生对数学的求知欲。

### （二）展示数学价值，激发小学生数学学习兴趣

兴趣是由爱好、喜欢产生的愉悦情绪，根据起因可分为直接兴趣和间接兴趣。直接兴趣是对事物和活动本身的兴趣，间接兴趣是对事物和活动所导致的结果产生的兴趣。如游戏是小学生喜爱的活动，把数学融入游戏就会激发学生的直接兴趣，但是直接兴趣不持久，当游戏结束，直接兴趣就消失了。间接兴趣让人想象到结果的美好，从而形成强大而持久的内驱力，因此间接兴趣的激发是关键。数学的价值在于它推动了人类社会的进步，在于它是人们适应现代社会发展所必需的学科。如果学生能够认识到数学的价值，就容易产生间接兴趣。数学史料、数学家的故事、数学名题生动地反映了数学学科和数学家对人类文明发展所做出的巨大贡献，现代生产生活中的数学应用实例则能清晰地体现学习数学的必要性，教师可根据学生的年龄特征和教学内容，将这些材料融入知识讲解或练习中。如比较古时候不同的计数方法，让学生说一说十进制计数法的优越性；学习百分数后介绍银行的理财产品等。学生了解了数学的价值，自然而然地喜欢上数学，产生“我要学”的冲动，学习兴趣才能持久。



#### 课堂讨论

除了数学史料、数学家故事、数学名题以及现代生产生活中的数学应用实例，还有哪些材料可以融入知识讲解或练习，以体现数学价值？

### （三）创造成功的机会，树立学生学习数学的自信心

数学学习的自信心就是相信通过自己的努力能完成学习任务。数学的学习充满未知的挑战，“无从下手，百思不得其解”是数学学习过程中的常态，不断调整策略、不断尝试才能达到“柳暗花明、豁然开朗”的境地。自信可以使学生无惧失败、勇于挑战，是数学学习必备的品质。

学生自信心的形成条件：一是有成功完成任务的体验；二是认识到由于自身的努力取得了成功。苏联著名心理学家维果茨基的“最近发展区理论”表明学生的发展有两种水平，一种是学生原有水平，另一种是进行教学以后所形成的水平。两者之间的差异就是最近发展区。如果学习任务总是落在原有水平，则学生能够轻易完成任务，不能感受到努力的作用，体验不到努力后成功的喜悦；如果学习任务总是落在第二种水平，则挑战难度太高，能成功的学生少之又少，不利于自信心的形成。在教学中，教师可根据教学目标（第二种水平）以及学生的经验基础（原有水平）设计



阶梯式学习任务，使任务落在小学生的最近发展区，那么学生只要在原有水平的基础上“跳一跳”，就很可能“摘到桃子”，这样，成功的概率是很大的。在学生“跳一跳”的过程中，可以通过小组合作、对个别有困难的学生进行启发提问等方法提高成功学生的人数。小学生往往将“任务成功”等同于“自己的答案和老师的一样”，然而，任务执行过程中合理的思考、积极的合作、解答过程中正确的关键步骤等都是值得肯定的，教师应发现这些闪光点并给予表扬，使学生体验到尽管没有达到最终目标但是努力就会有收获，树立小学生学习数学的自信心。

#### （四）培养具有科学态度的学习习惯

精神和态度一样都是人的心理状态，可以从外在的行动体现出来。《标准》指出，科学的精神就是质疑问难、自我反思、勇于探索。精神（态度）落实到长期的行动中成为学生自动化的行为方式就是学习习惯。对于小学生来说，质疑问难落实到行为习惯上就是认真倾听、参与讨论、不懂就问、提出不同的想法等，自我反思落实到行为习惯上就是完成任务后自行检查、及时复习、订正错题、总结经验和收获等，勇于探索落实到行为习惯上就是独立完成作业、积极回答问题、不断试错、多角度思考、查找资料等。对于学生而言，学习习惯是具体的行动，是可以自我监控的，具有科学态度的学习习惯可以提高学生的自主性，提高学生的学习效率。

首先，小学生学习习惯的养成需要教师提出明确的要求，教给学生更为具体的实施路线，如要求学生“不懂就问”，可以告诉学生“想清楚哪里不懂后记下来，找机会和同学讨论或者问老师”，学生只有知道怎样做才能积极行动起来。其次，学生服从要求后教师应给予表扬，还可以将学生的成功和他的行为习惯联系起来，如“小明每次完成作业都自己检查，作业经常得100分”。最后，教师可以指导学生监督自己的行为是否形成了习惯，如编制“好习惯自查表”，让学生每周或每月对照自评，自评的目的不在于结果是否真实，而在于让学生知道什么是好的习惯，自己能否做到。当学生养成良好的学习习惯时，他就走在了追求科学态度、科学精神的大道上。



### 智慧结晶

本章首先解析数学知识的学习机制，阐述数学概念的内涵与外延，介绍概念形成（从实例抽象本质属性）与概念同化（依托旧知学习新知）两种学习形式，分析认知结构、感性材料等影响因素；同时讲解数学命题学习的下位、上位、并列三种基本形式。其次，围绕数学问题解决，界定数学问题的构成与问题解决的含义，结合波利亚“启研”模式拆解“理解题意—拟订计划—执行计划—回顾反思”四个阶段心理的过程，分析问题情境、学习者因素与解题策略的影响。最后，探讨小学数学核心素养的内涵与构成，结合小学生学习特点，提出培养学习情感态度的方法。通过本章学习，读者能掌握数学学习的认知规律，为设计符合学生认知的教学活动提供依据。



### 讲台模拟

#### 【实训名称】

小学数学“平行四边形概念”学习机制分析与教学方案设计实训

#### 【实训目的】

- （1）掌握数学概念形成与概念同化两种学习形式的特点，能分析小学生学习几何概念的认知过程。
- （2）学会结合概念学习机制，设计符合小学生认知规律的几何概念教学方案。



### 【实训准备】

(1) 材料：平行四边形实物（如伸缩衣架、课本封面等）、平行四边形与非平行四边形图形卡片、实训任务单（含概念学习机制分析表、教学方案框架等）。

(2) 工具：直尺、三角板、白板等。

### 【实训步骤】

(1) 概念学习机制分析（25分钟）：学习者独立分析“平行四边形概念”适合的学习形式（概念形成/同化），结合小学生认知特点，填写分析表（如“概念形成需提供哪些实例”“概念同化需依托哪些旧知”等）。

(2) 教学方案设计（45分钟）：分组设计教学方案，明确导入（如实物观察）、新知探索（如实例比较、抽象本质属性等）、巩固应用（如图形辨析等）环节，突出概念学习机制的运用。

(3) 方案展示与改进（30分钟）：各组展示方案，教师引导学习者结合认知规律点评，提出修改建议，完善方案。

## 思维擂台

### 一、填空题

1. 数学概念的学习一般有两种基本形式：一是\_\_\_\_\_，二是\_\_\_\_\_。
2. 乔治·波利亚提出的数学问题解决“启研”模式，包含理解题意、拟订计划、执行计划和\_\_\_\_\_四个阶段。
3. 数学命题学习的基本形式可分为下位学习、上位学习和\_\_\_\_\_三种。

### 二、简答题

1. 试述影响数学概念学习的主要因素有哪些。

---



---



---



---

2. 简述数学问题解决的基本特征。

---



---



---



---

3. 小学生数学学习具有哪些特点？

---



---



---



---

# 第三章 小学数学 教材分析 与教学设计

数学家本质上是个着迷者，不迷就没有数学。

——诺瓦利斯

## 数海启航

教材是课程理念落地的重要载体，教学设计则是将教材内容转化为有效教学活动的关键环节。我国小学数学教材历经多次修订，从注重知识传授到强调核心素养培养，编写理念与呈现形式不断优化。本章先阐述教材编写需体现核心素养培养要求，关注内容结构的整体性、组织的一致性与要求的阶段性，同时明确“数学化”“问题化”“活动化”的教学设计理念；再指导教师依据《标准》行为动词制定教学目标，实现从三维目标到核心素养导向目标的转化，并结合案例赏析；接着探讨教学方法选择的依据，强调多种方法配合使用，重点分析问题解决与情景教学法的融合；最后介绍详案与简案的结构、格式，通过新授课、练习课、复习课三类课型的教学设计案例，为教师提供可操作的实践范式，助力提升教材分析与教学设计能力。

## 目标罗盘

### 知识目标

1. 掌握教材编写的核心理念（核心素养导向、内容结构化等）与教学设计的三大理念。
2. 理解教学目标制定的依据（课程标准、学情等）及不同课型的教学设计要点。
3. 了解教案的结构（详案、简案）、格式及教学方法选择的基本原则。

### 能力目标

1. 能够依据教材编写理念，分析教材内容的编排逻辑与育人价值。
2. 可结合课程标准与核心素养要求，制定明确、可测的教学目标。
3. 具备设计不同课型教案，选择适配教学方法的能力。