高等数学基础·上册

类目：公共基础课
书名：高等数学基础（上册）
主编：张 余 张 瑜 郭丽华
出版社：北京出版社
开本：正 16 开
书号：978-7-200-19823-2
使用层次：通用
出版时间：2025 年 12 月
定价：45.00 元
印刷方式：双色
是否有资源：有

责任编辑：周明霞
责任印制：王晓燕
封面设计：旗语书装

高等数学基础 · 上册

ISBN 978-7-200-19823-2
定价：45.00元

高等数学基础 · 上册

主编 ◎ 张余 张瑜 郭丽华

北京出版集团
北京出版社

普通高等教育数学基础课「十五五」规划教材

高等数学基础 · 上册

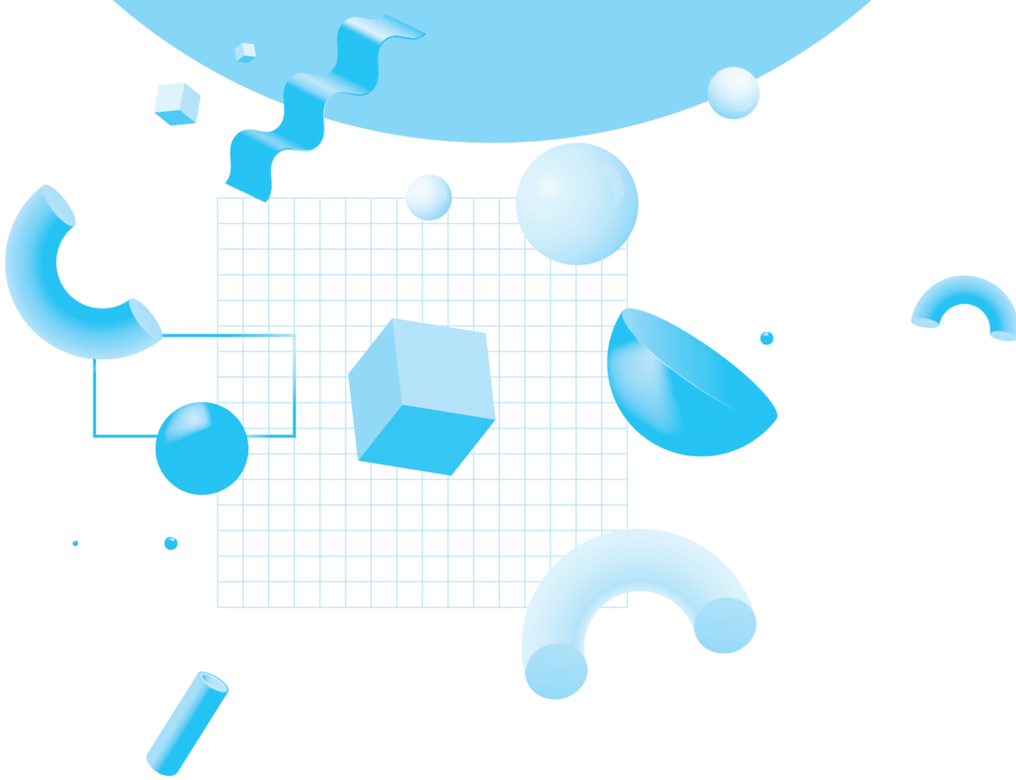
主编 ◎ 张余 张瑜 郭丽华

北京出版集团
北京出版社

普通高等教育数学基础课
『十五五』规划教材

高等数学基础·上册

主编◎张　余　张　瑜　郭丽华



北京出版集团
北京出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学基础. 上册 / 张余，张瑜，郭丽华主编.
北京 ：北京出版社，2025.12. --ISBN 978-7-200
-19823-2

Ⅰ. O13

中国国家版本馆 CIP 数据核字第 2025QE6891 号

高等数学基础·上册

GAODENG SHUXUE JICHU · SHANGCE

主编 ◎ 张　余　张　瑜　郭丽华

*

北京出版集团
北 京 出 版 社　出版

（北京北三环中路 6 号）

邮政编码：100120

网址：www.bph.com.cn

京版北教文化传媒股份有限公司发行

全国各地书店经销

涿州汇美亿浓印刷有限公司印刷

*

787 mm×1 092 mm　16 开本　12.5 印张　260 千字

2025 年 12 月第 1 版　2025 年 12 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-200-19823-2

定价：45.00 元

编　委　会

主　编　张　余　张　瑜　郭丽华

副主编　刘相君　陶明珠　周　宁

　　　　李琼琳　魏会贤　李欢兵

前　言

高等数学是普通高等学校一门重要的基础学科．作为一门学科，高等数学有其固有的特点，即高度的抽象性、严密的逻辑性和广泛的应用性．抽象性是数学最基本、最显著的特点，因其高度的抽象性，我们才能深入地揭示其本质规律，才能使之得到更广泛的应用．严密的逻辑性是指在数学理论的归纳和整理中，无论是概念和表述，还是判断和推理，都要运用逻辑的规则，遵循思维的规律．所以说，数学也是一种思想方法，学习数学的过程就是思维训练的过程．人类社会的进步，与数学这门科学的广泛应用是分不开的．尤其是到了现代，电子计算机的出现和普及使得数学的应用领域不断拓宽，现代数学正成为科技发展的强大动力．

本书在编写的过程中做了以下方面的努力：

（1）从普通高等教育的实际出发，结合数学教学改革的实际经验，按照“应用为目的，必需、够用为度”的原则，以“理解基本概念，掌握运算方法及应用”为依据，删去了不必要的逻辑推导，强化了基本概念的教学．

（2）编写的内容力求简洁易懂，注意把握好理论推导的深度，注重基本运算能力、分析问题和解决问题能力的培养，贯彻理论联系实际和启发式教学原则，深入浅出，通俗易懂．

（3）注意从实际问题中引出数学知识，再将数学知识应用到各种实际问题中，用大量的实例反映数学的应用，加深学生对数学知识的理解，从而使数学源于实际，又反作用于实际．例如，在定积分的应用部分，不仅讲述了定积分在几何、物理方面的应用，还拓展了其在经济领域的应用．

（4）充分考虑普通高等学校学生的数学基础，较好地处理了初等数学与高等数学的过渡与衔接．适度淡化逻辑论证，充分利用几何说明，帮助学生理解有关概念和理论．

（5）结合重点和难点，书中选择了数量适中、难度适当的例题，并突出数学思维方法．

（6）为了方便教与学，每节配有习题，每章配有复习题．

全书共分 6 章：第 1 章为函数与极限；第 2 章为函数的导数与微分；第 3 为章微分中值定理与导数的应用；第 4 章为不定积分；第 5 章为定积分；第 6 章为常微分方程．

由于编者水平有限，再加上编写时间仓促，书中难免存在不妥之处，敬请各位专家及广大读者提出宝贵意见，以便修订时改进．

编　者

2025 年 10 月

目　录

第 1 章

函数与极限

1.1 函数的概念与性质

1.1.1 函数的概念

在自然科学、经济学以及现代管理科学中都会出现大量的变量之间的函数关系．下面通过一些实例来引入函数这一重要概念.

例 1 某海域昼夜水温 T 和时间 t 是两个变量，根据自动温度记录仪所记录的数据，可以描绘出一条曲线如图 1-1 所示．这条曲线表示了水温 T 和时间 t 之间的函数关系.

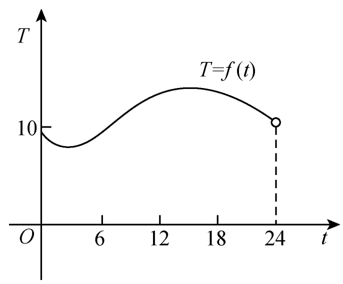


图 1-1

例 2 某公司 2021 年上半年某产品的销量(单位：个)如表 1-1 所示：

表 1-1

月份 t	1	2	3	4	5	6
销量 y	1 900	1 850	2 000	1 950	1 920	1 890

通过上表，可以看出 3 月份该产品的销量最多，可以建立销量 y 与月份 t 之间的函数关系，这样有助于把握产品的销售情况.

例 3 1 g 冰由 -10 ℃升至 10 ℃的过程中，它所吸收的热量 Q 与温度 T 之间的函数关系式如下：

$$Q=\begin{cases}0.5(T+10), & -10\leqslant T<0,\\ T+85, & 0\leqslant T\leqslant 10.\end{cases}$$

下面我们给出函数的定义：

定义 1.1 设数集 $D\subset\mathbf{R}$，则称映射 f：$D\to\mathbf{R}$ 为定义在 D 上的函数，通常简记为 $y=f(x)$，$x\in D$，x 称为自变量，y 称为因变量，D 称为函数的定义域，数集$\{f(x)\mid x\in D\}$称为函数 f 的值域，记作 R_f 或 $f(D)$. 当 $x=x_0$ 时对应的函数值记为 $f(x_0)$.

需要指出，按照上述定义，记号 f 和 $f(x)$的含义是有区别的：前者表示自变量 x 和因变量 y 之间的对应法则，而后者表示与自变量 x 对应的函数值．但为了叙述方便，习惯上常用记号“$f(x)$，$x\in D$”或“$y=f(x)$，$x\in D$”来表示定义在 D 上的函数，这时应理解为由它所确定的函数 f.

由函数的定义可以看出，函数是从实数集到实数集的映射，其值域总在 $\mathbf{R}$ 内，因此确定函数有两个要素：定义域和对应法则．所以，两个函数相同的充分必要条件是两个函数的定义域和对应法则都对应相同.

例 4 判断下列函数是否表示相同的函数关系：

（1）$y=\frac{x^2}{x}$和 $y=x$；

（2）$y=|x|$与 $y=\sqrt{x^2}$.

解　（1）因为函数 $y=\frac{x^2}{x}$的定义域为 $x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq 0$，而函数 $y=x$ 的定义域为 $x\in\mathbf{R}$，它们的定义域不同，所以函数 $y=\frac{x^2}{x}$与 $y=x$ 表示不同的函数关系.

（2）函数 $y=|x|$与 $y=\sqrt{x^2}$的定义域都是 $x\in\mathbf{R}$，而 $y=\sqrt{x^2}=|x|$，因此函数 $y=|x|$与 $y=\sqrt{x^2}$有相同的定义域和对应法则，所以函数 $y=|x|$与 $y=\sqrt{x^2}$表示相同的函数关系.

在函数的定义中，对每个 $x\in D$，对应的函数值 y 总是唯一的．若给定一个对应法则，按照这个法则，对每个 $x\in D$，总有确定的 y 值与之对应，但这个 y 不总是唯一的，那么这样的对应法则并不符合函数的定义，习惯上我们称这种法则确定了一个多值函数. 例如，设变量 x 和 y 之间的对应法则为 $x^2+y^2=r^2$，当 $x=r$ 或 $x=-r$ 时，对应 $y=0$ 一个值；当 x 取$(-r,r)$内任一个值时，对应的 y 有两个值．所以这个方程确定了一个多值函数．对于多值函数，若我们附加一些条件，使得在附加条件之下，按照对应法则，对每个 $x\in D$，总有唯一确定的实数值 y 与之对应，那么这样就确定了一个函数．我们称这样的函数为多值函数的单值分支.

表示一个函数通常有三种方法：图象表示法、表格表示法和公式表示法.

1. 图象表示法：就是用图象来表达函数关系. 这种方法直观性强并可观察函数的变化趋势，但根据函数图象所求出的函数值准确度不高且不便于理论研究.

2. 表格表示法：就是用表格来表达函数关系. 这种方法的优点是查找函数值比较方便，缺点是数据有限、不直观、不便于理论研究.

3. 公式表示法：就是用数学公式表达函数关系．例如 $y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^2$，这种方法的优点是形式简明，便于理论研究与数值计算，缺点是不如图象表示法直观.

由此可见，前面例 1 就是用图象表示法来表示一个函数；例 2 就是用表格表示法来表示一个函数；例 3 就是用公式表示法来表示一个函数.

在用公式法表示函数时，我们还会遇到下面几种情况：

（1）分段函数

在自变量的不同取值范围内，用不同的公式表示的函数，称为分段函数．如

$$f(x)=\begin{cases}x+1, & x<0,\\ x^2, & 0\leqslant x\leqslant 2,\\ \ln x, & 2<x\leqslant 5\end{cases}$$

就是一个定义在区间$(-\infty, 5]$上的分段函数.

(2) 用参数方程确定的函数

参数方程

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t) \end{cases} \quad (t\in I)$$

表示了变量 x 与 y 之间的函数关系，称为用参数方程确定的函数．例如，函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ $(x\in[-1, 1])$可以用参数方程

$$\begin{cases} x=\cos t, \\ y=\sin t \end{cases} \quad (0\leqslant t\leqslant \pi)$$

来表示.

(3) 隐函数

如果在方程 $F(x, y)=0$ 中，当 x 在某区间 I 内任意取定一个值时，相应地总有满足该方程的唯一的 y 值存在，则称方程 $F(x, y)=0$ 在区间 I 内确定了一个隐函数．例如，方程 $e^x+xy-1=0$ 就确定了变量 y 与变量 x 之间的函数关系.

注 能表示成 $y=f(x)$(其中 $f(x)$仅为 x 的解析式)的形式的函数，称为显函数．把一个隐函数化成显函数的过程，称为“隐函数的显化”. 例如 $e^x+xy-1=0$ 可以化成显函数 $y=\dfrac{1-e^x}{x}$. 但有些隐函数却不能化成显函数，例如 $e^x+xy-e^y=0$.

在实际问题中，函数的定义域与问题的实际意义有关．在数学中，有时候不考虑函数的实际意义，这时我们约定函数的定义域就是自变量所能取到的使函数有意义的一切实数，例如，函数 $y=\arcsin x$ 的定义域为$[-1, 1]$，函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$的定义域为$(-1, 1)$.

一般地，自变量 x 在定义域内任取一个数值时，对应的函数值是唯一的，这种函数我们称为单值函数，在以后的章节中若无特殊说明，函数都是指单值函数.

例 5 求 $y=\dfrac{\lg(x+1)}{x-1}$的定义域.

解 根据对数的真数必须为正数、分数的分母不能为零，可以得到该函数的定义域 D 满足不等式组

$$\begin{cases} x+1>0, \\ x-1\neq 0, \end{cases}$$

解得

$$x>-1 \text{ 且 } x\neq 1,$$

即

$$D=(-1, 1)\cup(1, +\infty).$$

例 6　求分段函数 $f(x)$的定义域和值域.

$$f(x)=\begin{cases}-x+1, & 0<x<1,\\ 0, & x=0,\\ -x-1, & -1\leqslant x<0.\end{cases}$$

解　如图 1-2 所示，$f(x)$的定义域为

$$D=\{x\mid -1\leqslant x<1\};$$

其值域为

$$W=\{f(x)\mid -1<f(x)<1\}.$$

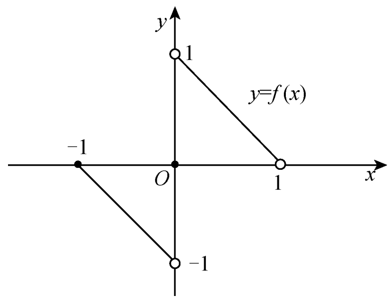


图 1-2

小结　函数由解析式给出时，其定义域是使解析式有意义的一切实数值. 为此，求函数的定义域时应遵循以下原则：

1. 在分式中分母不能为零；
2. 在偶次根式内被开方数非负；
3. 在对数中真数大于零；
4. 反三角函数 $\arcsin x$，$\arccos x$，要满足 $|x|\leqslant 1$；
5. 两函数和(差)的定义域，应是两函数定义域的公共部分；
6. 分段函数的定义域是各段定义域的并集；
7. 求复合函数的定义域时，一般是由外层向里层逐步求.

1.1.2　函数的几种特性

下面所讨论的函数的定义域都假设为 D.

1. 奇偶性

若函数 $f(x)$的定义域 D 关于原点对称，对于任意 $x\in D$ 都有 $f(-x)=f(x)$，则称函数 $f(x)$为偶函数；

若函数 $f(x)$的定义域 D 关于原点对称，对于任意 $x\in D$ 都有 $f(-x)=-f(x)$，则称函数 $f(x)$为奇函数.

注　(1)偶函数的图象关于 y 轴对称，奇函数的图象关于原点对称.

(2) 判断一个函数是奇函数还是偶函数，首先要看它的定义域是否关于原点对称，然后再来判断它的奇偶性.

例 7　判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$；　(2) $f(x)=\lg\dfrac{1-x}{1+x}$.

解　(1)函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$的定义域为 $D=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，关于原点对称. 任意取 $x\in D$，则 $-x\in D$，有

$$f(-x)=\frac{\sin(-x)}{-x}=\frac{\sin x}{x}=f(x),$$

所以 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ 是偶函数.

(2) 函数 $f(x)=\lg\frac{1-x}{1+x}$ 的定义域为 $D=(-1, 1)$，关于原点对称. 任意取 $x\in D$，则 $-x\in D$，有

$$f(-x)=\lg\frac{1+x}{1-x}=\lg\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-1}=-\lg\frac{1-x}{1+x}=-f(x),$$

所以 $f(x)=\lg\frac{1-x}{1+x}$ 是奇函数.

例 8 证明：如果函数 $f(x)$ 的定义域关于原点对称，那么

(1) $F_1(x)=f(x)+f(-x)$ 为偶函数；

(2) $F_2(x)=f(x)-f(-x)$ 为奇函数.

证 (1)因为 $F_1(-x)=f(-x)+f(x)=f(x)+f(-x)=F_1(x)$，所以 $F_1(x)=f(x)+f(-x)$ 是偶函数.

(2) 因为 $F_2(-x)=f(-x)-f(x)=-[f(x)-f(-x)]=-F_2(x)$，所以 $F_2(x)=f(x)-f(-x)$ 是奇函数.

2. 周期性

对于函数 $f(x)$，如果存在一个常数 $T\neq 0$，对任意 $x\in D$，有 $x+T\in D$，且 $f(x+T)=f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为周期函数，T 为函数的周期.

注 (1) 周期函数的周期 T，通常是指满足上述条件的最小正周期.

(2) 周期函数若以 T 为周期，则在每个长度为 T 的相邻区间上函数图象有相同的形状.

(3) 周期函数若以 T 为周期，则 nT($n\in\mathbf{Z}$ 且 $n\neq 0$)也是函数的周期.

例 9 求函数 $y=\cos 2x$ 的周期.

解 因为 $y(x+\pi)=\cos 2(x+\pi)=\cos(2x+2\pi)=\cos 2x$，所以说，函数 $y=\cos 2x$ 的周期是 π.

例 10 狄利克雷函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbf{Q},\\ 0, & x\in\mathbf{Q}^C,\end{cases}$$

容易验证这是一个周期函数，任何正有理数 r 都是它的周期. 因为不存在最小的正有理数，所以它没有最小正周期.

3. 单调性

区间 $I\subset D$，对于 I 内的任意两点 x_1，x_2，如果当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，

那么称函数 $f(x)$在区间 I 上是单调增加的；如果当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$在区间 I 上是单调减少的.

4. 有界性

对于函数 $f(x)$，在区间 $I\in D$ 内，若存在数 M_1，使得 $f(x)\leqslant M_1$ 对任意 $x\in I$ 均成立，则称 $f(x)$在区间 I 内有上界，而 M_1 称为函数 $f(x)$在 I 上的一个上界. 若存在数 M_2，使得 $f(x)\geqslant M_2$ 对任意 $x\in I$ 都成立，则称函数 $f(x)$在区间 I 内有下界，而 M_2 称为 $f(x)$在 I 上的一个下界.

若存在 $M>0$，使得

$$|f(x)|\leqslant M$$

对任意 $x\in I$ 都成立，则称函数 $f(x)$在 I 上有界. 若这样的 M 不存在，则称函数 $f(x)$在 I 上无界；这就是说，如果对于任意正数 M，总存在 $x_1\in I$，使 $|f(x_1)|>M$，那么函数 $f(x)$在 I 上无界.

例如，$y=\cos x$ 在 $x\in \mathbf{R}$ 内是有界函数(大于等于 1 的任何数都是它的上界，小于等于-1 的任何数都是它的下界)；$y=\dfrac{1}{x}$在 $x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq 0$ 内是无界函数.

例 11　证明函数 $y=\sin x$ 在$\left(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$上单调增加且有界.

证　令 $f(x)=\sin x$，任意取 x_1，$x_2\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$，不妨设 $x_1<x_2$，则

$$f(x_2)-f(x_1)=\sin x_2-\sin x_1=2\cos\frac{x_2+x_1}{2}\sin\frac{x_2-x_1}{2}.$$

因为 x_1，$x_2\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$，所以$\dfrac{x_2+x_1}{2}\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$.

于是

$$\cos\frac{x_2+x_1}{2}>0.$$

因为 $x_1<x_2$，所以$\dfrac{x_2-x_1}{2}\in\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$.

于是

$$\sin\frac{x_2-x_1}{2}>0,$$

所以

$$2\cos\frac{x_2+x_1}{2}\sin\frac{x_2-x_1}{2}>0,$$

即

$$f(x_2)>f(x_1),$$

所以，$y=\sin x$ 在$\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$上单调增加.

又因为$|y|=|\sin x|\leqslant 1$，所以 $y=\sin x$ 在$\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$上有界.

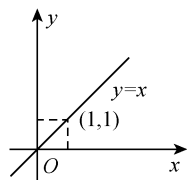
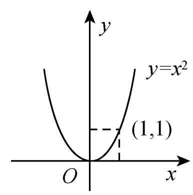
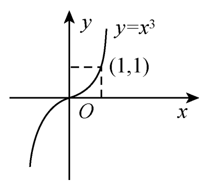
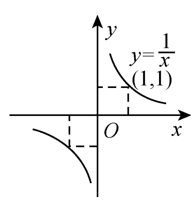
故函数 $y=\sin x$ 在$\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$上单调增加且有界.

1. 1. 3　基本初等函数

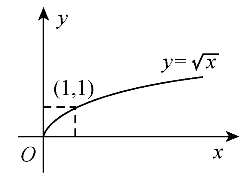
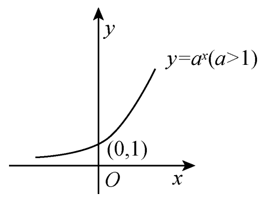
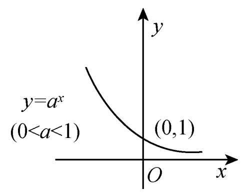
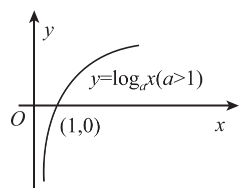
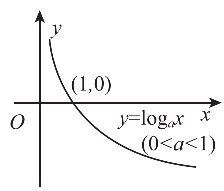
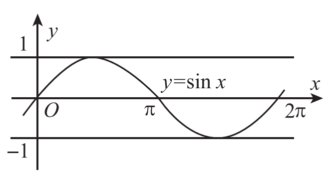
1. 基本初等函数

我们通常把幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为基本初等函数.它们的图象、特性如表 1-2 所示.

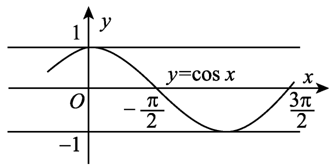
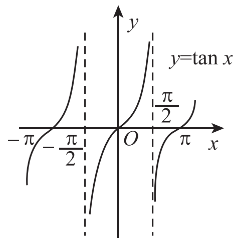
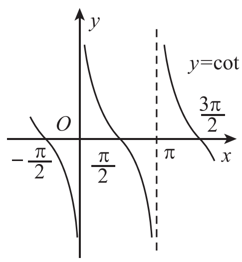
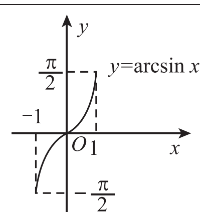
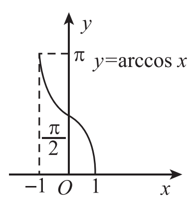
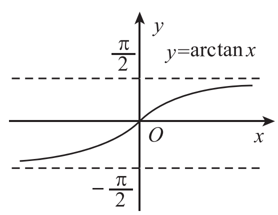
表 1-2

	函数	定义域与值域	图象	特性
幂函数	$y=x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数 单调增加
	$y=x^2$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[0,+\infty)$		偶函数 在$(-\infty,0)$内单调减少,在$(0,+\infty)$内单调增加
	$y=x^3$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数 单调增加
	$y=x^{-1}$	$x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$		奇函数 在$(-\infty,0)$,$(0,+\infty)$内单调减少

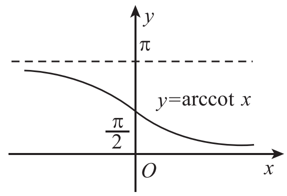
续表

	函数	定义域与值域	图象	特性
幂函数	$y=x^{\frac{1}{2}}$	$x\in[0,+\infty)$ $y\in[0,+\infty)$		单调增加
指数函数	$y=a^x$ $(a>1)$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		单调增加
	$y=a^x$ $(0<a<1)$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		单调减少
对数函数	$y=\log_a x$ $(a>1)$	$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		单调增加
	$y=\log_a x$ $(0<a<1)$	$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		单调减少
三角函数	$y=\sin x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		奇函数，周期为 2π，有界，在 $\left(2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)(k\in\mathbf{Z})$ 内单调增加，在 $\left(2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right)(k\in\mathbf{Z})$ 内单调减少

续表

	函数	定义域与值域	图象	特性
三角函数	$y=\cos x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		偶函数，周期为 2π，有界，在 $(2k\pi,2k\pi+\pi)$ $(k\in\mathbf{Z})$ 内单调减少，在 $(2k\pi+\pi,2k\pi+2\pi)$ $(k\in\mathbf{Z})$ 内单调增加
	$y=\tan x$	$x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，周期为 π，在 $\left(k\pi-\dfrac{\pi}{2},k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内单调增加
	$y=\cot x$	$x\neq k\pi(k\in\mathbf{Z})$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，周期为 π，在 $(k\pi,k\pi+\pi)$ 内单调减少
反三角函数	$y=\arcsin x$	$x\in[-1,1]$ $y\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$		奇函数，单调增加，有界
	$y=\arccos x$	$x\in[-1,1]$ $y\in[0,\pi]$		单调减少，有界
	$y=\arctan x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$		奇函数，单调增加，有界

续表

	函数	定义域与值域	图象	特性
反三角函数	$y=\operatorname{arccot} x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,\pi)$		单调减少，有界

2. 复合函数

先看一个例子，设 $y=\sin u$，$u=x^2$，对任意 $x\in\mathbf{R}$ 有 $u=x^2\in[0,+\infty)$，又通过 $y=\sin u$，得到 $y=\sin x^2\in[-1,1]$，即通过中间变量 u，从而构成 y 是 x 的函数，于是称 $y=\sin x^2$ 是 $y=\sin u$ 和 $u=x^2$ 的复合函数.

定义 1.2　设有两个函数 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$，且 $\varphi(x)$的值域与 $f(u)$的定义域相交非空，那么 y 通过 u 的作用成为 x 的函数，于是我们称 $y=f(\varphi(x))$是由函数 $y=f(u)$及函数 $u=\varphi(x)$复合而成的复合函数，u 称为中间变量.

如自由落体运动的物体，其动能 $E=\dfrac{1}{2}mv^2$ 及速度 $v=gt$，于是它们所构成的复合函数是 $E=\dfrac{1}{2}mg^2t^2$.

例 12　设 $f(x)=x^3-x$，$\varphi(x)=\sin 2x$，求 $f(\varphi(x))$和 $\varphi(f(x))$.

解　由复合函数的定义知

$$f(\varphi(x))=(\sin 2x)^3-\sin 2x,$$
$$\varphi(f(x))=\sin 2(x^3-x).$$

例 13　设 $f(x)=\begin{cases}2x+3, & x\leqslant 0,\\ 2^x, & x>0,\end{cases}$ 求 $f(-1)$，$f(0)$及 $f(f(-1))$.

解　$f(-1)=2\times(-1)+3=1$；

$f(0)=2\times 0+3=3$；

$f(f(-1))=f(1)=2^1=2$.

1.1.4　初等函数

定义 1.3　由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合步骤所构成的且可用一个式子表示的函数，称为初等函数.

例如 $y=2x^2-1$，$y=\sin\dfrac{1}{x}$，$y=|x|=\sqrt{x^2}$ 等都是初等函数. 高等数学中讨论的函数绝大多数都是初等函数．但需要注意的是，分段函数一般不是初等函数.

例 14 将下列复合函数分解成基本初等函数或简单初等函数：

（1）$y=\arcsin(\ln x)$；

（2）$y=\sin^2\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$；

（3）$y=\ln(\tan e^{x^2+2\sin x})$.

解 （1）外层是反正弦函数，即 $y=\arcsin u$，内层是对数函数，即 $u=\ln x$，所以分解得 $y=\arcsin u$，$u=\ln x$；

（2）最外层是幂函数，即 $y=u^2$，次外层是正弦函数，即 $u=\sin v$，从外向里第三层是幂函数，即 $v=w^{-\frac{1}{2}}$，最里层是多项式函数，即 $w=x^2+1$. 所以，分解得 $y=u^2$，$u=\sin v$，$v=w^{-\frac{1}{2}}$，$w=x^2+1$；

（3）最外层是对数函数，即 $y=\ln u$，次外层是正切函数，即 $u=\tan v$，从外向里第三层是指数函数，即 $v=e^w$，最里层是简单初等函数，即 $w=x^2+2\sin x$. 所以，分解得 $y=\ln u$，$u=\tan v$，$v=e^w$，$w=x^2+2\sin x$.

注 （1）并不是任意两个函数都可以复合成一个复合函数. 如 $y=\sqrt{u-2}$，$u=\sin x$ 在实数范围内就不能进行复合. 这是因为 $u=\sin x$ 在其定义域 $(-\infty,+\infty)$ 中任何 x 的值对应的 u 值都小于 2，它们都不能使 $y=\sqrt{u-2}$ 有意义. 即两个函数能复合的充要条件是：$y=f(u)$，$u=\varphi(x)$ 且内函数 $u=\varphi(x)$ 的值域与外函数 $y=f(u)$ 的定义域相交非空.

（2）复合函数的复合过程是由里到外，函数“套”函数而成的；分解复合函数时，是采取由外到内层层分解的办法，拆分成若干基本初等函数或基本初等函数的四则运算的函数(简单初等函数).

习题 1.1

1. 求下列函数的值.

（1）设 $f(x)=e^{\sin x^2}$，求：$f(0)$，$f\left(\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\right)$，$f(f(0))$.

（2）设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0,\\ x-4, & x>0,\end{cases}$ 求：$f(0)$，$f(-1)$，$f(2)$，$f(f(e+2))$.

2. 下列函数是否相同，为什么？

（1）$f(x)=\dfrac{x}{x}$，$g(x)=1$；

（2）$f(x)=|x|$，$g(x)=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0;\end{cases}$

（3）$f(x)=x+1$，$g(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$.

3. 判断下列函数的奇偶性：

(1) $y=\sin x\cos x$；　　(2) $y=\dfrac{3^x+3^{-x}}{2}$；

(3) $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$；　　(4) $y=\dfrac{1+x}{1-x}$.

4. 设 $f(x)=1-x^2$，$\varphi(x)=\cos x$，求：$f(\varphi(x))$和 $\varphi(f(x))$.

5. 写出下列各函数的复合过程：

(1) $y=\arctan x^2$；　　(2) $y=\mathrm{e}^{\cos^2 x}$；

(3) $y=(1+\ln x)^3$；　　(4) $y=\dfrac{\ln\sqrt{(x+\sin x)}}{\mathrm{e}^x}$.

6. 讨论函数 $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$的单调性.

7. 设函数 $f(x)$是以 $T(T>0)$为周期的周期函数，试证明 $f(ax)(a>0)$是以$\dfrac{T}{a}$为周期的周期函数.

8. 设函数 $f(x)$在数集 X 上有定义，试证：函数 $f(x)$在 X 上有界的充分必要条件是它在 X 上既有上界又有下界.

9. 已知华氏温度(用 F 表示)和摄氏温度(用 C 表示)的转换公式为 $F=1.8C+32$.

(1) 求 90 ℉的等价摄氏温度和-5 ℃的等价华氏温度；

(2) 是否存在一个温度值，使华氏温度计和摄氏温度计的读数是一样的？如果存在，那么该温度值是多少？

1.2 函数的极限

函数概念刻画了变量之间的关系，而极限概念着重刻画了变量的变化趋势．极限是学习微积分的基础和工具.

1.2.1 数列的极限

先说明数列的概念．如果按照某一法则，对每个 $n\in\mathbf{N}_+$，对应着一个确定的实数 x_n，那么这些实数 x_n 按照下标 n 从小到大排列得到的一个序列

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_n,$$

就叫作数列，简记为数列$\{x_n\}$.

数列中的每一个数叫作数列的项，第 n 项 x_n 叫作数列的一般项.

数列 x_1，x_2，$\cdots$，x_n，可以看作自变量为正整数的函数 $f(n)$，其中 $f(n)=x_n$，因

此，数列的极限是一类特殊函数的极限，为了便于学习函数极限，我们先给出数列极限的定义.

定义 1.4 设$\{x_n\}$为一数列，如果存在常数 a，对于任意给定的正数ε(不论它多么小)，总存在正整数 N，使得当 $n>N$ 时，不等式

$$|x_n-a|<\varepsilon$$

都成立，那么就称常数 a 是数列$\{x_n\}$的极限，或者称数列$\{x_n\}$收敛于 a，记作

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a \text{ 或 } x_n\to a\ (n\to\infty),$$

其中上式中的“$\to$”读作“趋于”，并称数列$\{x_n\}$是收敛的；若数列$\{x_n\}$没有极限，则称数列$\{x_n\}$是发散的.

注 上面定义中的正数ε可以任意给定，因为只有这样，不等式$|x_n-a|<\varepsilon$才能表达出 x_n 无限接近 a 的意思．此外还应注意到，定义中的正整数 N 是与任意给定的正数ε有关的，它随着ε的给定而选定.

我们给“数列$\{x_n\}$的极限为 a”一个几何解释.

将常数 a 及数列 x_1，x_2，…，x_n，…在数轴上用它们对应的点表示出来，再在数轴上作点 a 的ε邻域，即开区间$(a-\varepsilon，a+\varepsilon)$.

因为不等式$|x_n-a|<\varepsilon$与不等式$a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon$等价，所以当 $n>N$ 时，所有的点 x_n 都落在$(a-\varepsilon，a+\varepsilon)$内，而只有有限个(至多只有 N 个)在这区间以外.

为了表达方便，引入符号“$\forall$”表示“对于任意给定的”或“对于每一个”，符号“$\exists$”表示“存在”．于是，“对于任意给定的$\varepsilon>0$”写成“$\forall\varepsilon>0$”，“存在正整数 N”写成“$\exists$正整数 N”，数列极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 的定义可表达为

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0，\exists\text{正整数 }N，\text{当 }n>N\text{ 时，有}|x_n-a|<\varepsilon.$$

现在举几个说明数列极限概念的例子.

例 1 利用数列极限的定义，证明数列 $2，\frac{1}{2}，\frac{4}{3}，\frac{3}{4}，\cdots，1+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}，\cdots$ 的极限是 1.

证 $|x_n-a|=\frac{1}{n}$，为了使$|x_n-a|$小于任意给定的正数ε，只要

$$\frac{1}{n}<\varepsilon \text{ 或 } n>\frac{1}{\varepsilon},$$

所以$\forall\varepsilon>0$，取正整数 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$，当 $n>N$ 时，就有

$$\left|1+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}-1\right|<\varepsilon,$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\left[1+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right]=1.$$

例 2 已知 $x_n=\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$，证明数列$\{x_n\}$的极限是 0.

证 $|x_n-a|=\frac{1}{(n+1)^2}<\frac{1}{(n+1)}$，

$\forall \varepsilon>0$，只要

$$\frac{1}{n+1}<\varepsilon \text{ 或 } n>\frac{1}{\varepsilon}-1,$$

不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$ 必定成立，所以取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}-1\right]+1$，则当 $n>N$ 时就有

$$\left|\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}-0\right|<\varepsilon,$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}=0.$$

注 在利用数列极限的定义来论证某个数 a 是数列$\{x_n\}$的极限时，重要的是对于任意给定的正数ε，要能够指出定义中所说的这种正整数 N 确实存在，但没有必要去求最小的 N. 如果知道 $|x_n-a|$ 小于某个量(这个量与 n 存在函数关系)，那么当这个量小于ε 时，$|x_n-a|<\varepsilon$ 当然也成立. 若令这个量小于ε 能推出 N 必定存在，就可采用这种方法. 例 2 便是这样做的.

在数列$\{x_n\}$中任意抽取无限多项并保持这些项在原数列$\{x_n\}$中的先后次序，这样得到的一个数列称为原数列$\{x_n\}$的子数列(或子列).

设在数列$\{x_n\}$中，第一次抽取 x_{n_1}，第二次在 x_{n_1} 后抽取 x_{n_2}，第三次在 x_{n_2} 后抽取 x_{n_3}……这样无休止地抽取下去，得到一个数列

$$x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots, x_{n_k}, \cdots,$$

这个数列$\{x_{n_k}\}$即是数列$\{x_n\}$的一个子数列.

注 在子数列$\{x_{n_k}\}$中，一般项 x_{n_k} 是第 k 项，而 x_{n_k} 在原数列$\{x_n\}$中却是第 n_k 项. 显然，$n_k\geqslant k$.

1.2.2　函数的极限

数列是定义于正整数集合上的函数，现在我们讨论定义于实数集合上的函数 $y=f(x)$ 的极限. 我们根据自变量不同的变化趋势，分别给出函数极限的定义.

1. 当 $x\to\infty$ 时，函数的极限

由反比例函数 $y=\frac{1}{x}$的图象(见图 1-3)可以看出，x 轴是曲线的一条渐近线，也就是说当自变量 x 的绝对值无限增大时，相应的函数值 y 无限逼近常数 0，我们就说：当 $x\to\infty$时，函数 $y=\frac{1}{x}$的极限是 0.

由此我们给出当 $x\to\infty$ 时，函数极限的定义.

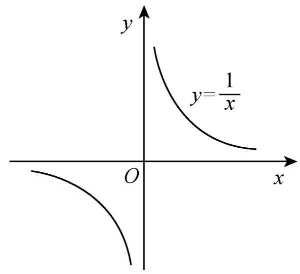


图 1-3

定义 1.5 设函数 $f(x)$ 当 $|x|$ 大于某一正数时有定义，如果存在常数 A，对于任意给定的正数 ε（不论它多么小），总存在着正数 X，使得当 x 满足不等式 $|x|>X$ 时，对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

那么称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限，记作

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to\infty).$$

上述定义可简单表示为：

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$，$\exists X>0$，当 $|x|>X$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

从几何上来讲，$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 的意义是：任意给定正数 ε，作直线 $y=A-\varepsilon$ 和 $y=A+\varepsilon$，则总有一个正数 X 存在，使得当 $x<-X$ 或 $x>X$ 时，函数 $y=f(x)$ 的图形位于这两直线之间. 这时，直线 $y=A$ 是函数 $y=f(x)$ 的图象的水平渐近线.

例 3 证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

证 $\forall\varepsilon>0$，要证 $\exists X>0$，当 $|x|>X$ 时，不等式 $\left|\dfrac{1}{x}-0\right|<\varepsilon$ 成立，因这个不等式相当于

$$|x|>\frac{1}{\varepsilon} \text{或} \left|\frac{1}{x}\right|<\varepsilon,$$

由此可知，如果取 $X=\dfrac{1}{\varepsilon}$，那么当 $|x|>X$ 时，就有 $\left|\dfrac{1}{x}-0\right|<\varepsilon$ 成立，这就证明了

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0.$$

2. 当 $x\to+\infty$ 或 $x\to-\infty$ 时，函数 $f(x)$ 的极限

有时我们还需要区分 x 趋于无穷大的符号，如果 x 从某一时刻起，往右总是取正值且无限增大，则称 x 趋于正无穷大，记作 $x\to+\infty$，此时定义中，$|x|>X$ 可改写成 $x>X$，就可得 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 的定义；如果 x 从某一时刻起，往左总取负值且 $|x|$ 无限增大，则称 x 趋于负无穷大，记作 $x\to-\infty$，此时定义中的 $|x|>X$ 可改写成 $x<-X$，同样可得 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$ 的定义.

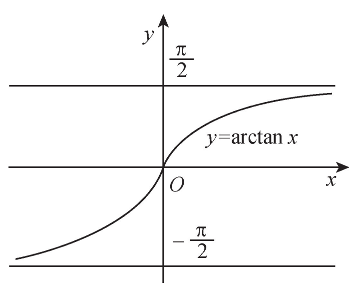


图 1-4

我们考察反正切函数 $f(x)=\arctan x$ 的图象，如图 1-4 所示.

从图 1-4 可以看出，当 $x\to+\infty$ 时，函数 $f(x)=$

$\arctan x$ 的值无限逼近于常数$\frac{\pi}{2}$；而当 $x \to -\infty$时，函数 $f(x)=\arctan x$ 的值无限逼近于常数$-\frac{\pi}{2}$.

当 $x\to\infty$时，由函数 $f(x)$的极限的定义，得到下面的定理.

定理 1.1　$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$ 的充分必要条件是

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} f(x)=A.$$

例 4　求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty} \arctan x$；　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^2}$.

解　(1) 因为

$$\lim_{x\to-\infty} \arctan x=-\frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x\to+\infty} \arctan x=\frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x\to-\infty} \arctan x\neq\lim_{x\to+\infty} \arctan x,$$

所以，由定理 1.1 可知$\lim\limits_{x\to\infty} \arctan x$ 不存在.

(2) 因为

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2}=\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2}=0,$$

所以

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2}=0.$$

3. 当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$的极限

下面我们考察函数 $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$当 $x\to1$ 时函数值的变化情况，如图 1-5 所示.

由图 1-5 可以看出，当 x 从 1 的左、右两侧同时趋近于 1 时，$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$的值无限逼近常数 2，对于函数的这种变化趋势，有下面的定义：

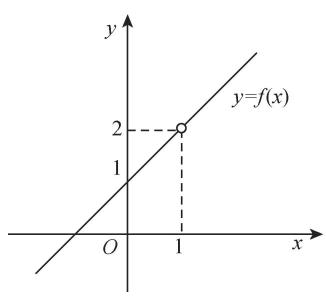


图 1-5

定义 1.6　设函数 $f(x)$在点 x_0 的某一去心邻域内有定义，如果存在常数 A，对于任意给定的正数ε（不论它多么小），总存在正数δ，使得当自变量 x 满足不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，对应的函数值 $f(x)$都满足不等式

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

那么称 A 为函数 $f(x)$当 $x\to x_0$ 时的极限，记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A\ (x\to x_0).$$

根据定义 1.6，上面的极限可记为：$\lim\limits_{x\to1} \frac{x^2-1}{x-1}=2$.

注 (1)极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$表示的是当自变量$x$与$x_0$无限接近($x\neq x_0$)时，相应的函数值$f(x)$的一种变化趋势：无限逼近常数$A$，或者换个说法，当$|x-x_0|$趋近0时，有$|f(x)-A|$无限逼近0. 因此，在讨论$x\to x_0$时，函数$f(x)$的极限取决于$x_0$邻近的$x(x\neq x_0)$处的函数值$f(x)$，而与$x=x_0$时$f(x)$是否有定义或怎样定义无关.

(2) 从几何上来讲，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$的意义是：任意给定正数$\varepsilon$，作直线$y=A-\varepsilon$和$y=A+\varepsilon$，介于两直线之间的是一横条区域．根据定义，对于给定的ε，存在点x_0的一个δ邻域$(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$，当$y=f(x)$的图象上的点的横坐标$x$在邻域$(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$内，但$x\neq x_0$时，这些点的纵坐标$f(x)$满足不等式

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

或

$$A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon.$$

亦即这些点落在上面所作的横条区域内.

例 5 证明$\lim\limits_{x\to x_0}c=c$.

证 这里$|f(x)-A|=|c-c|=0$，因此$\forall$正数ε，可任取正数δ，当$0<|x-x_0|<\delta$时，能使不等式

$$|f(x)-A|=|c-c|=0<\varepsilon$$

成立．所以$\lim\limits_{x\to x_0}c=c$.

例 6 证明$\lim\limits_{x\to 1}(2x-1)=1$.

证 由于

$$|f(x)-A|=|(2x-1)-1|=2|x-1|,$$

为了使$|f(x)-A|<\varepsilon$，只要

$$|x-1|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

所以，$\forall\varepsilon>0$，可取$\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$，则当$x$适合不等式$0<|x-1|<\delta$时，对应的函数值$f(x)$就满足不等式

$$|f(x)-1|=|(2x-1)-1|=2|x-1|<\varepsilon,$$

从而

$$\lim_{x\to 1}(2x-1)=1.$$

4. 当 $x\to x_0^-$ 或 $x\to x_0^+$ 时，函数 $f(x)$ 的左极限与右极限

有时候，我们需要考虑x只从x_0的左侧趋近于x_0(记作$x\to x_0^-$)，或x只从x_0右侧趋近于x_0(记作$x\to x_0^+$)时，函数值的变化趋势，由此，我们给出当$x\to x_0^-$或$x\to x_0^+$时，函数单侧极限的定义：

定义 1.7 设在x_0的某个左半邻域$(x_0-\delta,\ x_0)$(或者右半邻域$(x_0,\ x_0+\delta)$)内函数

$f(x)$有定义，如果存在常数 A，对于任意给定的正数ε（不论它多么小），总存在正数 δ，使得当 x 满足不等式 $x_0-\delta<x<x_0$（或者 $x_0<x<x_0+\delta$）时，对应的函数值 $f(x)$都满足不等式

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称 A 为函数 $f(x)$在 x_0 处的左极限（或右极限），记作

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=A\text{（或}\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A\text{）},$$

左极限与右极限统称为单侧极限.

定理 1.2　$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 的充分必要条件是

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A.$$

例 7　设函数

$$f(x)=\begin{cases} x+2, & -\infty<x<0, \\ x, & 0\leqslant x<1, \\ (x-1)^2+1, & 1\leqslant x<+\infty, \end{cases}$$

试分别讨论当 $x\to0$ 和 $x\to1$ 时，$f(x)$的极限.

解　容易得出

$$\lim_{x\to0^-} f(x)=\lim_{x\to0^-}(x+2)=2,$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+} x=0,$$

因为 $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)\neq\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$，所以由定理 1.2 知，$\lim\limits_{x\to0} f(x)$不存在；

同理

$$\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^-} x=1,$$

$$\lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1^+}[(x-1)^2+1]=1,$$

因为 $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=1$，所以由定理 1.2 知，$x\to1$ 时，$f(x)$的极限存在且有$\lim\limits_{x\to1} f(x)=1$.

5. 函数极限的性质

由于函数极限的定义按自变量的变化过程不同有各种形式，下面仅以“$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$”这种形式为代表给出关于极限的一些性质，并就其中几个给出证明.

性质 1　（函数极限的唯一性）如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在，那么这极限唯一.

性质 2　（函数极限的局部有界性）如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，那么存在常数 $M>0$ 和 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有$|f(x)|\leqslant M$.

证　因为 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，所以取$\varepsilon=1$，则$\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有

$$|f(x)-A|<1 \Rightarrow |f(x)| \leqslant |f(x)-A|+|A|<|A|+1.$$

记 $M=|A|+1$，则性质 2 获得证明.

性质 3 （函数极限的局部保号性）如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，且 $A>0$（或 $A<0$），那么存在常数 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $f(x)>0$（或 $f(x)<0$）.

证 就 $A>0$ 的情形证明.

因为 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A>0$，所以，取 $\varepsilon=\dfrac{A}{2}>0$，则 $\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有

$$|f(x)-A|<\frac{A}{2} \Rightarrow f(x)>A-\frac{A}{2}=\frac{A}{2}>0,$$

类似地，可以证明 $A<0$ 的情形.

从性质 3 的证明中可知，在性质 3 的条件下，可得下面更强的结论：

性质 3′ 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A\ (A\neq 0)$，那么就存在着 x_0 的某一去心邻域 $\mathring{U}(x_0)$，当 $x\in\mathring{U}(x_0)$ 时，就有 $|f(x)|>\dfrac{|A|}{2}$.

由性质 3，可得以下推论：

推论 如果在 x_0 的某一去心邻域内 $f(x)\geqslant 0$（或 $f(x)\leqslant 0$），而且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，那么 $A\geqslant 0$（或 $A\leqslant 0$）.

习题 1.2

1. 通过观察下列数列的变化趋势，对收敛数列写出它们的极限：

(1) $x_n=\dfrac{n+1}{n-1}$；　(2) $x_n=\dfrac{2}{n^2}$；　(3) $x_n=(-1)^n\dfrac{n}{n^2+1}$；

(4) $x_n=\dfrac{3}{3^n}$；　(5) $x_n=(-1)^n$.

2. 根据数列极限的定义证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}=0$；　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+1}{2n+1}=\dfrac{3}{2}$.

3. 设数列 $\{x_n\}$ 有界，又 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=0$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n=0$.

4. 写出下列函数的极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 1}(x^2+2)$；　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3}{x^2}$；　(3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\sin x$；

(4) $\lim\limits_{x\to \mathrm{e}}\ln x$；　(5) $\lim\limits_{x\to+\infty}3^{-x}$.

5. 根据函数极限的定义证明：

(1) $\lim\limits_{x\to 1}(x^2+5)=6$；　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6}{x^2}=0$.

6. 设函数 $f(x)=|x|$，画出它的图象，并讨论：当 $x\to 0$ 时，该函数的极限是否存在.

7. 设函数 $f(x)$的表达式为

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & x<2, \\ 0, & x=2, \\ (x-1)^2+2, & x>2. \end{cases}$$

证明：函数 $f(x)$在 $x\to 2$ 时极限不存在.

8. 设函数

$$h(x)=\begin{cases} e^x, & x<0, \\ 1, & x=0, \\ \cos x, & x>0. \end{cases}$$

(1) 求 $h(x)$在 $x\to 0$ 时的左、右极限.

(2) 求$\lim\limits_{x\to 0} h(x)$.

1.3 无穷小量与无穷大量

1.3.1 无穷小量

1. 无穷小量的定义

定义 1.8 在某个变化过程中，极限为 0 的变量称为无穷小量，简称无穷小.

特别地，以 0 为极限的数列$\{x_n\}$称为 $n\to\infty$时的无穷小.

由定义可知，当 $x\to 0$ 时，x，$\tan x$ 等都是无穷小；当 $x\to\infty$时，$\dfrac{1}{x}$，$\dfrac{1}{x^2}$等也是无穷小.

注 (1) 0 是唯一可以看作是无穷小的常数.

(2) 不要把无穷小与很小的数混为一谈. 因为无穷小是这样的函数，在 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)的过程中，该函数的绝对值小于任意给定的正数 ε，而很小的数如百万分之一，就不能小于任意给定的正数 ε(如千万分之一).

(3) 一般来说，无穷小是相对于自变量的某个变化趋势而言的.

例如，函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$当 $x\to\infty$时为无穷小，但当 $x\to 1$ 时它不是无穷小.

例 1 自变量 x 在怎样的变化过程中，下列函数为无穷小?

(1) $y=\dfrac{1}{2x-1}$；　　(2) $y=2x-4$；　　(3) $y=a^x(a>0,\ a\neq 1)$.

解 (1) 因为$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{2x-1}=0$，所以当$x\to\infty$时，$\dfrac{1}{2x-1}$为无穷小.

(2) 因为$\lim\limits_{x\to 2}(2x-4)=0$，所以当$x\to 2$时，$2x-4$为无穷小.

(3) 若$a>1$，则当$x\to-\infty$时，a^x是无穷小；若$0<a<1$，则当$x\to+\infty$时，a^x是无穷小.

2. 极限与无穷小之间的关系

定理 1.3 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$的充要条件是$f(x)=A+\alpha(x)$，其中$\alpha(x)$当$x\to x_0$时为无穷小.

证 先证必要性．设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使当$0<|x-x_0|<\delta$时，有

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

令$\alpha(x)=f(x)-A$，则$\alpha(x)$是当$x\to x_0$时的无穷小，且

$$f(x)=A+\alpha(x),$$

这就证明了$f(x)$等于它的极限A与一个无穷小$\alpha(x)$之和.

再证充分性．设$f(x)=A+\alpha(x)$，其中A是常数，$\alpha(x)$是当$x\to x_0$时的无穷小，于是$|f(x)-A|=|\alpha(x)|$，因为$\alpha(x)$是当$x\to x_0$时的无穷小，所以$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使当$0<|x-x_0|<\delta$时，有

$$|\alpha(x)|<\varepsilon,$$

即

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

这就证明了A是$f(x)$当$x\to x_0$时的极限.

注 定理1.3中自变量的变化过程换成其他任何一种情形$x\to 0^+$，$x\to 0^-$，$x\to\infty$，$x\to+\infty$，$x\to-\infty$，结论仍成立.

3. 无穷小量的性质

对于无穷小量，它们具有如下的性质：

性质 1 有限个无穷小的代数和还是无穷小.

证 考虑两个无穷小的和.

设α，β是当$x\to x_0$时的两个无穷小，而

$$\gamma=\alpha+\beta.$$

因为α是$x\to x_0$时的无穷小，所以$\forall\varepsilon>0$，有$\dfrac{\varepsilon}{2}>0$，$\exists\delta_1>0$，当$0<|x-x_0|<\delta_1$时，不等式

$$|\alpha|<\frac{\varepsilon}{2}$$

成立．因为 β 是 $x\to x_0$ 时的无穷小，所以 $\forall\ \frac{\varepsilon}{2}>0$，$\exists\,\delta_2>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta_2$ 时，不等式

$$|\beta|<\frac{\varepsilon}{2}$$

成立．取 $\delta=\min\{\delta_1,\ \delta_2\}$，则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，

$$|\alpha|<\frac{\varepsilon}{2},\quad |\beta|<\frac{\varepsilon}{2}$$

同时成立，从而 $|\gamma|=|\alpha+\beta|\leqslant|\alpha|+|\beta|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$．这就证明了 γ 也是 $x\to x_0$ 时的无穷小．

有限个无穷小之和的情形可以同样证明．

性质 2　有界量与无穷小的乘积还是无穷小．

证　设函数 u 在 x_0 的某一去心邻域 $\mathring{U}(x_0,\ \delta_1)$ 内是有界的，即 $\exists\,M>0$ 使 $|u|\leqslant M$ 对一切 $x\in\mathring{U}(x_0,\ \delta_1)$ 成立．又设 α 是当 $x\to x_0$ 时的无穷小，即 $\forall\,\varepsilon>0$，$\exists\,\delta_2>0$，使当 $0<|x-x_0|<\delta_2$，即 $x\in\mathring{U}(x_0,\ \delta_2)$ 时，有

$$|\alpha|<\frac{\varepsilon}{M},$$

取 $\delta=\min\{\delta_1,\ \delta_2\}$，则当 $x\in\mathring{U}(x_0,\ \delta)$ 时，

$$|u|\leqslant M,\quad |\alpha|<\frac{\varepsilon}{M}$$

同时成立．从而

$$|u\alpha|=|u|\,|\alpha|<M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon.$$

这就证明了 $u\alpha$ 是当 $x\to x_0$ 时的无穷小．

推论　常数与无穷小的乘积还是无穷小．

性质 3　有限个无穷小的乘积还是无穷小．

注　(1)无穷多个无穷小的和未必是无穷小．如 $x\to\infty$ 时，$\frac{1}{x^2}$，$\frac{2}{x^2}$，…，$\frac{x}{x^2}$，都是无穷小，但 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^2}+\cdots+\frac{x}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x(x+1)}{2x^2}=\frac{1}{2}$.

(2) 两个无穷小的商未必是无穷小．如 $x\to 0$ 时，x，$2x$，x^2 都是无穷小，由 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{x}=2$ 可

知，当 $x\to0$ 时，$\dfrac{2x}{x}$不是无穷小．但由$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{x}=0$ 可知，当 $x\to0$ 时，$\dfrac{x^2}{x}$是无穷小.

例 2 求极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\tan\dfrac{1}{x}+\sin\dfrac{1}{x}+e^{-x^2}\right)$.

解 当 $x\to\infty$时 $\tan\dfrac{1}{x}$，$\sin\dfrac{1}{x}$和 e^{-x^2} 都是无穷小，所以由性质 1 可得

$$\lim_{x\to\infty}\left(\tan\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x}+e^{-x^2}\right)=0.$$

例 3 已知$\lim\limits_{x\to0}g(x)=0$，求极限$\lim\limits_{x\to0}\left[g(x)\sin\dfrac{1}{x}\right]$.

解 因为$\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqslant1$，所以 $\sin\dfrac{1}{x}$是有界函数，并且$\lim\limits_{x\to0}g(x)=0$，由性质 2 可得

$$\lim_{x\to0}\left[g(x)\sin\frac{1}{x}\right]=0.$$

4. 无穷小量的比较

定义 1.9 设当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$和 $g(x)$都是无穷小.

(1) 若$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$，则称 $f(x)$是 $g(x)$的高阶无穷小(也称 $g(x)$为 $f(x)$的低阶无穷小)，记作 $f(x)=o(g(x))(x\to x_0)$；

(2) 若$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=C(C\neq0$ 且为常数)，则称 $f(x)$是 $g(x)$的同阶无穷小；

(3) 若$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g^k(x)}=C(C\neq0$ 且为常数，$k>0)$，则称 $f(x)$是 $g(x)$的 k 阶无穷小；

(4) 特别地，若$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$，则称 $f(x)$和 $g(x)$是等价的无穷小，记作 $f(x)\sim g(x)(x\to x_0)$.

关于等价无穷小我们有如下的定理，此定理在极限的计算中经常会遇到.

定理 1.4 设 $f(x)\sim\alpha(x)$，$g(x)\sim\beta(x)$．当 $x\to x_0$ 时，$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$存在，则有

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}.$$

有下列几组等价无穷小：

$\sin x\sim x(x\to0)$；$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2(x\to0)$；$\tan x\sim x(x\to0)$；$\sqrt{1+x}-1\sim\dfrac{1}{2}x(x\to0)$；$e^x-1\sim x(x\to0)$；$\ln(1+x)\sim x(x\to0)$.

在求极限时，利用等价无穷小的性质，分子分母的无穷小因子可用它们相应的等价无穷小代换，从而达到简化计算的目的，这种方法叫作等价无穷小代换法.

例 4　利用等价无穷小代换法求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{-x}-1}{x}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$.

解　(1)因为当 $x\to0$ 时，$e^{-x}-1\sim-x$，所以有

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{-x}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{-x}{x}=-1.$$

(2) 因为 $\tan x-\sin x=\tan x(1-\cos x)$，当 $x\to0$ 时，$\tan x\sim x$，$1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$，所以

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{x\cdot\frac{x^2}{2}}{x^3}=\frac{1}{2}.$$

注　在进行等价无穷小的代换时，只能对分子或分母整体进行代换，不能对分子或分母的加减项用等价无穷小代换.

例 5　比较下列各组无穷小的阶.

(1) 当 $x\to0$ 时，$\sin x$ 与 $\tan x$；　　(2) 当 $x\to+\infty$时，e^{-x} 与 2^{-x}；

(3) 当 $x\to0$ 时，$1-\cos x$ 与 x.

解　(1) 因为$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{\tan x}=\lim\limits_{x\to0}\cos x=1$，所以，当 $x\to0$ 时，$\sin x$ 和 $\tan x$ 是等价无穷小.

(2) 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{-x}}{2^{-x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e}{2}\right)^{-x}=0$，所以，当 $x\to+\infty$时，e^{-x} 是 2^{-x} 的高阶无穷小.

(3) 因为$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$，所以，当 $x\to0$ 时，$1-\cos x$ 是 x 的二阶无穷小.

1.3.2　无穷大量

定义 1.10　设函数 $f(x)$在 x_0 的某一去心邻域内有定义(或$|x|$大于某一正数时有定义). 如果对于任意给定的正数 M(不论它多么大)，总存在正数 δ(或正数 X)，只要 x 适合不等式 $0<|x-x_0|<\delta$(或$|x|>X$)，对应的函数值 $f(x)$总满足不等式

$$|f(x)|>M,$$

那么称函数 $f(x)$为当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的无穷大.

例如，函数 $f(x)$是 $x\to x_0$ 时的无穷大，记作$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$；函数 $f(x)$是 $x\to\infty$时的正无穷大，记作$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=+\infty$；函数 $f(x)$是 $x\to x_0^+$ 时的负无穷大，记作 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=-\infty$.

注　(1)无穷大量必定是变量，绝对值再大的常数也不是无穷大量；

(2) 无穷大量是极限不存在的一种情形，我们只是借用极限的符号$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$，表

示“当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$是无穷大量”；

（3）无穷大量和无界量是两个不同的概念，无穷大量必定是无界量，但是无界量未必是无穷大量，如 $y=x\sin x$（当 $x\to\infty$时）.

例 6 证明$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}=\infty$.

证 设$\forall M>0$，要使$\left|\dfrac{1}{x-1}\right|>M$，只要$|x-1|<\dfrac{1}{M}$. 所以，取 $\delta=\dfrac{1}{M}$，则只要 x 适合不等式 $0<|x-1|<\delta=\dfrac{1}{M}$，就有$\left|\dfrac{1}{x-1}\right|>M$.

这就证明了$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}=\infty$.

1.3.3 无穷大量与无穷小量的关系

定理 1.5 若函数 $f(x)$在自变量 x 的某一变化过程中是无穷大量，则在该变化过程中$\dfrac{1}{f(x)}$为无穷小量；反之，在自变量 x 的某一变化过程中，若 $f(x)(f(x)\neq 0)$为无穷小量，则在该变化过程中，$\dfrac{1}{f(x)}$为无穷大量.

证 设$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$，$\forall\varepsilon>0$. 根据无穷大的定义，对于 $M=\dfrac{1}{\varepsilon}$，$\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有

$$|f(x)|>M=\frac{1}{\varepsilon},$$

即

$$\left|\frac{1}{f(x)}\right|<\varepsilon,$$

所以$\dfrac{1}{f(x)}$为当 $x\to x_0$ 时的无穷小.

反之，设$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ 且 $f(x)\neq 0$.

$\forall M>0$. 根据无穷小的定义，对于$\varepsilon=\dfrac{1}{M}$，$\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有

$$|f(x)|<\varepsilon=\frac{1}{M},$$

由于当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时 $f(x)\neq 0$，从而

$$\left|\frac{1}{f(x)}\right|>M,$$

所以$\dfrac{1}{f(x)}$为当 $x \to x_0$ 时的无穷大.

类似地，可证当 $x \to \infty$ 时的情形.

例 7　自变量在怎样的变化过程中，下列函数为无穷大量？

（1）$y=x$；　（2）$y=\dfrac{1}{x+2}$；　（3）$y=\ln(1-x)$；　（4）$y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$.

解　（1）当 $x \to \infty$ 时，$\lim\limits_{x \to \infty} x=\infty$，所以当 $x \to \infty$ 时，x 是无穷大量；

（2）当 $x \to -2$ 时，$\dfrac{1}{x+2} \to \infty$，所以当 $x \to -2$ 时，$\dfrac{1}{x+2}$是无穷大量；

（3）当 $x \to 1^-$ 或 $x \to -\infty$ 时，$\ln(1-x)$是无穷大量；

（4）当 $x \to -\infty$ 时，$\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$ 是无穷大量.

习题 1.3

1. 下列函数在怎样的变化过程中是无穷大量或无穷小量？

（1）$y=\sin x$；　　（2）$y=\dfrac{3}{x+1}$；

（3）$y=\ln x$；　　（4）$y=e^{\frac{1}{x^2}}$.

2. 指出下列各题中的无穷大量与无穷小量：

（1）$\tan x\left(x \to \dfrac{\pi}{2}\right)$；　　（2）$e^{-x}(x \to +\infty)$；

（3）$2^x-1(x \to 0)$；　　（4）$\dfrac{1}{x-1}(x \to 1)$.

3. 根据定义证明：

（1）$y=\dfrac{x^2-9}{x+3}$为当 $x \to 3$ 时的无穷小；

（2）$y=\dfrac{1+2x}{x}$为当 $x \to 0$ 时的无穷大.

4. 求$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sin x}{x}$.

5. 利用等价无穷小代换法求下列函数的极限：

（1）$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sin(1-x)}{\ln x}$；　　（2）$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{\tan x^2}$；

（3）$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2+2x}{\sin x}$；　　（4）$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x^2)(e^x-1)}{(1-\cos x)\sin 2x}$.

6. 如果函数 $f(x)$在某一变化过程中极限不存在，此函数在这一变化过程中是不是无穷大量？请举例说明．

1.4 极限的运算法则

下面我们给出极限的四则运算法则.

定理 1.6 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$，则有

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A\pm B$；

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A\cdot B$；

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}=\dfrac{A}{B}$（其中 $g(x)\neq 0$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\neq 0$）.

此定理称为极限的四则运算法则.

推论 1 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，c 为常数，则 $\lim\limits_{x\to x_0}[cf(x)]=c\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

推论 2 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，$n\in\mathbf{N}^*$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^n=[\lim\limits_{x\to x_0} f(x)]^n$.

注 (1) 以上法则对自变量的其他变化过程也成立；

(2) 法则要求 $f(x)$，$g(x)$ 的极限分别存在；

(3) 定理 1.6 中的法则(1)(2)可以推广到任意有限个函数的情形，如

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x)$，$\lim\limits_{x\to x_0} f_2(x)$，…，$\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x)$ 均存在，则有 $\lim\limits_{x\to x_0}[f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_n(x)]=\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x)+\lim\limits_{x\to x_0} f_2(x)+\cdots+\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x)$.

利用极限的基本性质和极限的四则运算法则可以解决许多极限问题，下面我们来看几个具体例子.

例 1 计算 $\lim\limits_{x\to 1}(x^2+3x-1)$.

解 由极限运算法则得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}(x^2+3x-1)&=\lim_{x\to 1}x^2+\lim_{x\to 1}3x-\lim_{x\to 1}1\\&=(\lim_{x\to 1}x)^2+\lim_{x\to 1}3x-\lim_{x\to 1}1\\&=1^2+3-1=3.\end{aligned}$$

一般地，有

$$\lim_{x\to x_0}(a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n)=a_0x_0^{\,n}+a_1x_0^{\,n-1}+\cdots+a_n,$$

其中 $f_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$ 称为 n 次多项式函数.

例 2 计算 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x^2-3x+2}$.

解 当 $x\to 1$ 时，分母的极限为零，故不能直接用极限的运算法则. 但由极限定义可知，当 $x\to 1$ 时的极限与函数在 $x=1$ 处有无定义没有关系，因而可以先通过分解因式化

简后再求极限.

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x-2)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{x+2}{x-2}=\frac{\lim\limits_{x\to1}(x+2)}{\lim\limits_{x\to1}(x-2)}=-3.$$

注　以下解法是错误的：

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{x^2-3x+2}=\frac{\lim\limits_{x\to1}(x^2+x-2)}{\lim\limits_{x\to1}(x^2-3x+2)}=\frac{0}{0}=0.$$

像例 2 这样，先通过对分子、分母进行因式分解或恒等变形来消去零因子，再求极限的方法，在求一些“$\frac{0}{0}$”型极限时经常用到. 由于“$\frac{0}{0}$”型的极限可能存在，也可能不存在，因此这种极限也称为不定式(不定型).

例 3　求$\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$.

解　此题也是“$\frac{0}{0}$”型不定式，但求解时不能直接通过分解因式化简消去零因子，由于分母中含根号，可以先通过“分母有理化”化简，然后再求极限.

$$\lim_{x\to0}\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}=\lim_{x\to0}\frac{x(\sqrt{x+1}+1)}{x+1-1}=\lim_{x\to0}(\sqrt{x+1}+1)=2.$$

例 4　求$\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}\right)$.

解　因为$\lim\limits_{x\to1}\frac{x}{x-1}=\infty$，$\lim\limits_{x\to1}\frac{2}{x^2-1}=\infty$，所以不能用差的极限的运算法则. 先将函数进行通分，化成“$\frac{0}{0}$”型不定式，再利用因式分解化简消零因子的方法计算：

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}\right)=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to1}\frac{x+2}{x+1}=\frac{3}{2}.$$

例 5　求$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+2x-1}{x^2-1}$.

解　当 $x\to\infty$时，分子，分母都是无穷大，极限都不存在，所以不能直接用商的极限的运算法则，这种“$\frac{\infty}{\infty}$”型的极限和“$\frac{0}{0}$”型的极限一样，也是不定式. 由于分子、分母关于 x 的最高次幂都是 x^2，所以，我们可以将分子、分母同除以 x^2，然后再求极限.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+2x-1}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}}=3.$$

一般地，有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}=\lim_{x\to\infty}x^{n-m}\frac{a_0+a_1\cdot\frac{1}{x}+\cdots+a_n\cdot\frac{1}{x^n}}{b_0+b_1\cdot\frac{1}{x}+\cdots+b_m\cdot\frac{1}{x^m}}$$

$$=\begin{cases}\frac{a_0}{b_0}, & m=n,\\ 0, & m>n,\\ \infty, & m<n,\end{cases}$$

这里 $a_0\neq0$，$b_0\neq0$，m，n 为非负整数.

例 6 求 $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+x}{x^2-1}$.

解 当 $x\to1$ 时，$x^2-1\to0$，不能直接用商的极限运算法则，由于该分式倒数的极限值为零，即

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x^2+x}=\frac{1^2-1}{1^2+1}=0,$$

因此，由无穷大和无穷小的关系得：$\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+x}{x^2-1}=\infty$，该极限不存在.

例 7 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)$.

解 当 $n\to\infty$时，上式是无限项之和，而极限的运算法则仅适用于有限项之和，这时必须先对函数式进行适当的变形再求极限.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1\times\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)}{1-\frac{1}{2}}=2.$$

定理 1.7 （复合函数的极限运算法则）设函数 $y=f(g(x))$是由函数 $u=g(x)$与函数 $y=f(u)$复合而成，$y=f(g(x))$在点 x_0 的某去心邻域内有定义，若 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=u_0$，$\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$，且存在 $\delta_0>0$，当 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta_0)$时，有 $g(x)\neq u_0$，则

$$\lim_{x\to x_0}f(g(x))=\lim_{u\to u_0}f(u)=A.$$

小结 （1）运用极限的四则运算法则时，必须注意只有各项极限存在（求商时还要注意分母的极限不为零）才能适用；

（2）当所求极限是“$\frac{0}{0}$”型或“$\frac{\infty}{\infty}$”型不定式，不能直接用极限运算法则时，必须先对原式进行恒等变形（约分、通分、有理化、变量代换等），然后再求极限.

习题 1.4

1. 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x+\cos x+\tan x)$；

(2) $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-x-2)$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(2-\dfrac{2}{x^3}\right)$；

(4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{x^2+2x}$；

(5) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x-1}$；

(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3+3x^2-2x+1}{6x^3-2x^2-5}$；

(7) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}$；

(8) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1-3x}{1-x^2}\right)$；

(9) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\cos x}{2x}$；

(10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{3+x}-\sqrt{3}}$.

2. 计算下列数列的极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{4}{n^2}+\cdots+\dfrac{2n}{n^2}\right)$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{1\times 2}+\dfrac{1}{2\times 3}+\cdots+\dfrac{1}{n\times(n+1)}\right]$.

3. 已知 a，b 是常数，且 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{ax+b}{x+1}=3$，求 a 和 b.

4. 设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$，证明：有 $x\to x_0$ 时的无穷小 α，使 $f(x)=g(x)+\alpha$.

5. 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty$，证明：$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$不存在.

1.5 两个重要的极限

通过前面三节的学习，我们知道了一些求极限的方法，如运用极限的定义和运算法则求极限．除此之外，我们还经常遇到下面要讨论的两个重要极限．本节给出判定极限存在的两个准则，并依据它们给出两个重要极限．

1.5.1 判定极限存在的两个准则

准则 1　(夹逼准则)如果数列$\{x_n\}$，$\{y_n\}$及$\{z_n\}$满足下列条件：

(1) 从某项起，即$\exists n_0\in\mathbf{N}^*$，当 $n>n_0$ 时，有

$$y_n\leqslant x_n\leqslant z_n;$$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$，

那么数列$\{x_n\}$的极限存在，且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

证 因为 $y_n \to a$，$z_n \to a$，所以根据数列极限的定义，$\forall \varepsilon>0$，$\exists$ 正整数 N_1，当 $n>N_1$ 时，有 $|y_n-a|<\varepsilon$；又 $\exists$ 正整数 N_2，当 $n>N_2$ 时，有 $|z_n-a|<\varepsilon$. 现在取 $N=\max\{n_0, N_1, N_2\}$，则当 $n>N$ 时，有

$$|y_n-a|<\varepsilon, \quad |z_n-a|<\varepsilon$$

同时成立，即

$$a-\varepsilon<y_n<a+\varepsilon, \quad a-\varepsilon<z_n<a+\varepsilon$$

同时成立. 又因当 $n>N$ 时，x_n 介于 y_n 和 z_n 之间，从而有

$$a-\varepsilon<y_n \leqslant x_n \leqslant z_n<a+\varepsilon,$$

即

$$|x_n-a|<\varepsilon$$

成立. 这就证明了 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$.

准则 1′ （夹逼准则）设函数 $f(x)$，$g(x)$，$h(x)$ 在 x_0 的某个去心邻域 $\mathring{U}(x_0)$ 内（或 $|x|>M$）满足：

$$g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x),$$

且有极限 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\infty)}} g(x)=\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\infty)}} h(x)=A$，则有

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\infty)}} f(x)=A.$$

从直观上看，该准则是明显的，当 $x\to x_0(x\to\infty)$ 时，函数 $g(x)$，$h(x)$ 的值无限逼近常数 A，而夹在 $g(x)$ 与 $h(x)$ 之间的 $f(x)$ 的值也无限逼近常数 A，即得到 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\infty)}} f(x)=A$.

准则 2 单调有界数列必有极限.

在之前的学习中，我们已经知道有界数列不一定有极限，但准则 2 指出，单调且有界的数列必有极限.

1.5.2 两个重要极限公式

1. 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

证明 因为函数 $\dfrac{\sin x}{x}$ 是偶函数，所以，只要证明 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 即可.

如图 1-6 所示.

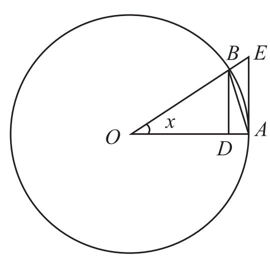


图 1-6

设⊙O 为单位圆，$0<x<\dfrac{\pi}{2}$，对于圆心角 $\angle BOA=x$，有 $\sin x=BD$，$\cos x=OD$，$\tan x=EA$ 及 $x=\overset{\frown}{AB}$. 当 $x\to 0$ 时，$BD\to 0$，$OD\to 1$，即