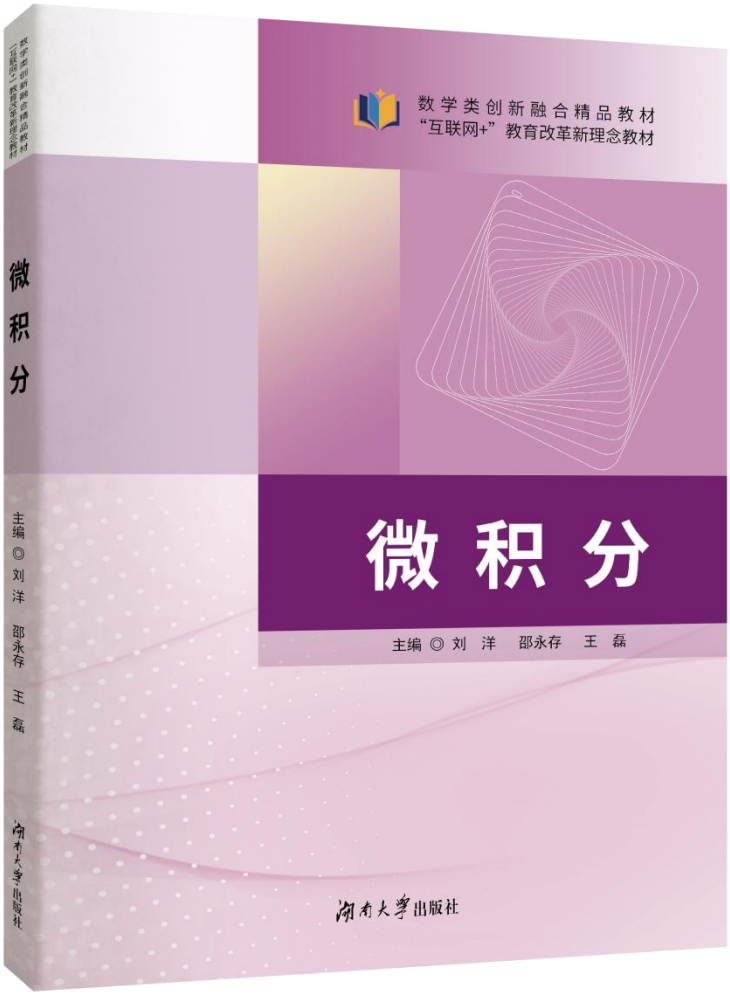
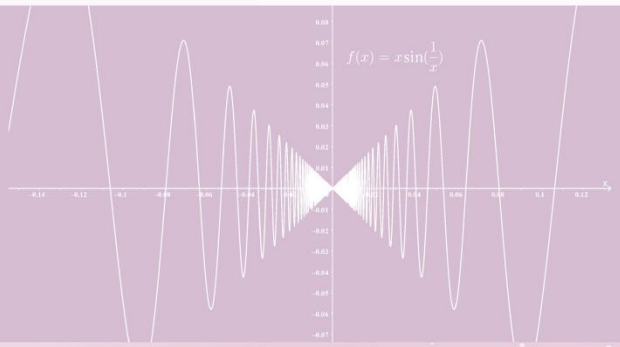
微积分



类目：数学类
书名：微积分
主编：刘 洋 邵永存 王 磊
出版社： 湖南大学出版社
开本：大 16 开
书号：978-7-5667-3469-3
使用层次：通用
出版时间：2024/7/1
定价：49.80
印刷方式：双色
是否有资源：是

责任编辑：金红艳
封面设计：旗语书装



微积分

主编◎刘洋　邵永存　王磊

湖南大学出版社

ISBN 978-7-5667-3669-3
9 787567 736693 >
定价：49.80元

数学类创新融合精品教材
“互联网+”教育改革新理念教材

微积分

主编◎刘洋　邵永存　王磊

湖南大学出版社

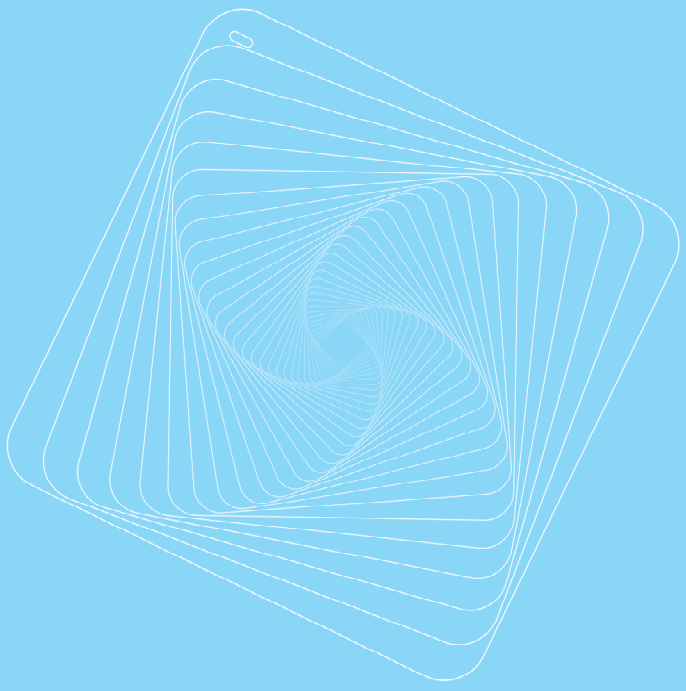
数学类创新融合精品教材
“互联网+”教育改革新理念教材

微积分

主编◎刘洋　邵永存　王磊

湖南大学出版社

数学类创新融合精品教材
“互联网+”教育改革新理念教材



微积分

主　编◎刘　洋　邵永存　王　磊
副主编◎孙丽东　徐　峰　秦梦洁

湖南大学出版社
·长沙·

图书在版编目(CIP)数据

微积分 / 刘洋，邵永存，王磊主编. — 长沙：湖南大学出版社，2024.7

ISBN 978-7-5667-3469-3

Ⅰ.①微… Ⅱ.①刘…②邵…③王… Ⅲ.①微积分—高等学校—教材 Ⅳ.①O172

中国国家版本馆 CIP 数据核字(2024)第 044713 号

微积分

WEIJIFEN

主　　编：刘　洋　邵永存　王　磊

责任编辑：金红艳

印　　装：涿州汇美亿浓印刷有限公司

开　　本：889 mm×1194 mm　1/16　**印　　张**：16　**字　　数**：420 千字

版　　次：2024 年 7 月第 1 版　**印　　次**：2024 年 7 月第 1 次印刷

书　　号：ISBN 978-7-5667-3469-3

定　　价：49.80 元

出 版 人：李文邦

出版发行：湖南大学出版社

社　　址：湖南·长沙·岳麓山　**邮　　编**：410082

电　　话：0731-88822559(营销部)，88821174(编辑室)，88821006(出版部)

传　　真：0731-88822264(总编室)

网　　址：http://press.hnu.edu.cn

电子邮箱：xiaoshulianwenhua@163.com

版权所有，盗版必究

图书凡有印装差错，请与营销部联系

前言

PREFACE

数学不仅是一种工具，还是一种思维模式；不仅是一种知识，还是一种素养；不仅是一种科学，还是一种文化，能否运用数学观念定量思维是衡量民族科学文化素质的一个重要指标。数学教育在培养高素质经济和管理人才中越来越显示出其独特的、不可替代的地位.

随着计算机技术的快速发展，数学的社会化功能程度日益提高. 现代化产业和经济的组织与管理已经离不开数学所提供的方法和技术. 因此，微积分是经济管理类学生必修的重要数学基础理论课之一.

本书结构严谨，强调科学性、系统性和准确性，内容由浅入深，循序渐进，根据经济管理类学生的特点，引进的概念尽量贴近生活实际或几何意义，尽量结合学生已掌握的知识，由直观到抽象，理论联系实际，力争深入浅出，通俗易懂；并在一定程度上突出微积分的基本思想和基本方法. 一方面，使学生能够较好地了解各部分内容的内在联系，整体上把握微积分的思想方法；另一方面，培养学生严密的逻辑思维能力和严谨的科学探究精神.

本书共十章，主要包括函数、极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、多元函数微积分、无穷级数、微分方程、差分方程等内容。

由于编者水平有限，书中难免有疏漏之处，敬请广大同仁及读者批评指正。

编　者

2024 年 3 月

目 录

CONTENTS

第 1 章 函 数 …… 1

1.1 函数的概念 …… 2
1.2 初等函数 …… 8
1.3 经济学中常见的函数 …… 12
习 题 …… 17

第 2 章 极限与连续 …… 20

2.1 极限概念 …… 21
2.2 极限运算法则 …… 28
2.3 极限存在准则与两个重要极限 …… 31
2.4 无穷小与无穷大 …… 35
2.5 函数的连续性 …… 39
习 题 …… 46

第 3 章 导数与微分 …… 49

3.1 导数概念 …… 50
3.2 函数的求导法则 …… 58
3.3 隐函数的导数 …… 65
3.4 高阶导数 …… 67
3.5 函数的微分 …… 69
习 题 …… 75

第 4 章 微分中值定理与导数的应用 …… 76
4.1 微分中值定理 …… 77
4.2 洛必达法则 …… 81
4.3 函数的单调性与极值 …… 85
4.4 函数的最值 …… 89
4.5 曲线的凹凸性与拐点 …… 91
4.6 函数图形的描绘 …… 94
4.7 导数在经济学中的应用 …… 96
习 题 …… 101

第 5 章 不定积分 …… 103
5.1 不定积分的概念与性质 …… 104
5.2 换元积分法 …… 108
5.3 分部积分法 …… 115
习 题 …… 118

第 6 章 定积分 …… 120
6.1 定积分的概念与性质 …… 121
6.2 微积分基本公式 …… 125
6.3 定积分的换元积分法和分部积分法 …… 128
6.4 反常积分 …… 131
6.5 定积分在几何学中的应用 …… 134
6.6 定积分在经济学中的应用 …… 138
习 题 …… 140

第 7 章 多元函数微积分 …… 142
7.1 空间解析几何简介 …… 143
7.2 多元函数的基本概念 …… 148
7.3 偏导数 …… 151
7.4 全微分 …… 154
7.5 复合函数微分法与隐函数的微分法 …… 156
7.6 多元函数的极值及其求法 …… 159
7.7 二重积分的概念与性质 …… 163
7.8 二重积分的计算 …… 166
习 题 …… 175

第 8 章　无穷级数 …… 177
8.1　常数项级数的概念和性质 …… 178
8.2　正项级数及其收敛法 …… 181
8.3　任意项级数审敛法 …… 186
8.4　幂级数 …… 188
8.5　泰勒公式 …… 194
8.6　函数展开成幂级数 …… 197
8.7　幂级数在近似计算中的应用 …… 201
习　题 …… 204

第 9 章　微分方程 …… 205
9.1　微分方程的基本概念 …… 206
9.2　一阶微分方程 …… 208
9.3　一阶齐次线性微分方程 …… 212
9.4　可降阶的二阶微分方程 …… 217
9.5　二阶常系数线性微分方程 …… 220
9.6　微分方程在经济学中的应用 …… 226
习　题 …… 231

第 10 章　差分方程 …… 233
10.1　差分方程的基本概念 …… 234
10.2　一阶常系数线性差分方程 …… 235
10.3　二阶常系数线性差分方程 …… 239
习　题 …… 243

参考文献 …… 245

第 1 章

函　数

数学是一门研究数量关系与空间形式的科学，函数关系是一种满足一定条件的数量关系，函数是微积分研究的对象，是最重要的基本概念之一．尽管我们在之前已对它有了一定的认识，但认真学好本章，加深对函数概念及其性质的理解和掌握，为学习本课程打下良好基础仍是不容忽视的．





1.1 函数的概念

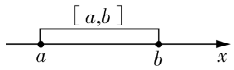
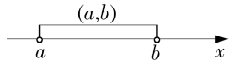
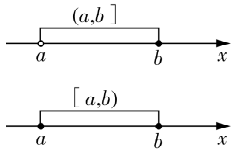
函数的概念

1.1.1 预备知识

我们在观察某一现象时，常常会遇到各种不同的量，其中有的量在过程中保持不变，称为常量；有的量在过程中是变化的，称为变量．通常用字母 x，y，z 表示变量，用字母 a，b，c 表示常量.

在一些实际问题中，如果变量的变化是连续的，则常用区间来表示其变化范围．从数轴上看，区间是指介于某两点之间的线段上点的全体．区间通常分为有限区间和无限区间，表 1-1 给出了有限区间的表示方法，其中 a，b 为实数，且 $a<b$.

表 1-1

名　　称	满足的不等式	记　　法	数轴上的表示
闭区间	$a\leqslant x\leqslant b$	$[a,\ b]$	
开区间	$a<x<b$	$(a,\ b)$	
半开区间	$a<x\leqslant b$ 或 $a\leqslant x<b$	$(a,\ b]$ 或 $[a,\ b)$	

除此之外，还有无限区间：

$[a,\ +\infty)$：表示不小于 a 的实数的全体，也可记为：$a\leqslant x<+\infty$；

$(-\infty,\ b)$：表示小于 b 的实数的全体，也可记为：$-\infty<x<b$；

其中 $-\infty$ 和 $+\infty$，分别读作“负无穷大”和“正无穷大”，它们不是数，仅仅是记号.

为描述一个变量 x 在一个已知点 x_0 附近变化，我们给出邻域这一术语：

$(x_0-\delta,\ x_0+\delta)=\{x\mid |x-x_0|<\delta,\ \delta>0\}$ 称为点 x_0 的 δ 邻域，记为 $U(x_0,\ \delta)$．x_0 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径，如图 1-1 所示.

$(x_0-\delta,\ x_0)\cup(x_0,\ x_0+\delta)=\{x\mid 0<|x-x_0|<\delta,\ \delta>0\}$ 称为以 x_0 为中心、δ 为半径的去心邻域，记为 $\overset{\circ}{U}(x_0,\ \delta)$，如图 1-2 所示.

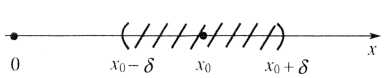


图 1-1

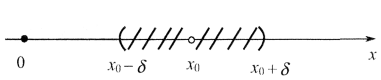


图 1-2

1.1.2　函数的概念

在自然界中，某一现象中的各种变量之间，通常不都是独立变化的，它们之间存在着依赖关系．例如，某种商品的销售单价为 p 元，则其销售额 L 与销售量 x 之间存在依赖关系：$L=px$．圆的面积 S 和半径 r 之间存在依赖关系：$s=\pi r^2$．

不考虑上面两个例子中量的实际意义，它们都给出了两个变量之间的相互依赖关系，这种关系是一种对应法则，根据这一法则，当其中一个变量在其变化范围内任意取定一个数值时，另一个变量就有确定的值与之对应．两个变量间的这种对应关系就是函数概念的实质．

定义 1-1　设在某个变化过程中有变量 x 和 y，如果对于 x 取值范围内的每一个数值，都有一个确定的 y 值与之对应，则称 y 是 x 的函数．

为了突出这里是集合之间的对应关系，给出如下定义．

定义 1-1′　设 D 是一个非空实数集合，f 是一个对应规则，在此规则下，对每一个 $x\in D$，都有唯一确定的实数 y 与之对应，则称此对应规则 f 为定义在 D 上的一个函数关系，称变量 y 是变量 x 的函数，记作 $y=f(x)$，$x\in D$．

这里称 x 为自变量，y 为因变量，集合 D 为该函数的定义域，可记作 $D(f)$．对于 $x_0\in D(f)$ 所对应的 y 值记作 $f(x_0)$ 或 $y\big|_{\{x=x_0\}}$，称为当 $x=x_0$ 时函数 $f(x)$ 的函数值．全体函数值的集合 $\{y\mid y=f(x),\ x\in D(f)\}$ 称为函数 $y=f(x)$ 的值域，记作 Z 或 $Z(f)$．

注：(1) 由函数的定义可知，一个函数的构成要素为定义域、对应规则和值域．由于值域是由定义域和对应规则决定的，所以，如果两个函数的定义域和对应关系完全一致，我们就称两个函数相等．

(2) 如果自变量在定义域内任取一个确定的值时，函数只有一个确定的值和它对应，这种函数叫作单值函数，否则叫作多值函数．这里我们只讨论单值函数．

函数通常有以下三种表示方法：

(1) 解析法（或分析法、公式法）：如 $y=\sin x$，$y=\sqrt{x^2+1}$，这样的表达式亦称为函数的解析式，这种表示法的主要特点是严密．

(2) 图示法：如用直角坐标（或极坐标等）平面的一条曲线表示，这种表示法的主要特点是直观．

(3) 表格法：如三角函数表、对数表、正态分布表等，这种表示法的主要特点是能进行函数值的查询．

若函数 $f(x)$ 在定义域不同的区间上用不同解析式来表示，则称函数 $f(x)$ 为分段函数．如 $f(x)=\begin{cases}x-1, & x<0\\ 0, & x=0\\ x+1, & x>0\end{cases}$ 和符号函数 $y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$，都是定义域在 $(-\infty,+\infty)$ 内的分段函数，其图形分别如图 1-3 和图 1-4 所示．

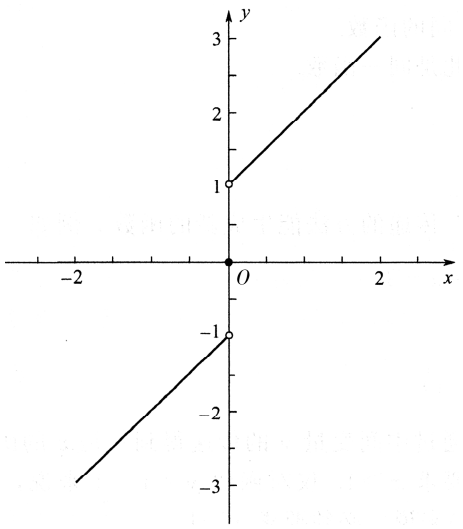


图 1-3

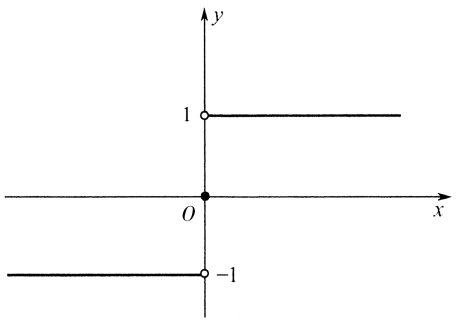


图 1-4

前面所讨论的函数大多都是 $y=f(x)$，$z=f(x,y)$ 等形式，如 $y=x^2-1$，$z=\sqrt{x^2+y^2}$．这种因变量在等式左边，等式右边为自变量的某个等式的函数表达式通常称为显函数．但是在理论和实际问题中常常会遇到函数关系无法用显函数表达的情况，此时通常用一个关于自变量和因变量的方程式来表达函数关系，通常称为隐函数．例如 $xy-e^y=0$，$xe^y+\sin y=0$ 等．

【例 1-1】 设 $f(x+1)=2x^2+3x-1$，求 $f(x)$．

解 设 $x+1=t$ 得 $x=t-1$，则 $f(t)=2(t-1)^2+3(t-1)-1=2t^2-t-2$，所以 $f(x)=2x^2-x-2$．

【例 1-2】 确定函数 $y=\arcsin\dfrac{x-1}{5}+\dfrac{1}{\sqrt{25-x^2}}$ 的定义域．

解 由 $\left|\dfrac{x-1}{5}\right|\leqslant 1$ 且 $x^2<25$，即 $|x-1|\leqslant 5$ 且 $|x|<5$，得 $-4\leqslant x\leqslant 6$ 且 $-5<x<5$，故所求定义域是 $[-4,5)$．

【例 1-3】 求函数 $y=\sqrt{x^2-x-6}+\arcsin\dfrac{2x-1}{7}$ 的定义域．

解 要使函数有定义，则 $\begin{cases}x^2-x-6\geqslant 0\\ \left|\dfrac{2x-1}{7}\right|\leqslant 1\end{cases}$，得 $\begin{cases}x\geqslant 3 \text{ 或 } x\leqslant -2\\ -3\leqslant x\leqslant 4\end{cases}$，即 $-3\leqslant x\leqslant -2$ 或 $3\leqslant x\leqslant 4$ 于是，所求函数的定义域是 $[-3,2]\cup[3,4]$．

【例 1-4】 判断以下函数是否是同一函数，为什么？

（1）$y=\ln x^2$ 与 $y=2\ln x$．　　（2）$\omega=\sqrt{u}$ 与 $y=\sqrt{x}$．

解 （1）两个函数的定义域不同，因此不是相同的函数．

（2）两函数的对应法则和定义域均相同，因此是同一函数．

1.1.3 复合函数与反函数

1.1.3.1 复合函数

由两个或两个以上的函数用所谓“中间变量”传递的方法能生成新的函数．例如，函数

$$z=\ln y,\ y=x-1,$$

由“中间变量”y 的传递生成新的函数

$$z=\ln(x-1).$$

在这里 z 是 y 的函数，y 又是 x 的函数．于是，通过中间变量 y 的传递得到 z 是 x 的函数．为了使函数 $z=\ln y$ 有意义，必须要求 $y>0$，即要求 $x>1$．仅对函数 $y=x-1$ 来说，x 可取任意实数．但是，对生成的新函数 $z=\ln(x-1)$ 来说，必须要求 $x>1$．

定义 1-2　设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 $D(f)$，若函数 $u=\varphi(x)$ 的值域为 $Z(\varphi)$，$Z(\varphi)\cap D(f)$ 非空，则称 $y=f[\varphi(x)]$ 为 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 的复合函数．其中 x 为自变量，y 为因变量，u 称为中间变量．

【例 1-5】　若 $y=\sqrt{u}$，$u=\sin x$，求其复合而成的函数．

解　$y=\sqrt{\sin x}$，要求 $u\geqslant 0$，则复合而成的函数为 $y=\sqrt{\sin x}$，$x\in[2k\pi,\pi+2k\pi]$，所以 $\sin x\geqslant 0$，$x\in[2k\pi,\pi+2k\pi]$．

【例 1-6】　分析下列复合函数的结构．

（1）$y=\sqrt{\cot\dfrac{x}{2}}$；　　（2）$y=\mathrm{e}^{\sin\sqrt{x^2+1}}$．

解　（1）$y=\sqrt{u}$，$u=\cot v$，$v=\dfrac{x}{2}$．

（2）$y=\mathrm{e}^{u}$，$u=\sin v$，$v=\sqrt{t}$，$t=x^2+1$．

1.1.3.2　反函数

在高中已经学习了反函数，如对数函数是指数函数的反函数，反三角函数是三角函数的反函数．鉴于反函数的重要性，我们将复习反函数的概念．

圆的面积公式 $S=\pi r^2$ 中，半径 r 是自变量，面积 S 是因变量，即对任意半径 $r\in(0,+\infty)$，对应唯一一个面积 S．反之，对任意面积 $S\in(0,+\infty)$，按此对应关系，也对应唯一一个半径 r（正数），即

$$r=\sqrt{\frac{S}{\pi}}.$$

函数 $r=\sqrt{\dfrac{S}{\pi}}$ 就是函数 $S=\pi r^2$ 的反函数．

定义 1-3　设 $y=f(x)$，$x\in D(f)$，$y\in Z(f)$．如果对于每一个 $y\in Z(f)$，都有唯一确定的而且满足 $y=f(x)$ 的 $x\in D(f)$ 与之对应，其对应规则用 f^{-1} 表示，则这个定义在 $Z(f)$ 上的函数 $x=f^{-1}(y)$ 称为 $y=f(x)$ 的反函数，或称 $y=f(x)$ 与 $x=f^{-1}(y)$ 互为反函数．

由定义知函数 $y=f(x)$ 的自变量是 x，因变量是 y，定义域是 $D(f)$，值域是 $Z(f)$．而函数 $x=f^{-1}(y)$ 的自变量是 y，因变量是 x，定义域是 $Z(f)$，值域是 $D(f)$．

习惯上常用 x 表示自变量，y 表示因变量．因此可以将 $x=f^{-1}(y)$ 改写为 $y=f^{-1}(x)$，就是说 $y=f^{-1}(x)$ 是 $y=f(x)$ 的反函数．

从几何上看，$y=f(x)$ 与 $x=f^{-1}(y)$ 的图形是同一图形，由于 x 和 y 互换，于是 $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的图形是关于直线 $y=x$ 对称的，如图 1-5 所示．

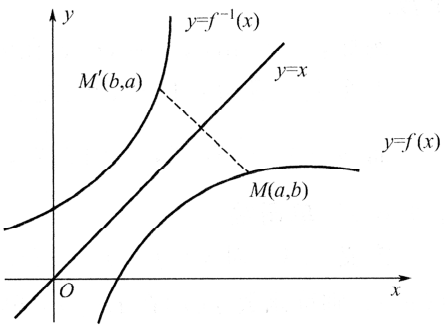


图 1-5

【例 1-7】 求 $y=2x-1$ 的反函数.

解 由 $y=2x-1$ 求出 $x=\dfrac{y+1}{2}$. 用 x 表示自变量，y 表示因变量，于是 $y=2x-1$ 的反函数是 $y=\dfrac{x+1}{2}$.

注： $y=x^2$，$x\in[0,+\infty)$ 的反函数是 $y=\sqrt{x}$，而 $y=x^2$，$x\in(-\infty,0]$ 的反函数是 $y=-\sqrt{x}$.

一个函数如果有反函数，它的定义域 $D(f)$ 与值域 $Z(f)$ 之间必定是一一对应的，即每一个 x 值确定一个 y 值，并且每一个 y 值仅取决于一个 x 值. 在 $(-\infty,+\infty)$ 内，$y=x^2$ 不是一一对应的函数关系，它没有反函数.

【例 1-8】 设 $y=f(x)=\begin{cases}x, & -\infty<x<1\\ x^2, & 1\leqslant x\leqslant 4\\ 2^x, & 4<x<+\infty\end{cases}$，求 $f^{-1}(x)$.

解 求分段函数的反函数，只要分别求出各区间段的反函数及定义域即可. 由 $y=x$，$-\infty<x<1$ 得 $x=y$，$-\infty<y<1$，于是反函数为

$$y=x,\quad -\infty<x<1,$$

由 $y=x^2$，$1\leqslant x\leqslant 4$ 得 $x=\sqrt{y}$，$1\leqslant y\leqslant 16$，于是反函数为

$$y=\sqrt{x},\quad 1\leqslant x\leqslant 16,$$

由 $y=2^x$，$4<x<+\infty$ 得 $x=\log_2 y$，$16<y<+\infty$，于是反函数为

$$y=\log_2 x,\quad 16<x<+\infty.$$

综上所述，

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}x, & -\infty<x<1\\ \sqrt{x}, & 1\leqslant x\leqslant 16\\ \log_2 x, & 16<x<+\infty\end{cases}.$$

1.1.4 函数的基本性质

1.1.4.1 有界性

定义 1-4 若存在正数 M，对一切 $x\in D(f)$，有 $|f(x)|\leqslant M$ 成立，则称 $f(x)$ 为有界函数.

例如：设 $M=1>0$，$\forall x\in\mathbf{R}$，有 $|\sin x|\leqslant 1$ 与 $|\cos x|\leqslant 1$，则 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 在整个实数轴上均有界.

而 $\varphi(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 内无界，而在区间 $(\varepsilon,1)$ $(\varepsilon>0)$ 内是有界的.

1.1.4.2　单调性

定义 1-5　对 $y=f(x)$，$x\in D(f)$，对任意两点 x_1，$x_2\in D(f)$，当 $x_1<x_2$ 时，若 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 $D(f)$ 上单调递增，区间 $D(f)$ 称为 $f(x)$ 的单调递增区间；当 $x_1<x_2$ 时，若 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 $D(f)$ 上单调递减，区间 $D(f)$ 称为 $f(x)$ 的单调递减区间.

单调递增区间或单调递减区间统称为单调区间.

【例 1-9】　说明 $y=a^x$，$y=\log_a x$ 在其定义域区间内的单调性.

解　$y=a^x$，当 $a>1$ 时，定义域 $\mathbf{R}$ 为单调递增区间；当 $0<a<1$ 时，定义域 $\mathbf{R}$ 为单调递减区间. $y=\log_a x$，当 $a>1$ 时，定义域 $(0,+\infty)$ 为单调递增区间，当 $0<a<1$ 时，定义域 $(0,+\infty)$ 为单调递减区间.

【例 1-10】　判断 $y=3x^2$ 的单调性.

解　$y=3x^2$ 的定义域是 $D=(-\infty,+\infty)$，对于任意的 x_1，$x_2\in D$，$f(x_1)-f(x_2)=3x_1^2-3x_2^2=3(x_1^2-x_2^2)$.

在 $(-\infty,0)$ 内，当 $x_1<x_2$ 时，$f(x_1)-f(x_2)>0$，即 $f(x_1)>f(x_2)$，因此 $y=3x^2$ 单调递减.

在 $(0,+\infty)$ 内，当 $x_1<x_2$ 时，$f(x_1)-f(x_2)<0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$，因此 $y=3x^2$ 单调递增.

1.1.4.3　奇偶性

定义 1-6　对 $y=f(x)$，$x\in D(f)$，若对任意 $x\in D(f)$，$f(-x)=-f(x)$ 成立，则称 $f(x)$ 为奇函数；若 $f(-x)=f(x)$ 成立，则称 $f(x)$ 为偶函数. 奇函数的几何图形关于原点对称，而偶函数的几何图形关于 y 轴对称.

【例 1-11】　判断 $y=\cos x(\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{x})$ 的奇偶性.

解　因为 $y=\cos x(\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{x})$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，是关于原点对称的，并且

$$f(-x)=\cos(-x)(\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x})=\cos x(\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{x})=f(x),$$

故此函数为偶函数.

显然，函数 $y=x^3$ 是奇函数，函数 $y=x^3+1$ 既不是奇函数也不是偶函数.

1.1.4.4　周期性

定义 1-7　对 $y=f(x)$，$x\in D(f)$，若存在一个正数 T，使得对于任一 $x\in D(f)$ 有 $(x\pm T)\in D$ 且 $f(x+T)=f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为周期函数，T 是 $f(x)$ 的周期. 通常我们说的周期函数的周期是指最小正周期.

例如，函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 的周期均为 2π，$y=\tan x$ 的周期为 π. 而 $y=C$（C 是一个常数）是以任何正数为周期的周期函数，但它不存在最小正周期. 所以说，并不是所有的周期函数都存在最小正周期.

1.1.5 极坐标

极坐标是一种重要的坐标系，有些几何轨迹如果用极坐标法处理，它的方程比用直角坐标系更简单，在微积分中经常用到.

在平面直角坐标系中，是以一对实数来确定平面上一点的位置，现在叙述另一种坐标，它对平面上的一点的位置虽然也是用有序实数对来确定，但这一对实数中，一个是表示距离，而另一个则是指示方向．一般来说，取一个定点 O，称为极点，作一水平射线 Ox，称为极轴，在 Ox 上规定单位长度，这样就组成了一个极坐标系．平面上一点 P 的位置，可以由 OP 的长度及 $\angle xOP$ 的大小决定，这种确定一点位置的方法，叫作极坐标法．具体地说，假设平面上有点 P，连接 OP，设 OP 的长度 $|OP|=\rho$，$\angle xOP=\theta$. ρ 和 θ 的值确定了，则 p 点的位置就确定了．ρ 叫作 P 点的极径，θ 叫作 P 点的极角，(ρ,θ) 叫作 P 点的极坐标（规定 ρ 写在前，θ 写在后）．显然，每一对实数 (ρ,θ) 决定平面上一个点的位置.

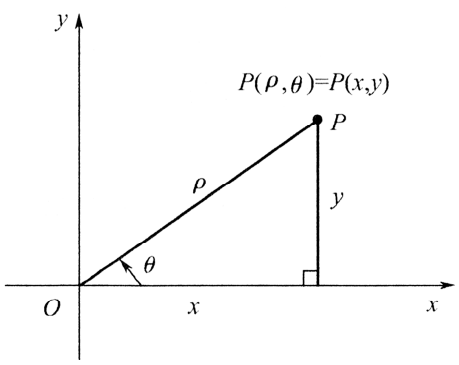


图 1-6

极坐标与直角坐标系的关系如图 1-6 所示，将极坐标的极点 O 作为直角坐标系的原点，将极坐标的极轴作为直角坐标系 x 轴的正半轴．如果点 P 在直角坐标系下的坐标为 (x,y)，在极坐标系下的坐标为 (ρ,θ)，则有下列关系成立

$$\cos\theta=\frac{x}{\rho},\quad \sin\theta=\frac{y}{\rho}.$$

即

$$x=\rho\cos\theta,\quad y=\rho\sin\theta,$$

另外还有下式成立

$$\rho^2=x^2+y^2,\quad \tan\theta=\frac{y}{x}.$$

【例 1-12】 给出极坐标系中点 $P(2,\pi/3)$ 的直角坐标.

解 由上面的讨论知

$$x=\rho\cos\theta=2\cos\frac{\pi}{3}=1,\quad y=\rho\sin\theta=2\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}.$$

故点 P 的直角坐标为 $(1,\sqrt{3})$.

1.2 初等函数

1.2.1 基本初等函数

在数学的发展过程中，形成了最简单最常用的六类函数，即常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数与反三角函数，这六类函数称为基本初等函数.

1.2.1.1　常数函数

$y=C$，$x\in\mathbf{R}$，其中 C 是常数．它的图像是通过点（0，C），且平行于 x 轴的直线，如图 1-7 所示．

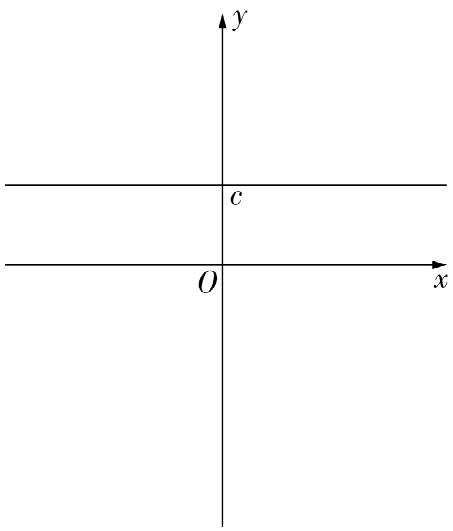


图 1-7

常数函数是有界函数、周期函数、偶函数．特别当 $C=0$ 时，它还是奇函数．

1.2.1.2　幂函数

形如 $y=x^{\alpha}$ 的函数是幂函数，其中 α 是实数．其定义域因 α 不同而异，然而对任何 α 值，在（0，$+\infty$）内，x^{α} 都有定义，并且图形皆过点（1，1）．

例如，$y=x^2$，$y=x^{\frac{2}{3}}$ 的定义域为（$-\infty$，$+\infty$），值域为［0，$+\infty$），图形对称于 y 轴，如图 1-8 所示．$y=x^3$，$y=x^{\frac{1}{3}}$ 的定义域为（$-\infty$，$+\infty$），值域为（$-\infty$，$+\infty$），图形对称于原点，如图 1-9 所示．

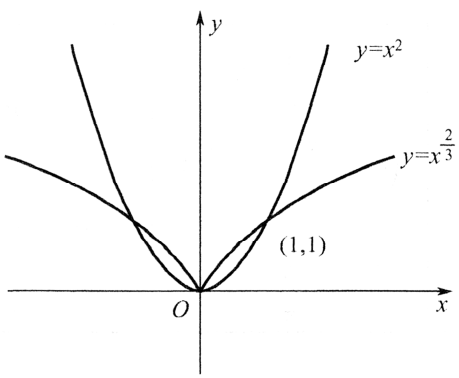


图 1-8

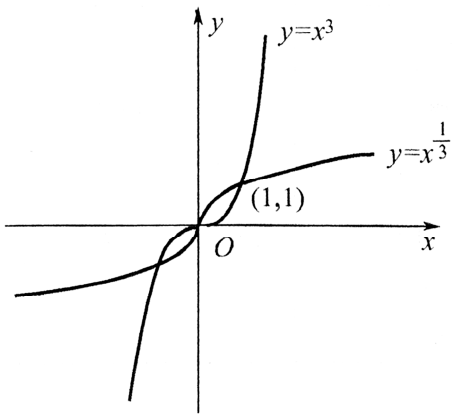


图 1-9

1.2.1.3　指数函数

$y=a^x$（$a>0$，$a\neq1$），其定义域为（$-\infty$，$+\infty$），值域为（0，$+\infty$），对任何 a，$y=a^x$

的图形都通过点（0，1），当 $a>1$ 时函数单调递增；当 $0<a<1$ 时，函数单调递减，如图 1-10所示.

1.2.1.4 对数函数

$y=\log_a x$（$a>0$，$a\neq 1$），其定义域为（0，$+\infty$），值域为（$-\infty$，$+\infty$），对任何 a，$y=\log_a x$ 的图形都通过（1，0）点，当 $a>1$ 时函数单调递增，当 $0<a<1$ 时，函数单调递减，如图 1-11 所示．对同一个 a 值，$y=\log_a x$ 与 $y=a^x$ 互为反函数，见表 1-2.

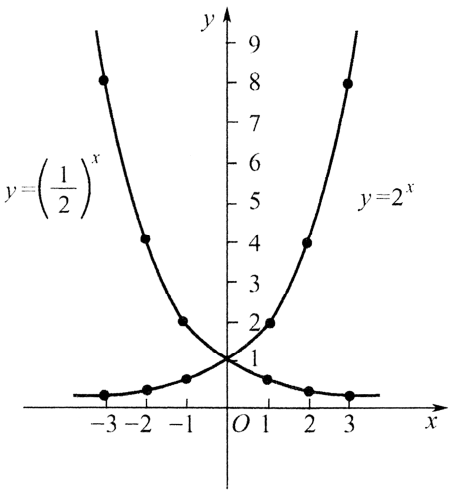


图 1-10

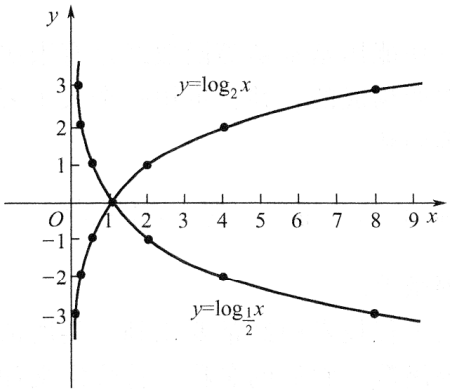


图 1-11

表 1-2

项目	$y=a^x$		$y=\log_a x$	
a	$0<a<1$	$a>1$	$0<a<1$	$a>1$
定义域	**R**	**R**	（0，$+\infty$）	（0，$+\infty$）
值域	（0，$+\infty$）	（0，$+\infty$）	**R**	**R**
递增区间		**R**		（0，$+\infty$）
递减区间	**R**		（0，$+\infty$）	

1.2.1.5 三角函数

$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，见表 1-3.

1.2.1.6 反三角函数

$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\operatorname{arccot} x$，见表 1-4.

表 1-3

项目	$y=\sin z$	$y=\cos x$	$y=\tan x$	$y=\cot x$
定义域	**R**	**R**	$\left\{x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}\right\}$	$\{x\neq k\pi\}$
值域	[−1，1]	[−1，1]	**R**	**R**

续表

项目	$y=\sin x$	$y=\cos x$	$y=\tan x$	$y=\cot x$
递增区间	$\left[2k\pi-\frac{\pi}{2},\ 2k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$	$[(2k-1)\pi,\ 2k\pi]$	$\left(k\pi-\frac{\pi}{2},\ k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$	
递减区间	$\left[2k\pi+\frac{\pi}{2},\ 2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right]$	$[2k\pi,\ (2k+1)\pi]$		$(k\pi,\ (k+1)\pi)$
奇偶性	奇	偶	奇	奇
周期	2π	2π	π	π

表 1-4

项目	$y=\arcsin x$	$y=\arccos x$	$y=\arctan x$	$y=\operatorname{arccot} x$
定义域	$[-1,\ 1]$	$[-1,\ 1]$	**R**	**R**
值域	$\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$	$[0,\ \pi]$	$\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$	$(0,\ \pi)$
递增区间	$[-1,\ 1]$		**R**	
递减区间		$[-1,\ 1]$		**R**
奇偶性	奇		奇	

1.2.2　初等函数

一切能用基本初等函数经过有限次的四则运算（加、减、乘、除）以及有限次的函数复合步骤所构成的，并且可用一个式子表示的函数，称为初等函数．本课程所研究的函数主要是初等函数.

例如，$y=\sin^2 x$，$y=\sqrt{1-x^2}$，$y=\lg\sqrt{1+x^2}$，$y=\dfrac{2+\sqrt[3]{x}}{2-\sqrt{x}}$，$y=\arctan\sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\cos x}}$ 等都是初等函数.

在工程技术中经常要用到一类所谓双曲函数，它们是由指数函数 $y=\mathrm{e}^x$ 与 $y=\mathrm{e}^{-x}$ 生成的初等函数．它们的名称、符号定义如下.

双曲正弦：$\operatorname{sh} x=\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}$.

双曲余弦：$\operatorname{ch} x=\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$.

双曲正切：$\operatorname{th} x=\dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}=\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}$.

双曲余切：$\operatorname{cth} x=\dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}=\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}$.

双曲正弦的定义域为（$-\infty$，$+\infty$）；它是奇函数，它的图像通过原点且关于原点对称．在区间（$-\infty$，$+\infty$）内它是单调增加的．当 x 的绝对值很大时，它的图像在第一象限内接近于曲线 $y=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^x$ 在第三象限内接近于曲线 $y=-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}$，如图 1-12 所示.

双曲余弦的定义域为（$-\infty$，$+\infty$）；它是偶函数，它的图像通过（0，1）且关于 y 轴对称．在区间（$-\infty$，0）内它是单调减少的；在区间（0，$+\infty$）内它是单调增加的．$\mathrm{ch}0=1$ 是这函数的最小值．当 x 的绝对值很大时，它的图像在第一象限内接近于曲线 $y=\frac{1}{2}e^{x}$；在第二象限内接近于曲线 $y=\frac{1}{2}e^{-x}$，如图 1-12 所示．

双曲正切的定义域为（$-\infty$，$+\infty$）；它是奇函数，它的图像通过原点且关于原点对称．在区间（$-\infty$，$+\infty$）内它是单调增加的．它的图像夹在水平直线 $y=1$ 及 $y=-1$ 之间；当 x 的绝对值很大时，它的图像在第一象限内接近于直线 $y=1$；在第三象限内接近于直线 $y=-1$，如图 1-13 所示．

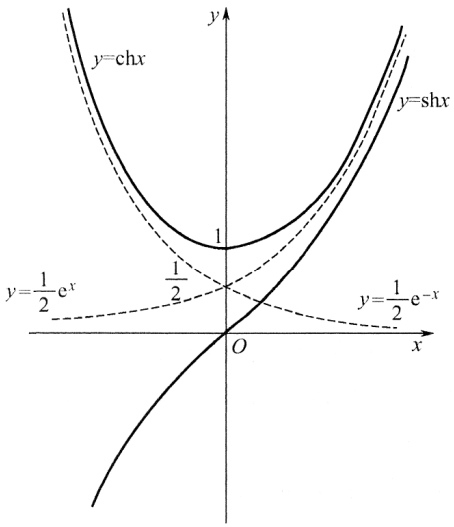


图 1-12

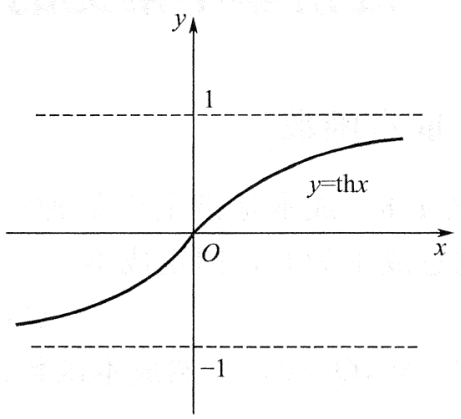


图 1-13

双曲函数的公式与三角函数的公式相似．由双曲函数的定义，可以证明下列公式

$$\mathrm{ch}^{2}x-\mathrm{sh}^{2}x=1,\quad \mathrm{ch}\,x+\mathrm{sh}\,x=e^{x},\quad \mathrm{ch}\,x-\mathrm{sh}\,x=e^{-x}.$$

1.3 经济学中常见的函数

1.3.1 成本函数

定义 1-8 成本是指生产某种一定数量的产品需要的费用，它包括固定成本和可变成本．若记总成本为 C，固定成本为 C_0，Q 为产量，C_1（Q）为可变成本，则成本函数为

$$C=C(Q)=C_0+C_1(Q),$$

其中，$C_0\geqslant 0$，$Q>0$，显然成本函数是递增函数，它随产量的增加而增加．

平均成本是指生产每单位产品的成本，记为 C，即平均成本函数为

$$\overline{C}=\frac{C(Q)}{Q}=\frac{C_0}{Q}+\frac{C_1(Q)}{Q}.$$

平均成本的大小反映企业生产的好差，平均成本越小说明企业生产单位产品时消耗的资源费用越低，效益更好.

【例 1-13】 某工厂生产 Q 个单位产品的总成本函数为 $C=C(Q)=108+Q+\frac{1}{9}Q^2$，求生产 18 个单位产品的总成本及平均成本.

解 当 $Q=18$ 时，总成本为

$$C(18)=108+18+\frac{1}{9}\times 324=162.$$

平均成本为

$$\overline{C}(18)=\frac{C(18)}{18}=9.$$

1.3.2 收益函数

定义 1-9 总收益是生产者出售一定数量产品所得到的全部收入．用 Q 表示出售的产品数量，R 表示总收益，$\overline{R}$ 表示平均收益，则

$$R=R(Q),\ \overline{R}=\frac{R(Q)}{Q}.$$

如果产品价格 P 保持不变，则

$$R=PQ,\ \overline{R}=P.$$

【例 1-14】 设某产品的价格与销售量的关系为 $Q=100-2P$，求销售量为 10 时的总收益和平均收益.

解 $Q=100-2P$，当 $Q=10$ 时，$P=45$．则 $R(10)=PQ=45\times 10=450$，$\overline{R}=45$.

1.3.3 利润函数

定义 11-10 总利润是生产中获得的总收益与投入的总成本之差，用 L 表示总利润，则

$$L(Q)=R(Q)-C(Q),$$

平均利润函数为 $\overline{L}(Q)=\frac{L(Q)}{Q}$.

【例 1-15】 某工厂生产某种产品，固定成本为 10 000 元，每生产一件产品的费用为 50 元，预计售价 80 元，求总成本函数、平均成本函数、总收益函数、总利润函数和平均利润函数.

解 设产量为 Q，则总成本函数、平均成本函数、总收益函数分别为

$$C(Q)=10\ 000+50Q,\ \overline{C}(Q)=\frac{10\ 000}{Q}+50,\ R(Q)=80Q,$$

而总利润函数为

$$L(Q)=80Q-(10\ 000+50Q)=30Q-10\ 000.$$

平均利润函数为

$$\overline{L}=\frac{L(Q)}{Q}=30-\frac{10\ 000}{Q}.$$

1.3.4 需求函数与供给函数

1.3.4.1 需求函数

定义 1-11 需求是指消费者在某一特定的时期内，在一定的价格条件下对某种商品具有购买力的需要.

消费者对某种商品的需求量除了与该商品的价格有直接关系外，还与消费者的习性、偏好、收入、其他可取代商品的价格甚至季节的影响有关．现在只考虑商品的价格因素，其他因素暂时取定值．这样，对商品的需求量就是该商品价格的函数，称为需求函数．用 Q 表示对商品的需求量，P 表示商品的价格，则需求函数为

$$Q=Q(P).$$

鉴于实际情况，自变量 P 和因变量 Q 都取非负值.

一般地，需求量随价格上涨而减少，因此通常需求函数是价格的递减函数.

常见的需求函数有以下几种.

①线性需求函数：$Q=a-bP$，其中 a，b 均为非负常数.

②二次曲线需求函数：$Q=a-bP-cP^2$，其中 a，b 均为非负常数，$c>0$.

③指数需求函数：$Q=ae^{-bp}$，其中 a，b 均为非负常数.

④幂需求函数：$Q=kP^{-a}$，其中 $k>0$，$a>0$.

需求函数 $Q=Q(P)$ 的反函数称为价格函数，记作 $P=P(Q)$，其也反映商品的需求与价格的关系.

1.3.4.2 供给函数

定义 1-12 供给是指在某一时间内，在一定的价格条件下，生产者愿意并且能够售出的商品．供给量记为 S，供应者愿意接受的价格为 P，则供给量与价格之间的关系为 $S=S(P)$，称其为供给函数，S 与 P 均取非负值．由供给函数所作的图形称为供给曲线.

一般地，供给函数可以用以下简单函数近似代替.

①线性供给函数：$S=aP-b$，其中 a，b 均为非负常数.

②幂供给函数：$S=kP^a$，其中 a，k 均为非负常数.

③指数供给函数：$S=ae^{bP}$，其中 a，b 均为非负常数.

需求函数与供给函数密切相关，把需求曲线和供给曲线画在同一坐标系中，如图 1-14 所示．由于需求函数是递减函数，供给函数是递增函数，它们的图形必相交于一点，这一点叫作均衡点，均衡点所对应的价格 P_0 就是供、需平衡的价格，也叫均衡价格；均衡点所对应的需求量或供给量就叫作均衡需求量或均衡供给量．当市场价格 P 高于均衡价格 P_0 时，产生了“供大于求”的现象，从而使市场价格下降；当市场价格 P 低于均衡价格 P_0 时，这时会产生“供不应求”的现象，从而使市场价格上升．市场价格的调节就是这样实现的.

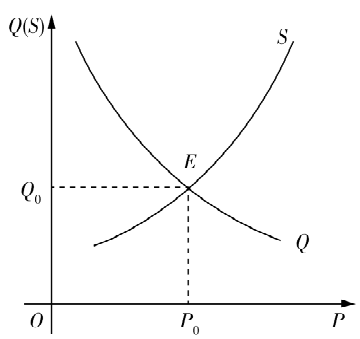


图 1-14

应该指出，市场的均衡是暂时的，当条件发生变化时，原有的均衡状态就被破坏，从而需要在新的条件下建立新的均衡.

【例 1-16】　某商品的需求量 Q 与价格 P 的关系由 $3Q^2+P=123$ 给出，而供给量 Q 与价格 P 的关系由 $Q^2-20Q-P=-99$ 给出，试求市场达到供需平衡时的均衡价格和均衡需求量.

解　要求均衡价格和均衡需求量，即解方程组

$$\begin{cases} Q^2-20Q-P=-99 \\ 3Q^2+P=123 \end{cases},$$

得到两组结果

$$\begin{cases} P_1=120 \\ Q_1=-1 \end{cases} \text{和} \begin{cases} P_2=15 \\ Q_2=6 \end{cases}.$$

显然，第一组结果没有意义，故所求均衡价格为 15 个单位，均衡需求量为 6 个单位.

拓展阅读

函数的产生及其发展

函数是一个变量对另一个（或多个）变量的依赖关系的抽象模型.

函数概念是数学中的重要概念之一，它是现代数学各分支的主要研究对象．自 17 世纪近代数学产生以来，函数的概念一直处于数学思想的核心位置.

自然界中各种物体、各种现象往往是有机地互相关联、彼此相互依赖的，常常是一个量（或多个量）能决定其他量的值．例如，矩形的长和宽决定其面积值；已知气体在一定的温度下，体积决定其压力值等．类似的这些量之间的规律性也是函数概念的根源.

函数的发展可以分为四个时期：

第一时期为 17 世纪初叶以前，其特点是用文字和比例语言表达函数关系；

第二时期为 17 世纪中下叶，其特点是将函数当作曲线来研究；

第三时期为 18 世纪，其特点是将函数定义为解析表达式；

第四时期为 19 世纪初叶之后，这时已给出了函数明确的现代定义.

17 世纪早期，由于天文学和航海事业的发展，科学家以如何解释地球运动原理、如何解释天体运动作为研究课题，从这些对运动的研究中推动了函数概念的发展．此后的两百年里，函数概念几乎在涉及数学的所有工作中占据中心的位置．伽利略（Galileo，1564—1642）在其创建近代力学的著作《两门新科学》一书中，几乎从头到尾包含了函数概念，他用文字和比例语言表达函数关系．此后不久，他又将自由落体距离用公式 $s=kt^2$ 表示.

法国哲学家、数学家笛卡儿（Descartes，1596—1650）引入了坐标与变量，致使数学发生了巨大的变革．变量的引入，导致了函数概念的产生．笛卡儿在研究 v 和 x 是变量（未知和未定的量）的时候，也注意到 y 依赖于 x 而变这一特性，这是函数的萌芽.

“函数”（function）这个词作为数学术语，是微积分奠基人之一、德国哲学家、数学家莱布尼茨（Leibniz，1646—1716）在他 1673 年的手稿中首次使用的．但其含义与现在不同，他当时用“函数”来表示任何一个随曲线上的点的变动而变动的量，例如切线、

法线等的长度．在1692年莱布尼茨发表的关于《Acta Eruditorum》的论文中也使用了函数一词，我们可以把莱布尼茨建立的概念看成是函数的第一个定义．17世纪引入的绝大多数函数都是当作曲线来研究的，这也是17世纪后半叶最有成效的、辉煌的观念之一．

1718年，莱布尼茨的学生、瑞士数学家约翰·伯努利（Johann Bernoulli，1667—1748）给函数作了如下定义："变量的函数就是变量和常量以任何方式组成的量"．换句话说，约翰·伯努利称由 x 和常量所构成的式子为函数．

1734年，欧拉（Euler，1707—1783）引入符号 $f(x)$ 表示函数．在其1748年的著作《无穷小分析引论》一书中，他将"解析表达式"定义为函数，指出"变量的函数是一个解析表达式，它是由这个变量和一些常量以任何方式组成的"．

欧拉关于"解析表达式"的定义要比莱布尼茨的定义及约翰·伯努利的定义广泛得多．它包括由加、减、乘、除、开方等代数运算所得到的代数多项式，还包括有 $\sin x$，$\cos x$ 等三角式及 a^x 指数式等．欧拉也曾指出"在 xy 平面上徒手画出来的曲线所表示的 y 与 x 间关系为函数"．1775年欧拉在《微分学》中又给出了另一种定义："如果某些变量，以这样一种方式依赖于另一些变量，即当后面这些变量变化时，前面这些变量也随之而变化，则将前面的变量称为后面变量的函数"．

欧拉前后使用了三种定义：1."解析表达式"；2."由曲线所确定的关系"；3."依赖变化"．用现代观点来看，这三种关于函数的定义都有一定的局限性．第1、3个定义较易理解，而且现在仍然被一些通俗读物采用，缺点是过于狭窄．因为许多函数不能用解析表达式表出，也有的函数不随自变量 x 的变化而变化（例如，外埠平信的邮资 y 是信件质量 x 的函数，但只要 x 不超过20g，不管 x 多重，邮资总是8角，在一定范围内 y 不随 x 而变）．第2个定义虽接近现代定义，但不够明确．然而不管怎样，欧拉的定义对后世影响颇大．

欧拉还引入了超越函数，定义了多元函数，他把函数分为：代数函数和超越函数，有理函数与无理函数，单值函数与多值函数，隐函数与显函数等等．

18世纪的数学家大多数都相信函数必须处处有相同的解析表达式．直到18世纪下半叶，在很大程度上是由于弦振动问题的争论，导致意大利数学家拉格朗日（Lagrange，1736—1813）等重新考虑函数的概念．他们提出，允许在不同区域上的函数有不同的表达式，即引入了分段函数的概念．

1807年，法国数学家、物理学家傅里叶（Fourier，1768—1830）在其《热的分析理论》中指出："任何函数都可以表示成三角级数"．傅里叶的工作标志着人们从解析式的定义中解放出来．在傅里叶以前，人们曾坚信函数必须处处有相同的解析表达式．傅里叶的工作表明了，一个不连续曲线可能需要多个表达式表示，或用无穷多项之和即级数的形式表示，从而动摇了旧的关于函数概念的传统思想，在当时的数学界引起了很大震动．

柯西（Cauchy，1789—1857）在他1821年的著作中提出了无穷级数表示函数的新定义，指出函数不一定有解析表达式．在其1823年所写的《微积分学纲要》中，柯西还指出：在某些变量间存在着一定关系，一经给定其中某一变数之值，其他变数之值亦可随之而确定时，则将最初的变数称为"自变数"，其他各变数则称为"函数"．这一定义与现今教科书中的定义很相近．柯西关于无穷级数表示函数及函数不一定有解析表达式的定义拓广了函数的概念．

1834 年，俄罗斯数学家巴切夫斯基（ЛобачевскИй，1792—1856）进一步拓广了函数的概念，使函数概念从解析式中解放出来．他曾指出："这个一般的概念，要求把那个对于每个 x 所给予的，并随着 x 而逐渐变动的数，称为函数．函数可以用解析式子表达，也可以用条件来表达．我们可以借这个式子或条件来试验所有的数 x 而选择适合的数，最后，由相依关系可能找出，也可能找不出".

1837 年，德国数学家狄利克雷（Dirichlet，1805—1859）提出了近似于现代的定义"对于在某个区间上每一确定的 x 值，y 都有一个或多个确定的值，那么 y 叫作 x 的函数"．这个定义抓住了概念的本质属性，比前面的定义更具普遍性，为理论研究和实际应用提供了方便．因此，这个定义曾被长期地使用着．

19 世纪 70 年代，德国数学家康托尔（Cantor，1845—1918）的集合论出现以后，函数又被定义为集合间的对应关系．现在许多教科书中采用此"集合对应"的定义．这种定义法摆脱了"自变量"提法的缺陷．因为对于变量而言，必定随某个过程而变，即它不可能脱离"过程"而"自变"．用"集合对应"定义函数则无需依赖过程．因此，目前有些学者主张废弃"变量"这个词，而将"自变量""因变量"改称为"第一值"（first entry）、"第二值"（second entry）．

自从德国数学家康托尔的集合论被大家接受后，函数便明确地定义为集合间的对应关系，这是目前一般教科书所用的"集合对应"定义．中文数学书上使用的"函数"一词是转译词，是我国清代数学家李善兰在翻译《代数学》（1895 年）一书时，把"function"译成了"函数"．中国古代"函"字与"含"字通用，都有着"包含"的意思．李善兰给出的定义是："凡式中含天，为天之函数"．中国古代用天、地、人、物四个字来表示四个不同的未知数或变量，这个定义的含义是："凡是公式中含有变量 x，则该式子叫作 x 的函数"，所以"函数"是指公式里含有变量的意思．

我们可以预计到，关于函数的争论、研究、发展、拓广将不会完结，也正是这些影响着数学及其相邻学科的发展．

习　　题

1．填空题．

（1）设 $f(x)$ 是定义在实数域上的一个函数，且 $f(x-1)=x^2+x+1$，则 $f\left(\dfrac{1}{x-1}\right)=$_____．

（2）设 $f(x)=\begin{cases}1, & \dfrac{1}{\mathrm{e}}<x<1\\ x, & 1\leqslant x\leqslant \mathrm{e}\end{cases}$，$\varphi(x)=\mathrm{e}^x$，则 $f[\varphi(x)]=$_____．

（3）函数 $y=1+\lg(x+2)$ 的反函数为_____．

2. 选择题.

(1) 如果 $E=\{x \mid x(x^2-1)=0\}$，下列集合中哪个集合与 E 相等？(　　)

A. $\{x \mid x(x+1)=0\}$　　B. $\{x \mid x^2(x^2-1)=0\}$

C. $\{x \mid (x-1)(x^2-1)=0\}$　　D. $\{x \mid e^x(x^2-1)=0\}$

(2) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有定义，则下列函数中必为奇函数的是(　　).

A. $y=|f(x)|$　　B. $y=-|f(x)|$

C. $y=C$　　D. $y=xf(x^2)$

(3) 下列(　　)为复合函数.

A. $y=3^x$　　B. $y=2^{-\sqrt{-(2-\sin x)}}$

C. $y=\sqrt{-(2+x^4)}$　　D. $y=\sqrt{-x}\ (x<0)$

3. 用区间表示满足下列不等式的所有 x 的集合.

(1) $|x| \leqslant 3$；(2) $|x-a| \leqslant \varepsilon$ (a 为常数，ε 为正的常数)；(3) $|x+2|>3$.

4. 说明下列各式是不是函数关系？

(1) $y=\lg(-x^2)$；　　(2) $y=\sqrt{-2-\cos x}$.

5. 判断下列各组函数是否相同，为什么？

(1) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ 与 $g(x)=x+2$；

(2) $f(x)=\dfrac{\pi}{2}$ 与 $g(x)=x(\arcsin x+\arccos x)$.

6. $f(x)=\begin{cases} e^x, & x<0 \\ 3, & 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ x^2-1, & x>2 \end{cases}$，求 $f(-2)$，$f(1)$，$f(4)$，$f(0)$，$f(2)$.

7. 设 $f(x)=x^2$，$g(x)=x^2-x$，求 $f[g(x)]$ 及 $g[f(x)]$，并求出使 $f[(g(x)]-g[f(x)]$ 成立的 x 值.

8. 设 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$，求 $f(-x)$，$f(x+1)$，$f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

9. 已知 $f(x+1)=x^2+\cos x$，求 $f(x-2)$，$f(2x)$.

10. 求下列函数的定义域.

(1) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$；　　(2) $y=\sqrt{\lg\dfrac{5x-x^2}{4}}$；

(3) $y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{16-x^2}$；　　(4) $y=\dfrac{\arccos\dfrac{2x-1}{7}}{\sqrt{x^2-x-6}}$.

11. 将函数 $y=5-|2x-1|$ 用分段形式表示，作出函数图形.

12. 下列哪些函数是奇函数、偶函数、非奇非偶函数？

(1) $y=\dfrac{\sin x}{x}$；　　(2) $y=xe^x$；

(3) $y=x+\sin x$；　　(4) $y=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$.

13. 判断下列函数的单调性.

(1) $y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$；　　(2) $y=1-3x^2$.

14. 试求下列函数的周期.

（1）$y=\sin\frac{x}{2}$；　　（2）$y=\sin^2 x$.

15. 求下列函数的反函数.

（1）$y=\frac{1-x}{1+x}$；　　（2）$y=\log_4 2+\log_4\sqrt{x}$.

16. 下列函数可以看成是由哪些简单函数复合而成的?

（1）$y=\sqrt{1-\sin x}$；　　（2）$y=\cos^2\sqrt{x+1}$；　　（3）$y=\sqrt{\ln\sqrt{x}}$.

17. 证明题.

（1）如果 $f(x)$ 是定义在 $(-L, L)$ 内的函数，证明：$f(x)+f(-x)$ 是偶函数，$f(x)-f(-x)$ 是奇函数.

（2）如果 $\varphi(x)=\ln\frac{1-x}{1+x}$，证明：$\varphi(y)+\varphi(z)=\varphi\left(\frac{y+z}{1+yz}\right)$.

（3）如果 $f(x)=a^x$，证明：$f(x)\cdot f(y)=f(x+y)$，$\frac{f(x)}{f(y)}=f(x-y)$.

18. 邮资 y 是信件重量的函数，按照邮局的规定，对国内外埠平信，按信的重量，每重 20 g 应付邮资 8 角，不足 20 g 者应以 20 g 计算，当信件重量在 60 g 以内时，试写出这个函数的表达式，并画出它的图形.

19. 某工厂生产某产品，年产量为 x 台，每台售价为 250 元，当年产量在 600 台以内时，可全部售出；当年产量超过 600 台时，经广告宣传后又可再多售出 200 台，每台平均广告费 20 元；再多生产，本年就销售不出去了．试建立本年的销售总收入 R 与年产量 x 的函数关系.

第 2 章

极限与连续

经济数学的核心内容是微积分，微积分的主要研究对象是函数，所谓函数关系就是变量与变量之间的相互依存关系．研究微积分所用的主要工具是极限，极限方法是研究变量的一种基本方法，极限的概念和运算从理论上贯穿于微积分的始终．本章介绍函数、极限和函数的连续性等基本概念及其相关的性质．





2.1　极限概念

2.1.1　数列极限

2.1.1.1　数列的概念和性质

定义 2-1　如果按照某一法则，对每个 $n \in \mathbf{N}_+$，对应着一个确定实数 x_n，这些实数 x_n 按照下标 n 从小到大排列得到的一个序列

$$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$$

叫作数列，简记为数列 $\{x_n\}$.

数列 $\{x_n\}$ 中的每个数叫作数列的项，第 n 项 x_n 叫作数列的通项（或一般项）. 例如：

(1) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots, \frac{n}{n+1}, \cdots$;

(2) $1, 2, 3, \cdots, n, \cdots$;

(3) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots, \frac{1}{2^n}, \cdots$;

(4) $1, -1, 1, \cdots, (-1)^{n+1}, \cdots$;

(5) $1, -2, 3, \cdots, (-1)^{n-1} n, \cdots$;

(6) $0, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \cdots, 1 + \frac{(-1)^n}{n}, \cdots$

都是数列，依次可以简记为 $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$, $\{n\}$, $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$, $\{(-1)^{n+1}\}$, $\{(-1)^{n-1} n\}$, $\left\{1 + \frac{(-1)^n}{n}\right\}$，它们通项依次为

$$\frac{n}{n+1}, n, \frac{1}{2^n}, (-1)^{n+1}, (-1)^{n-1} n, 1 + \frac{(-1)^n}{n}.$$

对于给定的数列 $\{x_n\}$，由于其各项的取值由其下标 n 唯一确定，故数列 $\{x_n\}$ 可看作定义在正整数集 $\mathbf{N}_+$ 上的函数，即

$$x_n = f(n), n \in \mathbf{N}_+.$$

在几何上，数列 $\{x_n\}$ 可看作数轴上的一个动点，它依次取数轴上的点 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$，如图 2-1 所示.

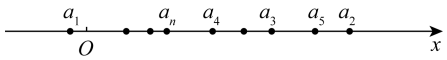


图 2-1

对于数列 $\{x_n\}$，如果存在正数 M，使得对于一切 x_n 都满足不等式

$$|x_n| \leqslant M,$$

则称数列 $\{x_n\}$ 是有界的；否则，就称数列 $\{x_n\}$ 是无界的.

例如，数列 $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ 是有界的，因为可取 $M=1$，使

$$\left|\frac{n}{n+1}\right|\leqslant 1$$

对于一切 x_n 都成立.

数列 $\{2^n\}$ 是无界的，因为不存在正数 M，使得对于一切 2^n 都有 $|2^n|\leqslant M$.

数列 $\{x_n\}$ 若满足 $x_1\leqslant x_2\leqslant x_3\leqslant\cdots\leqslant x_n\leqslant x_{n+1}\leqslant\cdots$，则称数列 $\{x_n\}$ 为单调增加数列；若满足 $x_1\geqslant x_2\geqslant x_3\geqslant\cdots\geqslant x_n\geqslant x_{n+1}\geqslant\cdots$，则称数列 $\{x_n\}$ 为单调减少数列. 单调增加数列与单调减少数列统称单调数列. 例如，数列 $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ 是单调增加数列，数列 $\left\{\frac{n+2}{n+1}\right\}$ 是单调减少数列.

在数列 $\{x_n\}$ 中任意抽取无限项并保持这些项在原数列 $\{x_n\}$ 中的先后次序，这样得到的一个数列称为原数列 $\{x_n\}$ 的子数列（或子列）. 例如，数列 $1,3,5,\cdots,2n-1,\cdots$ 和 $2,4,6,\cdots,2n,\cdots$ 都可以看成数列 $\{n\}$ 的子数列.

2.1.1.2 数列极限的定义

对于数列 $\{x_n\}$，我们要讨论的问题：当 n 无限增大时（即 $n\to\infty$ 时），对应的 $x_n=f(n)$ 的变化趋势.

考察数列 $\left\{\frac{n}{n+1}\right\},\{n\},\left\{\frac{1}{2^n}\right\},\{(-1)^{n+1}\},\{(-1)^{n-1}n\},\left\{1+\frac{(-1)^n}{n}\right\}$ 不难发现，当 n 无限增大时，通项 x_n 取值的变化可分为两类. 一类是当 n 无限增大时，x_n 无限趋近于某个常数. 例如，当 n 无限增大时，$\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ 和 $\left\{1+\frac{(-1)^n}{n}\right\}$ 中的 x_n 无限趋近于数 1，而 $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$ 中的 x_n 无限趋近于数 0. 另一类是当 n 无限增大时，x_n 不趋近于某个常数，例如，数列 $\{n\},\{(-1)^{n+1}\},\{(-1)^{n-1}n\}$.

定义 2-2 设有数列 $\{x_n\}$，如果存在常数 a，当 n 无限增大时，x_n 无限趋近于常数 a，则称数列 $\{x_n\}$ 的极限为 a，或称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a，记作

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a \text{ 或 } x_n\to a(n\to\infty).$$

如果这样的常数 a 不存在，就说数列 $\{x_n\}$ 没有极限，或者说数列 $\{x_n\}$ 发散，习惯上也说 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 不存在.

数列极限的精确定义如下.

*** 定义 2-3** 设有数列 $\{x_n\}$，如果存在常数 a，对于任意给定的正数 ε（不论多么小），总存在正整数 N，使得当 $n>N$ 时，不等式

$$|x_n-a|<\varepsilon$$

都成立，那么就称常数 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限，或者称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a，记作

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a \text{ 或 } x_n\to a(n\to\infty).$$

例如，$\left\{1+\frac{(-1)^n}{n}\right\}$ 中当 n 无限大时，x_n 无限趋近于 1，即数轴上动点 x_n 与定点 1 的距离（即 x_n 与 1 的差的绝对值）

$$|x_n-1|=\left|1+\frac{(-1)^n}{n}-1\right|=\frac{1}{n}$$

可以任意小．也就是只要 n 足够大，$|x_n-1|=\dfrac{1}{n}$ 可以小于任意给定的正数．例如，给定正数 $\dfrac{1}{100}$，欲使 $\dfrac{1}{n}<\dfrac{1}{100}$，只要 $n>100$，即从第 101 项起，后面的所有项都能使

$$|x_n-1|<\frac{1}{100}$$

成立．同样地，如果给定 $\dfrac{1}{10\ 000}$，则从第 10 001 项起，后面的所有项都能使

$$|x_n-1|<\frac{1}{10\ 000}$$

成立．一般地，不论给定的正数 ε 多么小，总存在着一个正整数 N，当 $n>N$ 时，即从第 $N+1$ 项起，后面的所有项都能使不等式

$$|x_n-1|<\varepsilon$$

成立．这样的一个数 1，叫作数列 $\left\{1+\dfrac{(-1)^n}{n}\right\}$ 的极限.

注：（1）定义 2-3 中的 ε 是任意给定的（既是任意的，又是给定的）．ε 用来刻画 $\{x_n\}$ 与常数 a 的接近程度，ε 越小，$\{x_n\}$ 越接近于 a.

（2）定义 2-3 中的正整数 N 是随 ε 而定的，用来刻画“n 无限增大”的程度，但不唯一.

（3）定义 2-3 的几何意义：若数列 $\{x_n\}$ 的极限为 a，则在以 a 为中心、任意给定的正数 ε（不论多么小）为半径的邻域 $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ 之外，至多有 N 个点 $x_1,x_2,\cdots,x_N$，而其他无限多个点 $x_{N+1},x_{N+2},\cdots$ 都落在该邻域之内，如图 2-2 所示.

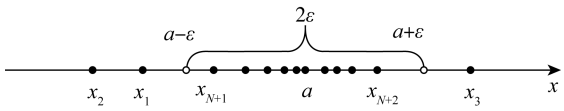


图 2-2

为了表达方便，引入记号“∀”表示“对于任意给定的”或“对于每一个”，记号“∃”表示“存在”．于是“对于任意给定的 $\varepsilon>0$”写成“$\forall\varepsilon>0$”，“存在正整数 N”写成“∃ 正整数 N”，数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 的定义可表达为

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\text{ 正整数 }N,\text{当 }n>N\text{ 时，有}|x_n-a|<\varepsilon.$$

*【例 2-1】　用定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+(-1)^n}{n}=1$.

证明　对于任意给定的 $\varepsilon>0$，要使不等式

$$\left|\frac{n+(-1)^n}{n}-1\right|=\frac{1}{n}<\varepsilon$$

成立，只需 $n>\dfrac{1}{\varepsilon}$ 成立.

因此，若取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$，则当 $n>N$ 时，有不等式

$$\left|\frac{n+(-1)^n}{n}-1\right|<\varepsilon$$

成立，由定义 2-3 知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+(-1)^n}{n}=1$.

2.1.1.3 收敛数列的性质

性质 2-1 （极限的唯一性）如果数列$\{x_n\}$收敛，那么它的极限唯一.

性质 2-2 （收敛数列的有界性）如果数列$\{x_n\}$收敛，那么数列$\{x_n\}$一定有界.

性质 2-2 的逆命题不成立，即有界数列未必收敛．例如数列

$$1,-1,1,-1,\cdots,(-1)^{n+1},\cdots$$

有界，但它是发散的．所以数列有界是数列收敛的必要条件，但不是充分条件.

性质 2-3 （收敛数列的保号性）若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，且$a>0$（或$a<0$），则必存在正整数$N$，当$n>N$时，恒有$x_n>0$（或$x_n<0$）.

* **性质 2-4** （收敛数列与子数列间的关系）如果数列$\{x_n\}$收敛于a，那么它的任意子数列也收敛，且极限也是a.

由性质 2-4 可知，若数列$\{x_n\}$有两个子数列收敛于不同的极限，那么数列$\{x_n\}$是发散的.

例如，数列

$$1,-1,1-1,\cdots,(-1)^{n-1},\cdots$$

的子数列$1,1,1,\cdots,1,\cdots$收敛于 1，而子数列$-1,-1,-1,\cdots,-1,\cdots$收敛于$-1$，因此，数列$\{(-1)^{n-1}\}$是发散的.

2.1.2 函数的极限

上面介绍了数列极限的概念和性质，此处介绍函数极限的概念和性质，主要研究两种情形：(1) 自变量的绝对值$|x|$无限增大即自变量趋于无穷大（记作$x\to\infty$）时，对应的函数值$f(x)$的变化情形；(2) 自变量x趋近于有限值x_0时，对应的函数值$f(x)$的变化情形.

2.1.2.1 自变量的绝对值$|x|$无限增大即自变量趋于无穷大（记作$x\to\infty$）时，对应的函数值$f(x)$的变化情形

因为数列$\{x_n\}$可看作自变量为n的函数$x_n=f(n),n\in\mathbf{N}^+$，所以数列$\{x_n\}$的极限为$a$，就是当自变量$n$取正整数且无限增大（即$n\to\infty$）时，对应的函数$f(n)$无限接近于确定的常数$a$，把数列极限概念中的函数$f(n)$扩展为一般的函数$f(x)$，而自变量的变化过程扩展为$x\to\infty$，就可以引出$x\to\infty$时，函数$f(x)$的极限的定义.

定义 2-4 如果在$x\to\infty$（$|x|$无限增大）的过程中，对应的函数值$f(x)$无限接近于某个确定的常数A，那么A就叫作函数$f(x)$当$x\to\infty$时的极限，记作$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$或$f(x)\to A(x\to\infty)$.

如果当$x>0$且$|x|$无限增大（记作$x\to+\infty$）时，对应的函数值$f(x)$无限接近于某个确定的常数A，那么A就叫作函数$f(x)$当$x\to+\infty$时的极限，记作$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$或$f(x)\to A(x\to+\infty)$.

如果当$x<0$且$|x|$无限增大（记作$x\to-\infty$）时，对应的函数值$f(x)$无限接近于某个确定的常数A，那么A就叫作函数$f(x)$当$x\to-\infty$时的极限，记作$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$或$f(x)\to A(x\to-\infty)$.

例如由图 2-3 观察可知，当$x\to\infty$时，函数$f(x)=\dfrac{1}{x}$无限趋近于 0，这时称$x\to\infty$时，

函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 的极限为 0.

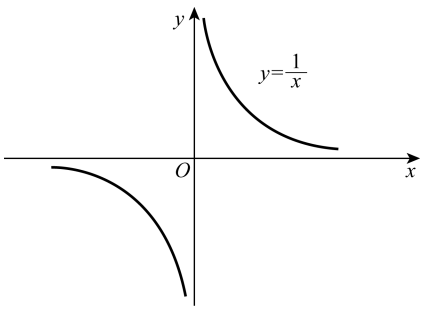


图 2-3

与数列极限类似，$x\to\infty$ 时 $f(x)$ 的极限的严格数学定义如下.

*** 定义 2-5**　设函数 $f(x)$ 在 $|x|$ 大于某一正数时有定义，如果存在常数 A，对于任意给定的正数 ε（不论多么小），总存在正数 X，使得当 $|x|>X$ 时，恒有

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

成立，则称常数 A 为当 $x\to\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限，或称 $x\to\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限为 A，记作

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to\infty).$$

该定义可简单地表达为

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists X>0,\text{当}|x|>X\text{时,有}|f(x)-A|<\varepsilon.$$

如果 $x>0$ 且 $|x|$ 无限增大（记作 $x\to+\infty$），那么只要把上面定义中的 $|x|>X$ 改为 $x>X$，就能得到 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 的定义. 同样，如果 $x<0$ 而 $|x|$ 无限增大（记为 $x\to-\infty$）时，那么只要把 $|x|>X$ 改为 $x<-X$，便得到 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$ 的定义.

定理 2-1　$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 都存在且等于 A. 即

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}f(x)=A.$$

【例 2-2】　讨论 $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 是否存在.

解　如图 2-4 所示，因为 $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x$ 与 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x$ 存在但不相等，故由定理 2-1 可知，极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在.

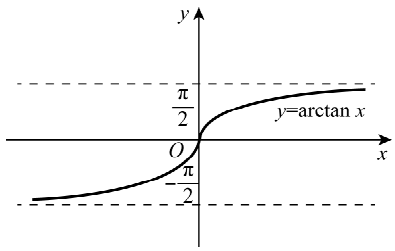


图 2-4

2.1.2.2　自变量趋于有限值 x_0 时函数的极限

现在考虑自变量的变化过程为 $x\to x_0$ 的情形.

【例 2-3】 考察函数 $y=f(x)=\dfrac{4x^2-1}{2x-1}, x\in\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$，当 $x\to\dfrac{1}{2}$ 时的变化趋势，为此列表 2-1.

表 2-1

x	0	0.1	0.4	0.49	…	0.5	…	0.51	0.6	0.9	1
$f(x)$	1	1.2	1.8	1.98	…	×	…	2.02	2.2	2.8	3

从表 2-1 中可以看出，$x\to\dfrac{1}{2}$ 共有两种方式：

(1) $x<\dfrac{1}{2}, x\to\dfrac{1}{2}$，即 x 从点 $\dfrac{1}{2}$ 的左侧无限趋近于 $\dfrac{1}{2}$；

(2) $x>\dfrac{1}{2}, x\to\dfrac{1}{2}$，即 x 从点 $\dfrac{1}{2}$ 的右侧无限趋近于 $\dfrac{1}{2}$.

显然，无论 x 从点 $\dfrac{1}{2}$ 的左侧还是右侧无限趋近于 $\dfrac{1}{2}$ 时，相应的函数值都无限趋近于 2.

由于 $x<\dfrac{1}{2}, x\to\dfrac{1}{2}$ 和 $x>\dfrac{1}{2}, x\to\dfrac{1}{2}$ 包括了 $x\to\dfrac{1}{2}$ 的所有方式，而在这两种方式之下 $f(x)=\dfrac{4x^2-1}{2x-1}$ 都无限趋近于 2，即当 $x\to\dfrac{1}{2}$ 时，函数 $f(x)$ 具有稳定的变化趋势，所以称函数 $f(x)=\dfrac{4x^2-1}{2x-1}$ 当 $x\to\dfrac{1}{2}$ 时的极限存在，极限是 2（如图 2-5 所示）.

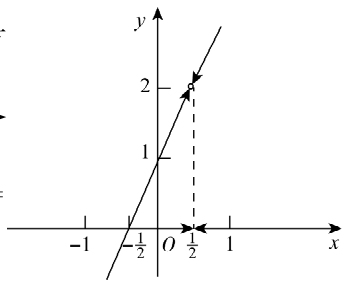


图 2-5

一般地，我们有如下的定义.

定义 2-6 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域内有定义，如果在 $x\to x_0$ 的过程中，对应的函数值 $f(x)$ 无限接近于一个确定的常数 A，那么 A 就叫作函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限，记作 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A(x\to x_0)$.

如果这样的常数 A 不存在，那么称 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 没有极限，或者说 $f(x)$ 的极限不存在.

$x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限的严格数学定义如下.

* **定义 2-7** 设函数在点 x_0 的某去心邻域内有定义，A 为常数，如果对任意给定的 $\varepsilon>0$（无论多么小），总存在 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

成立，则称 A 为 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限，或称 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限为 A，记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to x_0).$$

如果这样的常数 A 不存在，那么称 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 没有极限，或者说 $f(x)$ 的极限不存在.

定义 2-7 可以简单地表述为

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\text{当 } 0<|x-x_0|<\delta \text{ 时，有 } |f(x)-A|<\varepsilon.$$

例如，在例 2-3 中当 x 趋于 $\dfrac{1}{2}$ 时，$f(x)=\dfrac{4x^2-1}{2x-1}$ 以 2 为极限严格的说法就是：当 x 越来越接近于 $\dfrac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 与 2 的差越来越接近于 0，当 x 充分接近 $\dfrac{1}{2}$ 时，$|f(x)-2|$ 可以任意小

. 因此，对于任意给定的 $\varepsilon>0$，要使

$$|f(x)-2|=\left|\frac{4x^2-1}{2x-1}-2\right|=|2x-1|=2\left|x-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon,$$

只要 $\left|x-\frac{1}{2}\right|<\frac{\varepsilon}{2}$ 就可以了．这就是说，当 x 进入 $x=\frac{1}{2}$ 的 $\frac{\varepsilon}{2}$ 邻域 $\left(\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{2},\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{2}\right)$ 时，$|f(x)-2|<\varepsilon$ 恒成立.

*【例 2-4】　用定义证明：

$$\lim_{x\to x_0}(ax+b)=ax_0+b,$$

其中 a,b 为已知常数.

证明　当 $a=0$ 时，$ax+b=b$，显然有 $\lim\limits_{x\to x_0}b=b$.

设 $a\neq 0$，对任意给定的 $\varepsilon>0$，要使

$$|(ax+b)-(ax_0+b)|=|a||x-x_0|<\varepsilon,$$

只需取 $\delta=\frac{\varepsilon}{|a|}$，则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有

$$|(ax+b)-(ax_0+b)|<\varepsilon.$$

于是，根据定义有

$$\lim_{x\to x_0}(ax+b)=ax_0+b.$$

由上面的两个例题可以看出，我们研究 x 趋于 $\frac{1}{2}$ 时函数 $f(x)$ 的极限，是指 x 充分接近 $\frac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 的变化趋势，而不是求 $x=\frac{1}{2}$ 时 $f(x)$ 的函数值．因此，研究 x 趋于 $\frac{1}{2}$ 时 $f(x)$ 的极限问题与 $x=\frac{1}{2}$ 时函数 $f(x)$ 是否有定义无关.

设 $f(x)=C$（C 为常数），则对任一定值 x_0，在 $x\to x_0$ 的过程中，总有 $|f(x)-C|=0$，这表明 $f(x)$ 已无限接近于常数 C（如图 2-6 所示），即 $\lim\limits_{x\to x_0}C=C$.

设 $f(x)=x$，对任一定值 x_0，当 $x\to x_0$ 时，$f(x)=x\to x_0$（如图 2-7 所示），即 $\lim\limits_{x\to x_0}x=x_0$.

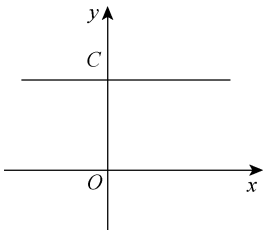


图 2-6

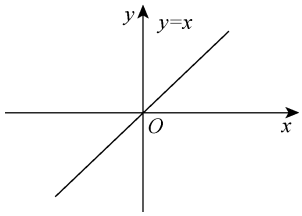


图 2-7

上述定义中 $x\to x_0$ 的方式是任意的，x 既可从 x_0 的左侧趋于 x_0，也可从 x_0 右侧趋于 x_0. 但是，有时需考虑 x 仅从 x_0 的左侧（$x<x_0$）趋于 x_0（记为 $x\to x_0^-$）或仅从 x_0 的右侧（$x>x_0$）趋于 x_0（记为 $x\to x_0^+$）时，函数 $f(x)$ 的极限．于是，我们引进左极限和右极限的概念.

如果当 x 从 x_0 的左侧（$x<x_0$）趋于 x_0（记为 $x\to x_0^-$）时，函数 $f(x)$ 无限接近于某个确定的常数 A，则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0^-$ 时的左极限，记作

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to x_0^-)$$

有时简记为 $f(x_0^-)=A$.

如果当 x 从 x_0 的右侧（$x>x_0$）趋于 x_0（记为 $x\to x_0^+$）时，函数 $f(x)$ 无限接近于某个确定的常数 A，则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0^+$ 时的右极限，记作

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to x_0^+),$$

有时简记为 $f(x_0^+)=A$.

函数的左极限和右极限统称为单侧极限.

函数的左极限、右极限和函数的极限之间有如下重要关系.

定理 2-2 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 都存在且等于 A，即有

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A,$$

读者可以自己证明.

【例 2-5】 已知函数

$$f(x)=\begin{cases} x+1, & x<0\\ 0, & x=0,\\ x-1, & x>0\end{cases}$$

讨论 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 是否存在？

解 因为 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x+1)=1$,

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x-1)=-1$,

从而 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$,

由定理 2-2 知，$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在．$f(x)$ 的图形如图 2-8 所示.

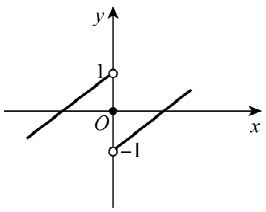


图 2-8

2.1.2.3 函数极限的性质

此处仅以 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 的形式为代表，给出关于函数极限性质的一些结论.

性质 2-5（函数极限的唯一性）若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，则这极限唯一.

性质 2-6（函数极限的局部有界性）若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，则函数在 x_0 的某去心邻域内有界.

性质 2-7（函数极限的局部保号性）若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，且 $A>0$（或 $A<0$），那么存在常数 $\delta>0$，使得当 $x\in \overset{\circ}{U}(x_0,\delta)$ 时，有 $f(x)>0$［或 $f(x)<0$］.

2.2 极限运算法则

极限定义本身没有给出求极限的一般方法，本节讨论极限的求法，主要是建立极限的四则运算法则和复合函数的极限运算法则，利用这些法则，可以求某些函数的极限．由极限定义可以证明如下函数极限的运算法则.

在下面的讨论中，记号“ lim ”下面没有标明自变量的变化过程，实际上，下面的定理对 $x \to x_0$ 及 $x \to \infty$ 都是成立的.

定理 2-3　若 $\lim f(x) = A, \lim g(x) = B$，则

(1) $\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x) = A \pm B$；

(2) $\lim kf(x) = k\lim f(x) = kA$（$k$ 为常数）；

(3) $\lim[f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x) = A \cdot B$；

(4) $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \dfrac{A}{B}(B \neq 0)$.

定理 2-3 中的 (1) (3) 还可以推广到有限个函数的情形，得到如下的推论：

(1) $\lim [f(x)]^m = [\lim f(x)]^{\frac{1}{m}}$（$m$ 为正整数）；

(2) $\lim [f(x)]^{\frac{1}{m}} = [\lim f(x)]^{\frac{1}{m}}[m$ 为正整数，$f(x) > 0]$.

定理 2-4　如果 $\varphi(x) \geqslant \psi(x)$，而 $\lim\varphi(x) = a, \lim\psi(x) = b$，那么 $a \geqslant b$.

【例 2-6】　求 $\lim\limits_{x \to 2}(3x^2 - 2x + 6)$.

解
$$\begin{aligned}\lim_{x \to 2}(3x^2 - 2x + 6) &= \lim_{x \to 2}3x^2 - \lim_{x \to 2}2x + \lim_{x \to 2}6 \\ &= 3\lim_{x \to 2}x^2 - 2\lim_{x \to 2}x + \lim_{x \to 2}6 \\ &= 3 \times 2^2 - 2 \times 2 + 6 = 14.\end{aligned}$$

一般地，设 $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$，则

$$\begin{aligned}\lim_{x \to x_0}P(x) &= \lim_{x \to x_0}(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0) \\ &= a_n \lim_{x \to x_0}x^n + a_{n-1}\lim_{x \to x_0}x^{n-1} + \cdots + a_1 \lim_{x \to x_0}x + \lim_{x \to x_0}a_0 \\ &= a_n {x_0}^n + a_{n-1}{x_0}^{n-1} + \cdots + a_1 x_0 + a_0 = P(x_0).\end{aligned}$$

【例 2-7】　求 $\lim\limits_{x \to 1}\dfrac{x^4 - 3x - 8}{2x^3 - x^2 + 1}$.

解　因为 $\lim\limits_{x \to 1}(2x^3 - x^2 + 1) = 2 \neq 0$，所以

$$\lim_{x \to 1}\frac{x^4 - 3x - 8}{2x^3 - x^2 + 1} = \frac{\lim\limits_{x \to 1}(x^4 - 3x - 8)}{\lim\limits_{x \to 1}(2x^3 - x^2 + 1)} = -\frac{10}{2} = -5.$$

一般地，设 $F(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$，$P(x), Q(x)$ 都是多项式，$\lim\limits_{x \to x_0}P(x) = P(x_0), \lim\limits_{x \to x_0}Q(x) = Q(x_0)$.

如果 $\lim\limits_{x \to x_0}Q(x) \neq 0$，则

$$\lim_{x \to x_0}F(x) = \lim_{x \to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0}P(x)}{\lim\limits_{x \to x_0}Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)} = F(x_0).$$

但必须注意，若 $Q(x_0) = 0$，则关于商的极限的运算法则不能应用，那就需要特别考虑，下面举两个这样的例题.

【例 2-8】　求 $\lim\limits_{x \to 4}\dfrac{x - 4}{x^2 - 16}$.

解　因为 $\lim\limits_{x \to 4}(x^2 - 16) = 0$，不能用商的极限法则求极限，而分子、分母有公因子 $x - 4$，当 $x \to 4$ 时，$x \neq 4, x - 4 \neq 0$，可先约去这个不为零的公因子，再求极限，所以

$$\lim_{x \to 4}\frac{x - 4}{x^2 - 16} = \lim_{x \to 4}\frac{1}{x + 4} = \frac{1}{8}.$$

【例 2-9】 求 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{5x^2-16x+3}{2x^2-5x-3}$.

解 因为 $\lim\limits_{x\to 3}(5x^2-16x+3)=0$，$\lim\limits_{x\to 3}(2x^2-5x-3)=0$，故不能用商的极限法则求极限. 由于

$$5x^2-16x+3=(x-3)(5x-1),$$
$$2x^2-5x-3=(x-3)(2x+1),$$

可见分子、分母有公因子 $x-3$ 且其不为零，可以约去，于是有

$$\lim_{x\to 3}\frac{5x^2-16x+3}{2x^2-5x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{5x-1}{2x+1}=\frac{14}{7}=2.$$

【例 2-10】 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+2x^2+5}{5x^3+3x^2-2}$.

解 当 $x\to\infty$ 时，分子、分母都是无穷大，所以不能直接用商的极限的运算法则，可先用 x^3 去除分母及分子，然后求极限，即

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+2x^2+5}{5x^3+3x^2-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{x^3}}{5+\dfrac{3}{x}-\dfrac{2}{x^3}}=\frac{3}{5}.$$

这是因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a}{x^n}=a\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^n}=a\left(\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\right)^n=0$，其中 a 为常数，n 为正整数，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

【例 2-11】 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-3x+1}{2x^3+5x^2-4}$.

解 先用 x^3 除分母及分子，然后求极限，即

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-3x+1}{2x^3+5x^2-4}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}{2+\dfrac{5}{x}-\dfrac{4}{x^3}}=0.$$

【例 2-12】 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+5x^2-4}{x^2-3x+1}$.

解 应用【例 2-11】的结果，即得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+5x^2-4}{x^2-3x+1}=\infty.$$

一般地，当 $a_0\neq 0$，$b_0\neq 0$，m，n 为非负数时有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & m=n\\ 0, & n>m\\ \infty, & n<m\end{cases}.$$

【例 2-13】 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2}\right)$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+1)}{2n^2}=\dfrac{1}{2}$.

定理 2-5（复合函数的极限运算法则） 设 $\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0$，当 $x\neq x_0$ 时，$\varphi(x)\neq u_0$，且复合函数 $f[\varphi(x)]$ 在 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 内有定义，则

$$\lim_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=\lim_{u\to u_0}f(u)=A.$$

【例 2-14】　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$（$n$ 正整数）.

解　令 $t=\sqrt[n]{1+x}$，即 $x=t^n-1$，当 $x\to 0$ 时，$t\to 1$，于是

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}=\lim_{t\to 1}\frac{t-1}{t^n-1}=\lim_{t\to 1}\frac{1}{1+t+t^2+\cdots+t^{n-1}}=\frac{1}{n}.$$

【例 2-15】　求 $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\sqrt{\dfrac{1}{x-1}+1}-\sqrt{\dfrac{1}{x-1}-1}\right)$.

解　作代换 $t=\dfrac{1}{x-1}$，则 $x\to 1^+$ 时，$t\to+\infty$，于是有

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\sqrt{\frac{1}{x-1}+1}-\sqrt{\frac{1}{x-1}-1}\right)=\lim_{t\to+\infty}\left(\sqrt{t+1}-\sqrt{t-1}\right)$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{t+1}+\sqrt{t-1}}=0.$$

推论　（幂指函数的极限）设 $\lim f(x)=a(a>0)$，$\lim g(x)=b$，则

$$\lim f(x)^{g(x)}=[\lim f(x)]^{\lim g(x)}=a^b.$$

2.3　极限存在准则与两个重要极限

本节介绍的极限存在的两个重要准则为判断极限存在提供了两个充分条件，扩大了判断极限存在的范围，由此列出的两个重要极限，在微积分中起着重要的作用.

准则 1——夹逼准则.

关于数列收敛的夹逼准则：设数列 $\{x_n\},\{y_n\},\{z_n\}$ 满足

（1）$y_n\leqslant x_n\leqslant z_n(n=1,2,3,\cdots)$；　　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$，

则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在且等于 a.

关于函数收敛的夹逼准则：设函数 $f(x),g(x),h(x)$ 满足

（1）当 $x\in\mathring{U}(x_0,r)$（或 $|x|>M$）时，有

$$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x);$$

（2）$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}g(x)=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}h(x)=A$，

则 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)$ 存在且等于 A.

现在利用夹逼准则来证明重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

作单位圆，设圆心角 $\angle AOB=x\left(x\text{ 取弧度为单位},0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$，过点 A 的切线与 OB 的延长线相交于 D，过点 B 作 $BC\perp OA$ 于 C，如图 2-9 所示，则有

$\triangle AOB$ 的面积 $<$ 扇形 AOB 的面积 $<\triangle AOD$ 的面积，

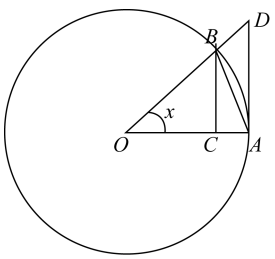


图 2-9

由此得

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\tan x \qquad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right),$$

即

$$\sin x < x < \tan x,$$

对上式取倒数并乘以 $\sin x$，就得到

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

因为 $\cos x, \dfrac{\sin x}{x}, 1$ 均为偶函数，上式对区间 $\left(-\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$ 也成立. 由于

$$\lim_{x\to 0}\cos x = 1, \lim_{x\to 0}1 = 1,$$

故由夹逼准则，即可推得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

【例 2-16】 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1}{\cos x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x} = 1.$

【例 2-17】 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2} = \dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\dfrac{x}{2}}{\left(\dfrac{x}{2}\right)^2} = \dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\right)^2 = \dfrac{1}{2}.$

【例 2-18】 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$.

解 令 $t = \arcsin x$，当 $x \to 0$ 时，$t \to 0$，于是

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t} = 1.$$

【例 2-19】 求 $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin x}{\pi - x}$.

解 $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin x}{\pi - x} = \lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin(\pi - x)}{\pi - x} = 1.$

【例 2-20】 求 $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\sin\dfrac{x}{n}$（$x$ 为不等于零的常数）.

解 $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\sin\dfrac{x}{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\dfrac{x}{n}}{\dfrac{x}{n}}\cdot x = x.$

【例 2-21】 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 3x}{\sin 5x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 3x}{\sin 5x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\tan 3x}{3x}}{\dfrac{\sin 5x}{5x}}\cdot\dfrac{3x}{5x} = \dfrac{3}{5}.$